# 大学院入試徹底対策テキスト

# 制御工学

森　泰親 著

コロナ社

# ま　え　が　き

大学院を受験しようと入試課に問い合わせると，過去2，3年分の試験問題を入手できることがある。その過去問は，いままでに見たこともない姿をしており，驚きと不安が襲ってくる。

これまで，学部の授業で制御工学を履修したときは，小テストがあり，期末試験があった。小テストは，直近の3週間に習ったごく限られた範囲から出題され，問題はきわめてシンプルである。また，期末試験では，ブロック線図の等価変換，定常偏差の計算，ラウス・フルビッツの安定判別，対角正準形への変換など，テーマごとの問題が数題出される。すなわち，おたがいが完全に独立した問題であり，著者は7問中5問を選択して解答する方式を取っていた。よい点を取ってもらうための策である。

しかし，大学院入試問題はそうではない。テーマを融合した出し方をする。また，一つの問題の中に小問が数題あり関連しているので，早い段階で間違うとそれ以降の苦労が無駄になってしまう。例えば，システムの動特性を式表現し，それをラプラス変換して制御系全体のブロック線図を構成したのち，等価変換して伝達関数を見つけ，ステップ応答と定常偏差，安定度を計算するといった具合である。

それぞれのテーマをしっかりと身に付けておけば恐れることはない。ただ，そのような問題に取り組んだ経験がないために焦ってしまうのである。ならば，経験を積むためにと生まれたのが本書である。

本書は，「実際の過去問」をわかりやすく丁寧に解いている。また，必要に応じて「さらに詳しく」のコーナーを設けて詳しい解説をしている。多くの本が，詳しい解説のあとに章末問題を解いて理解度のチェックをするのとまったく逆の構成である。大学院を目指す受験生のために書かれた本ではあるが，社

会人になって制御工学を復習したい人，力試しをしたい人にも重宝される一冊に仕上がっている。

なお，本書の執筆にあたり，過去の大学院入試問題の転載をご許諾いただいた，北海道大学，東京工業大学，電気通信大学，名古屋工業大学，大阪大学，徳島大学（掲載順）の各大学院に改めて御礼申し上げます。

2021 年 10 月

森　泰親

# 目　　　次

## 大阪大学大学院　工学研究科　博士前期課程
## 電気電子情報通信工学専攻　電気工学コース



## 徳島大学大学院　先端技術科学教育部　博士前期課程
## 知的力学システム工学専攻　機械創造システム工学コース

## 北海道大学大学院 工学院 修士課程

機械宇宙工学専攻
機械・宇宙航空工学系研究室群

### 令和 2 年度入試 （令和元年 8 月実施問題　抜粋）

#### 試験問題　（機械力学・制御工学）

**問 2**　次式の伝達関数で表されるシステムについて考える．

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{s+5}{s^2+2s+401} \qquad \text{(i)}$$

ここで，$s$ はラプラス演算子，$Y(s)$ は出力 $y(t)$ のラプラス変換，$U(s)$ は入力 $u(t)$ のラプラス変換である．以下の設問に答えなさい．

（1）　式(i) の系の極を求め，系の安定性について述べなさい．そして，系が安定の場合，その極配置から出力の応答性について説明しなさい．

（2）　$u(t)$ が単位インパルス入力のとき，出力 $y(t)$ を求めなさい．

（3）　式(i) を状態方程式で記述することを考える．そこで，時間関数 $w(t)$ のラプラス変換 $W(s)$ を導入し，$Y(s)/U(s)$ を次式のように分解する．

$$\frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{W(s)}{U(s)}\,\frac{Y(s)}{W(s)} \qquad \text{(ii)}$$

ここで，$W(s)/U(s)$ と $Y(s)/W(s)$ は次式で与えられ，このとき式(i) が成り立つ．

$$\frac{W(s)}{U(s)} = \frac{1}{s^2+2s+401} \qquad \text{(iii)}$$

$$\frac{Y(s)}{W(s)}=s+5 \tag{iv}$$

式(iii) から $w(t)$ と $u(t)$ の関係式，式(iv) から $y(t)$ と $w(t)$ の関係式を求めなさい.

（４）　状態ベクトルを $x_1=w(t)$，$x_2=\dot{w}(t)$ で構成し，式(iii) および式(iv) をそれぞれ状態方程式，出力方程式として表しなさい．ただし，$\dot{w}(t)$ は $w(t)$ の時間微分を表す．また，ここで得られた状態方程式は可制御正準形と呼ばれる.

