

# 大学講義テキスト 現代制御

森 泰親 著

コロナ社

## まえがき

制御工学の勉強は大変だという声をよく聞く。特に現代制御は数式を使っての証明ばかりで、まぶたが重くなるのに30分も掛からないらしい。著者が大学生で制御工学の勉強を始めた頃は、「やさしい」「わかりやすい」「はじめての」などという枕詞のついた市販本はなく、どれも詳細に書かれた分厚い本ばかりであった。何分で睡魔に襲われたかはあえていわないが、容易に想像できると思う。

現代制御は、制御対象として1入力1出力系と多入力多出力系を同じ理論の枠組みで扱うことができる。これは、古典制御にはない大きな魅力である。しかしながら、理論の枠組みは同じであっても、多入力多出力系では自由度が残るときがあって、一意に決まらないという事態になる。これに対して、1入力1出力系ではつねに一意に決まるので、わかりやすい。したがって、本書においては、制御対象を1入力1出力系に限定する。

また、多くの場合に、「固有値は相異なる」の条件をつけることとする。これにより、その後の理論展開を簡素化できる。

上記のように、きわめて都合のよい条件を設けることで枝葉がなくなり、現代制御の本質が見えてくる。ただし、適用範囲は狭く限られ、いろいろな制御対象を統一的に扱うことができるという長所が打ち消されてしまう。本書を使っただけの講義を受講した学生が制御の研究室を卒研部屋に選んだ場合は、研究室の輪講で上記の条件を外した理論を勉強する必要が生じるのは致し方ない。

本書「大学講義テキスト 現代制御」は、好評をいただいている「大学講義テキスト 古典制御」（コロナ社、2020年）の姉妹編であり、大学の講義を意識して14章からなっている。現代制御の基礎を学ぶのに必要最小限の内容に厳選したうえで、概念や定理の解説をわかりやすく丁寧に行っている。また、数

値例を多用して、定理や法則の使い方の習得を容易にしているなど、現代制御の基礎が効率的に身につくようにさまざまな工夫を凝らしている。

厳選された内容とそれらを理解させるために編み出した工夫は、著者が助教授となって現代制御の授業を担当して以来、30年間もの長きにわたって継続して講義してきた成果であるといえよう。著者は毎回の講義において、最初の10分間を使って前回の復習を行うのがつねであった。1週間ぶりに本講義を受ける学生に、前回の講義の内容を思い出させた後、今日講義する内容とその位置づけを説明してから本題に入るのである。この講義のやり方を本書に反映することを狙って、各章の冒頭と末尾に少しずつページを割いている。また、板書するとき、要となる箇所は目立つように黄色のチョークを使って囲った。本書においてもそれを踏襲して四角で囲っている。

本書の特長をもう一つ挙げるとすれば、それは構成である。大学の講義回数に合わせて14章からなっていることは、先に紹介した。また、各章は意識して細かく分割しており、節の数は2~4個である。この節がテーマに当たる。各テーマは「基本部分」と「さらに詳しく」の2部に分かれている。講義においては、「基本部分」を押さえたうえで、学生の反応と残り時間を見ながら、必要に応じて「さらに詳しく」を教授していただきたい。

大学の講義テキストとして十分に満足いただけるものを執筆できたと確信している。現代制御の基礎が丁寧にまとめられている本書が、本気で学ぼうとしている学生たちに勉学の意欲と勇気を少しでも与えることができれば、著者にとってこれほど幸せなことはない。

2020年8月

森 泰親

# 目 次

## 1 章 システムの記述

はじめに 1

- 1.1 伝達関数表現と状態空間表現 ..... 1
- 1.2 システムの数式モデルを求める ..... 5
- まとめ 11, 章末問題 12

## 2 章 状態遷移行列

はじめに 13

- 2.1 状態方程式の解を求める ..... 13
- 2.2 状態遷移行列の性質 ..... 17
- 2.3 状態遷移行列を計算する ..... 20
- まとめ 24, 章末問題 24

