

まえがき

1999年1月にシステム制御工学シリーズの1冊として「信号とダイナミカルシステム」をコロナ社から発行してから、15年の歳月が流れた。この本は、システム制御工学を学ぶ際に必要となる連続時間信号とダイナミカルシステムについて解説したものであり、それらを扱う上で重要な数学的な道具であるフーリエ解析とラプラス変換についても詳細に記述した。学部3年生で制御工学を学ぶことを前提とした学部2年生向けの教科書としてこの本を執筆した。

数年前、著者が勤務する慶應義塾大学理工学部物理情報工学科で、カリキュラムの改革を行った。その中で、フーリエ解析、ラプラス変換、 z 変換をカバーする新しい応用数学の科目「物理情報数学C」を新設し、著者が担当することになった。前著である「信号とダイナミカルシステム」を教科書として使用したが、この本は連続時間信号とシステムしか取り扱っておらず、離散時間を対象とする z 変換は含まれていなかった。そこで、フーリエ解析、ラプラス変換、 z 変換を系統的に学ぶことができる新しい教科書として、前著の1~5章を加筆修正し、さらに離散時間信号とシステム、 z 変換の部分を書き加えたのが本書である。

従来は、フーリエ解析は数学の授業で、ラプラス変換は電気回路や制御工学の授業で、 z 変換はデジタル信号処理の授業などで別々に講義されることが多かった。しかし、これらは非常に密接に関係しており、一つの講義科目の中で一貫して学ぶことが望ましい。そのため、近年、フーリエ変換とラプラス変換を解説した書籍が数多く出版されるようになっており、非常に平易に書かれたものから、数学的に高度なものまで多岐にわたっている。大学でもこのような授業科目が増えてきており、教科書のニーズが高まっているものと思われる。

本書の特徴を以下に列挙しよう。

- (1) 数学者ではなく、工学者の立場、すなわち数学を利用する立場から、フーリエ解析、ラプラス変換、 z 変換を解説している。
- (2) 例題をできるだけ多く準備し、例題を解くことによって読者に力をつけてもらうことを目的としている。
- (3) 連続時間であるフーリエ解析・ラプラス変換と、離散時間である z 変換を続けて学ぶことによって、連続時間（物理の世界）と離散時間（情報の世界）の垣根をできるだけ低くすることを目指している。

以下、これらの特徴について少し詳しく述べたい。最初に、著者は数学者ではないので、本書は数学的に厳密でないところが多々あることをお詫びしておきたい。フーリエ解析、ラプラス変換、 z 変換は、さまざまな工学分野で利用できる素晴らしい数学的な道具である。本書でそのことを理解した後、より高みを目指す読者は、数学的に厳密な本を探して勉強していただきたい。

つぎに、理工学書を和書と洋書とで比べるといろいろな面で差があるが、最も大きな差は、洋書のほうが例題や演習問題が圧倒的に多いということだろう。いろいろな電子機器が発達してどんなに便利になっていっても、理工系の基礎の習得には、紙と鉛筆を使って問題を何度も解くこと以外ないと著者は信じている。表面的に理解し、わかったつもりになっていても、それを書くことによって頭と体に定着させる作業を行わないと、せっかく勉強したことが短期記憶で終わってしまい、身につかない。そのために、本書では限られたページ数の範囲で例題をたくさん盛り込んだ。また、2単位の通常の授業を想定して、問題を集中的に解くことを目的とした二つの章「中間試験」と「期末試験」を設けたことも本書の特徴である。

物理現象を扱う分野では連続時間信号（関数）とシステムが対象であり、情報を扱う分野では離散時間（デジタル）信号とシステムが対象である。これは、物理と情報の本質的な相違点の一つである。そのため、「物理と情報の融合」が科学の世界における現在の最重要課題の一つになっている。われわれの学科である「物理情報工学科」は、まさにこの物理と情報の融合を目的としており、その目的のもと、2年生秋学期にフーリエ解析、ラプラス変換、 z 変換を