（５）　上問（４）で求められた状態方程式に対し，状態フィードバック $u(t)=-[f_1 \quad f_2]\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix}$ を適用する．閉ループ系の極を $(-30+j50)$ と $(-30-j50)$ に配置するフィードバックゲイン $[f_1 \quad f_2]$ を求めなさい.

(6)　上問（５）の状態フィードバックにより，系の特性がどのように変化したか，説明しなさい.

## 問２　解答

**（１）**

伝達関数

$$\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{s+5}{s^2+2s+401} \tag{A1.1}$$

で表される系の極は

$$s^2+2s+401=0 \tag{A1.2}$$

を解いて，$\lambda_{1,2}=-1\pm j20$ と得られる。

系は安定ではあるが，出力は振動が激しく収束の悪い応答となる。

**さらに詳しく**

二次遅れ要素の標準形は

$$G(s)=\frac{{\omega_n}^2}{s^2+2\zeta\omega_n s+{\omega_n}^2} \tag{A1.3}$$

で与えられる。ここで，$\omega_n > 0$ を固有角周波数，$\zeta \geq 0$ を減衰係数という。特性方程式は

$$s^2 + 2\zeta\omega_n s + {\omega_n}^2 = 0 \tag{A1.4}$$

であり，その判別式

$$D = (2\zeta\omega_n)^2 - 4{\omega_n}^2 = 4{\omega_n}^2(\zeta^2 - 1) \tag{A1.5}$$

から，$0 < \zeta < 1$ のとき特性根は共役複素数

$$\lambda_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm j\omega_n\sqrt{1-\zeta^2} \tag{A1.6}$$

となる。

また，単位ステップ応答 $y(t)$ は

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n\sqrt{1-\zeta^2}\,t + \varphi) \tag{A1.7}$$

となる。ここで

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \tag{A1.8}$$

である。このとき，特性根を式(A1.6) に代えて

$$\lambda_{1,2} = -\alpha \pm j\beta \tag{A1.9}$$

とおけば，式(A1.7) は

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\alpha t} \sin(\beta t + \varphi) \tag{A1.10}$$

となる。すなわち，特性根の実部は収束項 $e^{-\alpha t}$，虚部は振動項 $\sin \beta t$ にそれぞれ別々に寄与していることがわかる。

極の複素平面上での位置とステップ応答の関係を**図 A.1** に示す。虚軸上は持続振動する安定限界となり，左半平面が安定，右半平面が不安定となる。左半平面において虚軸から遠くになるほど収束がよくなる。また，実軸上は振動せずに単調に増加し，実軸から離れると振動する。実軸から遠くになるほど振動が激しくなる。

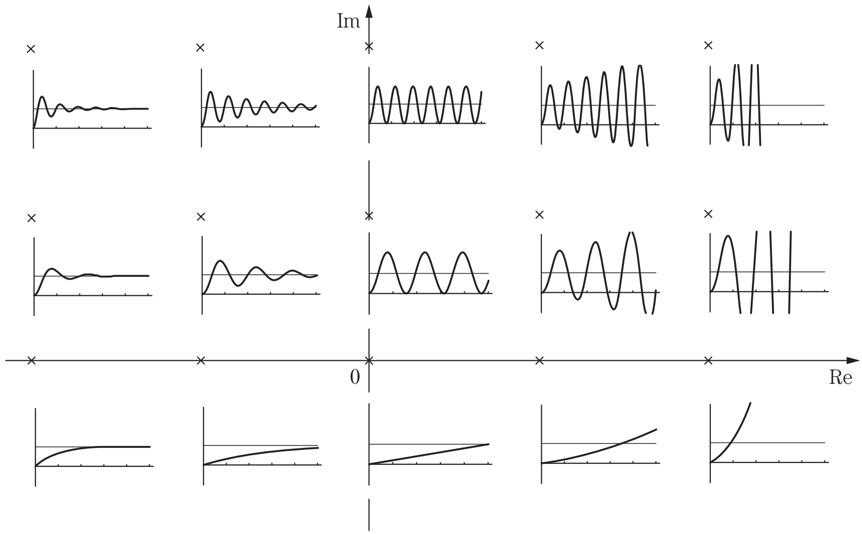


**図 A.1**

**(2)**

入力が単位インパルスなので，出力 $Y(s)$ は

$$Y(s)=\frac{s+5}{s^2+2s+401}U(s)=\frac{s+5}{s^2+2s+401}\cdot 1 \tag{A1.11}$$

で与えられる。式(A1.11) はつぎのように変形することができる。

$$\begin{aligned}Y(s)&=\frac{s+5}{s^2+2s+401}=\frac{(s+1)+4}{(s+1)^2+20^2}\\&=\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2}+\frac{4}{20}\times\frac{20}{(s+1)^2+20^2}\end{aligned} \tag{A1.12}$$