## 3 章 システムの応答と安定性

はじめに 25

- 3.1 モード展開する ..... 25
- 3.2 固有値の位置と応答の関係 ..... 32
- まとめ 36, 章末問題 36

## 4 章 座 標 変 換

はじめに 37

- 4.1 座標変換とは ..... 37

4.2	対角正準形に変換する	41
4.3	可制御正準形に変換する	49
4.4	伝達関数と状態方程式の関係	54
	まとめ 61, 章末問題 62	

## 5章 可制御性

はじめに 63

5.1	可制御性と可安定性	63
5.2	可制御性グラム行列	66
5.3	可制御性行列	73
	まとめ 79, 章末問題 79	

## 6章 可観測性

はじめに 80

6.1	可観測性と可検出性	80
6.2	可観測性グラム行列	83
6.3	可観測性行列	89
	まとめ 92, 章末問題 93	

## 7章 行列のランクと双対性

はじめに 94

7.1	行列のランクとは	94
7.2	ランクを求めよう	96
7.3	双対性とは	97
7.4	可制御性と可観測性の判定	102
	まとめ 106, 章末問題 106	

## 8章 極配置法 I

はじめに 107

8.1 可制御なシステムに対する極配置 ..... 107

8.2 可安定なシステムに対する極配置 ..... 112

まとめ 116, 章末問題 117

## 9章 極配置法 II

はじめに 118

9.1 可制御正準形による極配置 ..... 118

9.2 アッカーマン法による極配置 ..... 123

まとめ 127, 章末問題 127

## 10章 最適レギュレータ I

はじめに 128

10.1 評価関数と最適制御 ..... 128

10.2 重み行列と正定・半正定 ..... 132

10.3 最適制御則の導出 ..... 137

まとめ 140, 章末問題 141

## 11章 最適レギュレータ II

はじめに 142

11.1 最適制御系の安定性 ..... 142

11.2 円条件 ..... 144

11.3 リカッチ代数方程式を解く ..... 149

まとめ 156, 章末問題 156

## 12章 折返し法

はじめに	157
12.1 折返し法による制御系設計	157
12.2 折返し法による固有値の移動	159
12.3 選択的折返し法	165
まとめ	169, 章末問題 170

## 13章 サ ー ボ 系

はじめに	171
13.1 内部モデル原理とサーボ系の構造	171
13.2 サーボ系を設計する	174
13.3 サーボ系の設計条件	181
まとめ	189, 章末問題 190

## 14章 状 態 観 測 器

はじめに	191
14.1 状態観測器の構造	191
14.2 双対性を用いた設計	195
14.3 可検出なシステムに対する設計	198
14.4 併合系の固有値	200
まとめ	202, 章末問題 203

参 考 文 献	204
章末問題の解答	205
索 引	245

## システムの記述

### はじめに

**制御** (control) 工学とは、「**制し御する**」ための学問である。なにもしないでおけば、それがもつ特性と周りの環境に従って勝手に変化するであろう。しかしながら、力ずくで無理やりに押さえ込んでも、対象を希望どおりに制御することはできない。制御するには、その対象の特性を十分に把握しておく必要がある。

### 1.1 伝達関数表現と状態空間表現

制御を行うにはまず、対象とするシステムのどの物理量を制御したいかを明確にしなくてはならない。これを**制御量** (controlled variable) という。制御量はいろいろな要因で変化する。制御量に影響を与えるもののうちで、制御の目的達成のためにわれわれが利用するものを**操作量** (manipulated variable) と呼び、それ以外を**外乱** (disturbance) という。

例えば、自動車を**制御対象** (controlled object) として、停止状態からアクセルを踏み込んで目標速度である 60 km/h まで加速した後、定速走行する**制御系設計問題** (control system design problem) を考えてみよう。この場合、操作量がアクセルペダル、制御量が速度であって、自動車に吹きつける風が外乱とみなせる。制御系を設計するには、自動車を一つのシステムとしてとらえて、**入力** (input) であるアクセルペダルから**出力** (output) である速度までの**動特性** (dynamic characteristics) を数式で表現する必要がある。これを**数式モデル**