学ぶことには大きな意義があると思っている。これが3番目の特徴である。

フーリエ解析，ラプラス変換， z 変換という数学の基礎を学ぶことは時として退屈な作業かもしれないが，本書によってこれらの基礎を習得すれば，読者は強力な数学的な道具を手に入れることになるだろう。そして，引き続き学習するであろう「制御工学」，「デジタル信号処理」などの理解の大きな助けになると著者は信じている。

著者の浅学のために，本書の内容には誤りがあるかもしれない。そのときには厳しくご指導いただければ幸いである。

最後に，新科目「物理情報数学C」がスタートした2011年度に，この授業のTA (teaching assistant) として演習問題の解答の作成などにご協力いただいた川口貴弘君と石川健太郎君（当時，足立研究室修士課程在学）と，問題解答のチェックをしていただいた足立研究室の他の学生に感謝します。授業を共同で担当していただいている田中敏幸教授には，中間試験・期末試験の問題作成などでたいへんお世話になり，また，本書の原稿を注意深く読んでいただき有益なご指摘をいただいた。ここに深く感謝します。最後に，本書の発行に際してさまざまな点でお世話になったコロナ社に感謝します。

2014年8月

足立修一

目 次

1. 信号とシステム

1.1 信号の分類	1
1.2 基本的な連続時間信号	3
1.2.1 正弦波信号	3
1.2.2 複素指数信号	5
1.2.3 単位ステップ信号	10
1.2.4 単位インパルス信号	11
1.2.5 矩形信号	12
1.2.6 符号信号	13
1.3 基本周期	13
1.4 信号の分解	16
1.5 信号の操作	20
1.6 システム	26
1.7 本章のポイント	31
1.8 付録：三角関数の復習	32

2. 線形時不変システム

2.1 重ね合わせの理と線形システム	36
2.2 単位インパルス信号による連続時間信号の表現	38
2.3 インパルス応答による LTI システムの記述	40

2.4 たたみ込み積分の計算法	45
2.5 たたみ込み積分の性質	52
2.6 LTI システムの性質	55
2.7 本章のポイント	57

3. フーリエ解析

3.1 内積と直交	58
3.1.1 ベクトルの内積と直交	58
3.1.2 関数の内積と直交	61
3.2 フーリエ級数	64
3.2.1 さまざまなフーリエ級数	64
3.2.2 フーリエ級数の例題	69
3.2.3 複素フーリエ級数	77
3.2.4 フーリエ級数を用いた無限級の和の公式の導出	81
3.2.5 パーセバルの定理	82
3.3 フーリエ変換	82
3.3.1 フーリエ変換の定義	83
3.3.2 周期関数のフーリエ変換	91
3.4 フーリエ変換の性質	96
3.5 本章のポイント	106

4. 中間試験

5. ラプラス変換

5.1	ラプラス変換と逆ラプラス変換	113
5.2	基本的な連続時間信号のラプラス変換	115
5.3	ラプラス変換とフーリエ変換	123
5.4	ラプラス変換の性質	124
5.5	部分分数展開を用いた逆ラプラス変換の計算	130
5.6	ラプラス変換を用いた微分方程式の解法	139
5.7	本章のポイント	144

6. 信号のノルム

6.1	ノルム	145
6.2	持続的な信号の大きさ	147
6.3	信号のノルム	151
6.4	本章のポイント	157

7. 離散時間信号とシステム

7.1	離散時間信号	158
7.1.1	正弦波信号	158
7.1.2	複素指数信号	161
7.1.3	基本的な離散時間信号	167
7.2	信号の分解と操作	170
7.2.1	信号の分解	170
7.2.2	信号の操作	171

7.3 離散時間 LTI システム	173
7.3.1 離散時間信号の表現	174
7.3.2 インパルス応答による離散時間 LTI システムの表現	175
7.4 本章のポイント	180

8. z 変換

8.1 z 変換と収束領域	181
8.2 逆 z 変換	191
8.2.1 部分分数展開による逆 z 変換	192
8.2.2 べき級数展開による逆 z 変換	195
8.3 z 変換の性質	197
8.4 z 変換を用いた差分方程式の解法	201
8.5 本章のポイント	203