式(A1.12) を逆ラプラス変換して

$$\begin{aligned}y(t)&=\mathcal{L}^{-1}[Y(s)]\\&=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(s+1)}{(s+1)^2+20^2}+\frac{1}{5}\times\frac{20}{(s+1)^2+20^2}\right]\\&=\underline{\underline{e^{-t}\cos 20t+\frac{1}{5}e^{-t}\sin 20t}}\end{aligned} \tag{A1.13}$$

となる。

**（3）**

与式

$$\frac{W(s)}{U(s)}=\frac{1}{s^2+2s+401} \tag{A1.14}$$

の分母を払うと

$$(s^2+2s+401)W(s)=U(s) \tag{A1.15}$$

となる。式(A1.15) を逆ラプラス変換して

$$\underline{\underline{\ddot{w}(t)+2\dot{w}(t)+401w(t)=u(t)}} \tag{A1.16}$$

を得る。同様に

$$\frac{Y(s)}{W(s)}=s+5 \tag{A1.17}$$

を逆ラプラス変換すると次式となる。

$$\underline{\underline{y(t)=\dot{w}(t)+5w(t)}} \tag{A1.18}$$

**（4）**

与式

$$w(t)=x_1(t) \tag{A1.19}$$

$$\dot{w}(t)=x_2(t) \tag{A1.20}$$

から

$$\ddot{w}(t)=\dot{x}_2(t) \tag{A1.21}$$

$$\dot{x}_1(t)=x_2(t) \tag{A1.22}$$

であることがすぐわかる。式(A1.19) から式(A1.21) を式(A1.16) に代入する。

$$\dot{x}_2(t)+2x_2(t)+401x_1(t)=u(t)$$

$$\therefore\quad \dot{x}_2(t)=-401x_1(t)-2x_2(t)+u(t) \tag{A1.23}$$

式(A1.22) と式(A1.23) をまとめて，状態方程式はつぎのようになる。

$$\underline{\underline{\begin{bmatrix}\dot{x}_1(t)\\ \dot{x}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -401 & -2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1(t)\\ x_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0\\ 1\end{bmatrix}u(t)}} \tag{A1.24}$$

同様に，式(A1.18) は

$$y(t)=x_2(t)+5x_1(t) \tag{A1.25}$$

と書くことができるので，出力方程式は次式となる。

## ―― 著者略歴 ――

1976年　早稲田大学理工学部電気工学科卒業
1981年　早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了（電気工学専攻）
　　　　工学博士
1981年　株式会社東芝総合研究所勤務
1988年　埼玉大学助教授
1992年　防衛大学校助教授
1999年　防衛大学校教授
2003年　東京都立科学技術大学教授
2005年　首都大学東京教授（校名変更）
2018年　首都大学東京（現　東京都立大学）名誉教授
2018年　交通システム電機株式会社 取締役副社長
　　　　現在に至る

　　　　電気学会上級会員（2005年）
　　　　計測自動制御学会フェロー（2010年）

著　書　制御理論の基礎と応用（共著，産業図書，1995）
　　　　大学講義シリーズ　制御工学（コロナ社，2001）
　　　　演習で学ぶ現代制御理論（森北出版，2003）
　　　　演習で学ぶ基礎制御工学（森北出版，2004）
　　　　演習で学ぶ PID 制御（森北出版，2009）
　　　　演習で学ぶディジタル制御（森北出版，2012）
　　　　わかりやすい現代制御理論（森北出版，2013）
　　　　大学講義テキスト　古典制御（コロナ社，2020）
　　　　大学講義テキスト　現代制御（コロナ社，2020）
　　　　演習で学ぶ基礎制御工学　実践編（森北出版，2021）

**大学院入試徹底対策テキスト　制御工学**
Workbook for Graduate School Entrance Examination, Control Engineering


2021年12月17日　初版第1刷発行　★

検印省略

著　者　森（もり）　泰（やす）親（ちか）
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　美研プリンティング株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
**発行所　株式会社　コロナ社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-03236-9　C3053　Printed in Japan　（齋藤）