(mathematical model) という。

この数式モデルには二つの表現がある。一つは**伝達関数表現** (transfer function representation), もう一つが**状態空間表現** (state space representation) である。伝達関数表現では, 図 1.1 に見るように, 入力から直接, 出力への影響を伝達関数で表現する。

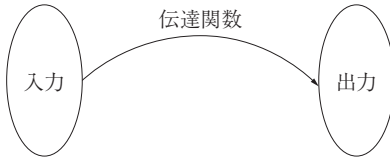


図 1.1 伝達関数表現

これに対して状態空間表現では, 図 1.2 に示すように, 内部の動きを表現する**状態変数** (state variable) を導入して, **状態方程式** (state equation) と**出力方程式** (output equation) の2本を用いる。

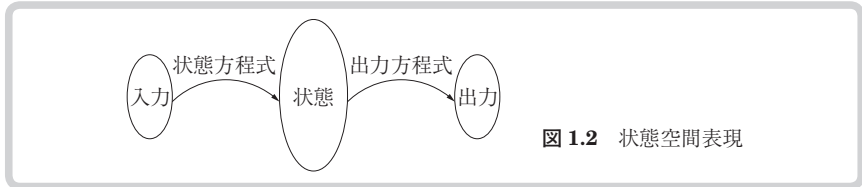


図 1.2 状態空間表現

システム表現として前者を用いるのが**古典制御** (classic control), 後者を用いるのが**現代制御** (modern control) である。二つの制御の違いを表 1.1 にまとめる。

表 1.1 古典制御と現代制御の違い

	領域	表現	道具
古典制御	周波数	伝達関数	ラプラス変換
現代制御	時間	状態空間	行列解析

古典制御では, 制御対象を伝達関数で表現したうえで, **周波数領域** (frequency domain) において解析と設計を行う。数学的道具は**ラプラス変換** (Laplace transform) である。これに対して現代制御では, 制御対象を状態空間表現する。図 1.2 の状態方程式は1階の**連立微分方程式** (simultaneous differen-

tial equations)であって、数学的道具は、**行列解析**(matrix analysis)である。このように、「制し御したい」という目的は同じでも、その接近法はまったく違う。

さて、本節の最初に問題設定した、停止状態からアクセルを踏み込んで60 km/hまで加速し、その後、定速走行するための**制御系構造**(control system structure)は、古典制御を用いるとき**図 1.3**となる。

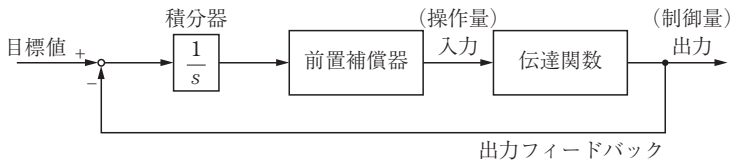


図 1.3 古典制御による追従制御系

出力をフィードバック (feedback) して**目標値** (reference value, desired value) との差をゼロにするために**積分器** (integrator) を設けている。積分器を設けるとい基本構造は、現代制御による制御系にも使われ、**図 1.4**のようになる。古典制御と大きく違うのは、**出力フィードバック** (output feedback) だけでなく、**状態フィードバック** (state feedback) も使う点である。図 1.2 で説明したように内部の動きを表現する状態変数を導入したので、この情報を有効に活用するのである。

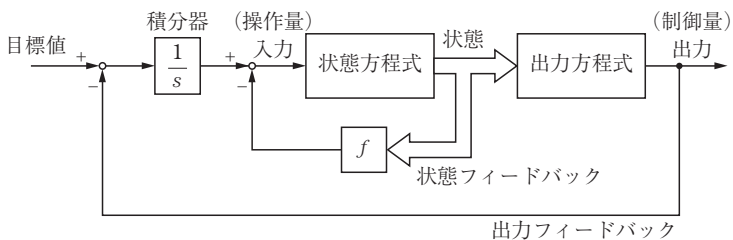


図 1.4 現代制御によるサーボ系

図 1.4 の内側のフィードバックループを切り出したのが**図 1.5**である。アクセルを踏んで60 km/hまで加速する場合、現在速度の情報だけでなく、加速度の情報も併せて利用すれば、高性能な制御を期待できる。より沢山の情報を有効に活用することで、どのように加速するかなど、きめ細かな制御も可能になる。

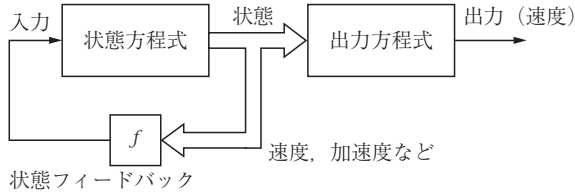


図 1.5 状態フィードバック

状態フィードバックの設計を解説するのは8章からであり、それまでの七つの章はその準備である。つぎつぎと、重要な**概念** (concept) や**定理** (theorem) を導入し解説するが、それらは現代制御を体系化させている必要不可欠なパーツであることを忘れないでもらいたい。早速、つぎの1.2節では、図1.2に示した状態空間表現の数式モデルのつくり方を勉強する。

### さらに詳しく

表1.1に挙げたキーワードを簡単に解説しておこう。

- **周波数領域**：**角周波数** (angular frequency)  $\omega$  [rad/s] をパラメータとする表現方法。周波数領域のグラフは、扱っている信号にどれだけの**周波数成分** (frequency component) が含まれているかを表す。
- **時間領域**：**時間**  $t$  [s] をパラメータとする表現方法。時間領域のグラフは、時間経過によって信号がどう変化するかを表す。
- **伝達関数表現**：システムの**インパルス応答** (impulse response)  $g(t)$  をラプラス変換したもの、あるいは、出力  $y(t)$  と入力  $u(t)$  のラプラス変換の比  $Y(s)/U(s) = G(s)$  を用いる表現法。
- **状態空間表現**：システムの動きを、入力と出力と状態変数を使った1階の連立微分方程式で記述する表現法。
- **ラプラス変換**：**フーリエ変換** (Fourier transform) を発展させて、より実用的にした計算方法。微分方程式が**代数方程式** (algebraic equation) に変換される。
- **行列解析**：**線形代数** (linear algebra) の分科であり、**行列の数学的構造**

(mathematical structure)と**解析的性質**(analytical property)を扱う学問領域。

## 1.2 システムの数式モデルを求める

思いどおりに制し御するためには、制御対象の特性をよく知ることが重要である。本節では、**機械振動系**(machine vibration system)と**電気回路**(electric circuit)を例に取り上げて、特性把握のための基礎を解説する。

図 1.6 に、台車、ばね、ダッシュポットのそれぞれの動きをまとめる。台車の質量を  $M[\text{kg}]$  とし、台車は摩擦なく床を動くものとすれば、ニュートンの**第二法則**(Newton's second law)から次式が成り立つ。

$$f(t) = M \frac{d^2x(t)}{dt^2} \quad (1.1)$$

ここで、 $x(t)[\text{m}]$  は台車の**変位**(deviation)であり、その**2階微分**(second order differential)  $d^2x(t)/dt^2[\text{m/s}^2]$  は**加速度**(acceleration)を表している。

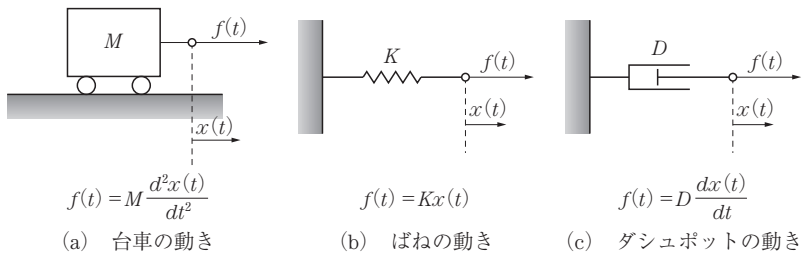


図 1.6 台車、ばね、ダッシュポットのそれぞれの動き

**ばね定数**(spring constant)を  $K[\text{N/m}]$  とすれば、ばねの伸び  $x(t)[\text{m}]$  は与えられる力  $f(t)[\text{N}]$  に比例して次式が成り立つ。

$$f(t) = Kx(t) \quad (1.2)$$

ダッシュポットによる制動力  $f(t)[\text{N}]$  は、変位  $x(t)[\text{m}]$  の時間微分に比例することから、次式で表すことができる。

# 索引

## 【あ】

アッカーマン法	123
有本・ポッター	150
安定	34

## 【い】

位相角	33
位相余裕	146
一次結合	94
一巡周波数伝達関数	146
一巡伝達関数	146
インダクタンス	8
インパルス応答	4

## 【え】

円条件	146
-----	-----

## 【お】

オイラーの公式	35
オイラーの等式	36
横断条件	137
オームの法則	8
折返し線	158
折返し法	158

## 【か】

可安定	64
可安定性	64
解析解	24
解析関数	68
解析的性質	5
階段行列	95
回転体	11

概念	4
外乱	1
可観測	80
可観測性	80
可観測性行列	89
可観測性グラム行列	83
角周波数	4
拡大系	175
可検出	81
可制御	53
可制御性	53
可制御性行列	53, 73
可制御性グラム行列	66
可制御正準形	49
加速度	5
可到達性	64
カール・ルンゲ	24

## 【き】

機械振動系	5
既約	172
逆行列	15
逆ラプラス変換	20
行階数	95
行展開	160
共役複素数	26
行列解析	3, 4
行列式	25
行列指数関数	14
極	62
極座標形式	33
極零相殺	102
極配置法	108

## 【く】

クラインマンの方法	149
-----------	-----

## 【け】

係数比較法	109
ゲイン余裕	146
ケーリー・ハミルトンの定理	50
現代制御	2

## 【こ】

誤差システム	192
古典制御	2
固有値	26
固有ベクトル	26

## 【さ】

再現誤差	192
再現値	192
最終値の定理	172
最大解	158
最大階数	95
最大原理	137
最適制御	129
最適レギュレータ	129
座標変換	26
座標変換行列	26
サーボ系	173
三角関数	11

## 【し】

時間応答	20
時間領域	4

システム行列 13  
 システム構造理論 80  
 実数 32  
 自由システム 14  
 周波数成分 4  
 周波数領域 2, 4  
 十分条件 66  
 首座小行列式 133  
 主小行列式 133  
 出力 1  
 出力フィードバック 3  
 出力方程式 2  
 小行列式 95  
 状態観測器 81, 192  
 状態空間表現 2, 4  
 状態遷移行列 14  
 状態フィードバック 3  
 状態フィードバック制御 107  
 状態変数 2  
 状態方程式 2  
 初期状態 13  
 初期値応答 25  
 ジョルダン標準形 48  
 シルベスターの判定条件 132

**【す】**

随伴変数 137  
 数学的構造 4  
 数式モデル 1  
 数値解法 24  
 数値積分 24  
 スカラ 13

**【せ】**

制御 1  
 制御系構造 3  
 制御系設計問題 1  
 制御対象 1  
 制御偏差 172

制御量 1  
 制し御する 1  
 正則性 106  
 正定 132  
 静電容量 8  
 制動力 6  
 正方行列 13  
 積分器 3, 172  
 積分定数 15  
 設計パラメータ 158  
 設計問題 107  
 絶対値 33  
 零行列 96  
 漸近安定 34  
 線形化 11  
 線形結合 28, 94  
 線形従属 67, 94  
 線形代数 4  
 線形独立 26  
 選択的折返し法 165

**【そ】**

操作量 1  
 相似 38  
 双対性 106  
 双対なシステム 98

**【た】**

対角化 26  
 対角正準形 41  
 対角変換行列 42  
 対偶 65  
 代数方程式 4, 8  
 多項式 25  
 畳込み積分 16  
 縦ベクトル 13  
 単位行列 17

**【ち】**

直交座標形式 32

**【て】**

定常状態 172  
 定常偏差 172  
 定理 4  
 電気回路 5  
 電磁誘導現象 8  
 伝達関数 38  
 伝達関数表現 2, 4

**【と】**

等価 38  
 動作点 11  
 動特性 1  
 特性根 62  
 特性多項式 26  
 特性方程式 25

**【な】**

内積 67  
 内部安定 181  
 内部モデル原理 172

**【に】**

二次形式 71, 132  
 二次形式評価関数 128  
 入力 1  
 ニュートンの第二法則 5

**【ね】**

粘性減衰係数 6

**【は】**

背理法 67  
 発見的手法 141  
 ばね定数 5  
 ハミルトン関数 137  
 ハミルトン行列 150  
 パラメータ変動 146  
 半正定 132  
 半正定対称行列 128

バンドルモンド行列 90

**【ひ】**

被積分関数 88

必要条件 67

**【ふ】**

不安定 34

フィードバック 3

フィードバック係数ベクトル 108

不可観測 80

不可制御 64

複素固有値 108

複素数 32

負定 132

部分積分の公式 23

部分分数 57

フーリエ変換 4, 23

フルランク 95

ブロック三角行列 160

分母多項式 62

分離定理 202

**【へ】**

併合系 200

平衡点 6

閉ループ系 25, 107

べき関数 132

ベクトル軌跡 146

ヘビサイドの展開定理 57

変位 5

**【ま】**

マクローリン級数 17

マルティン・クッタ 24

**【む】**

無限級数 17

**【も】**

目標値 3

モード 28

モード展開 28

モニック多項式 26

**【よ】**

余因子行列 182

横ベクトル 13

**【ら】**

ラプラス変換 2, 4, 23

**【り】**

リアプノフ安定 35

リアプノフの安定定理 142

リアプノフ方程式 142

リカッチ形方程式 158

リカッチ代数方程式 129

リカッチ微分方程式 129

**【る】**

ルンゲ・クッタ法 24

**【れ】**

列階数 95

列展開 160

連立微分方程式 2

**【ろ】**

ロバスト 146

**【数字】**

1 形制御系 173

2 階微分 5

**【英字】**

$n$  次元の線形定係数システム 13

## — 著者略歴 —

1976年 早稲田大学理工学部電気工学科卒業  
1981年 早稲田大学大学院理工学研究科博士課程修了（電気工学専攻）  
工学博士  
1981年 株式会社東芝総合研究所勤務  
1988年 埼玉大学助教授  
1992年 防衛大学校助教授  
1999年 防衛大学校教授  
2003年 東京都立科学技術大学教授  
2005年 首都大学東京教授（校名変更）  
2018年 首都大学東京（現 東京都立大学）名誉教授  
2018年 交通システム電機株式会社 取締役副社長  
現在に至る

電気学会上級会員（2005年）  
計測自動制御学会フェロー（2010年）

著書 制御理論の基礎と応用（共著、産業図書、1995）  
大学講義シリーズ 制御工学（コロナ社、2001）  
演習で学ぶ現代制御理論（森北出版、2003）  
演習で学ぶ基礎制御工学（森北出版、2004）  
演習で学ぶPID制御（森北出版、2009）  
演習で学ぶデジタル制御（森北出版、2012）  
わかりやすい現代制御理論（森北出版、2013）  
大学講義テキスト 古典制御（コロナ社、2020）

## 大学講義テキスト 現代制御

Modern Control Theory

© Yasuchika Mori 2020

2020年10月8日 初版第1刷発行



検印省略

著者	もり	やす	ちか
	森	泰	親
発行者	株式会社	コロナ	社
	代表者	牛来	真也
印刷所	美研プリンティング株式会社		
製本所	有限会社 愛千製本所		

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-03231-4 C3053 Printed in Japan

(齋藤)



©COPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。