9. 期 末 試 験

204

付 録	207
A.1 中間試験の解答	207
A.2 期末試験の解答	210
参 考 文 献	213
索 引	214

1 | 信号とシステム

本章では信号とシステムの基礎について述べる。まず、基本的な連続時間信号を紹介する。特に、重要な信号である正弦波信号について、その周期性や基本周期を中心に詳しく述べる。また、信号の分解、操作などを解説する。ついで、システムの基礎を与える。

1.1 信号の分類

図 1.1 は「あいうえお」と発声した音声を録音し、そのレベルを時間の関数として図示したものである。ここで、横軸は時間を表し、縦軸は音声のレベル（振幅）を表している。いま、時間を t とすると、音声レベルは関数の表記になって $f(t)$ と表現できる。この例における音声レベルのように、物理系の状態に関する情報をなんらかの方法で伝達する量を信号 (signal) という。

図 1.1 の時間と振幅（すなわち、横軸と縦軸）を連続量とするか離散量とするかによって、信号は 4 種類に分類することができ、それを表 1.1 にまとめる。ここで、時間をとびとびにすることを離散化 (discretization) といい、振幅を



図 1.1 信号の一例

表 1.1 信号の分類

	連続振幅	離散振幅
連続時間	連続時間信号	
	アナログ信号	多値信号
離散時間	離散時間信号	
	サンプル値信号	デジタル信号

とびとびにすることを量子化 (quantization) という。

まず、時間が連続量か離散量かにより、連続時間信号 (continuous-time signal) と離散時間信号 (discrete-time signal) に分類できる。さらに、連続時間信号はその振幅値が連続量か離散量かによってアナログ信号 (analog signal) と多値信号 (multi-level signal) に分類できる。われわれが通常取り扱う自然界に存在する信号の多くはアナログ信号である。一方、離散時間信号はサンプル値信号 (sampled signal) とデジタル信号 (digital signal) に分類できる。

例えば、アナログ信号を計測する場合、すべての時間におけるデータを収集することは困難であるし、むだでもあるため、通常、ある一定間隔 (これをサンプリング周期という) おきにデータを収集する。そのようにして得られたデータは、サンプル値信号になる。さらに、データを無限に高い精度で測定することはできないため、測定値の大きさの量子化も行わなくてはならない。したがって、本来アナログ信号であっても、われわれが処理する段階ではデジタル信号に変換されていることが多い。

本書の前半では連続時間信号について考える。そして、後半では離散時間信号について考える。なお、本書では量子化については考えず、振幅はすべて連続量とする。

つぎに、システム (system) とは、与えられた信号になんらかの処理を施すもののことであり、図 1.2 に示すように、入力信号 $x(t)$ を出力信号 $y(t)$ に写

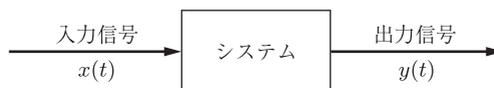


図 1.2 信号とシステム

像するものであると定義できる。このとき、入力信号と出力信号がともに連続時間信号であれば連続時間システム (continuous-time system) と呼ばれ、ともに離散時間信号であれば離散時間システム (discrete-time system) と呼ばれる。また、デジタルシステム (digital system) も同様に定義される。

1.2 基本的な連続時間信号

まず、基本的な連続時間信号である正弦波信号、インパルス信号などを紹介し、それぞれの性質について調べよう。

1.2.1 正弦波信号

正弦波信号 (sinusoidal signal) は次式で与えられる。

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t + \phi) \quad (1.1)$$

ただし、 t [s] は時間である。また、 A , ω_0 [rad/s], ϕ [rad] は、それぞれ正弦波の (最大) 振幅 (magnitude), 角周波数[†] (angular frequency), そして位相 (phase) である。本書では、 $\cos(\omega_0 t + \phi)$ と $\sin(\omega_0 t + \phi)$ を正弦波信号と総称する。また、角周波数 ω_0 と周波数 f_0 [Hz] の間には、つぎの関係式が成り立つ。

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \quad (1.2)$$

例題 1.1 次式で表される正弦波信号を図示せよ。

$$x(t) = \cos\left(314t + \frac{\pi}{4}\right)$$

【解答】 波形を図 1.3 に示す。

[†] ω_0 を単に周波数と呼ぶこともある。

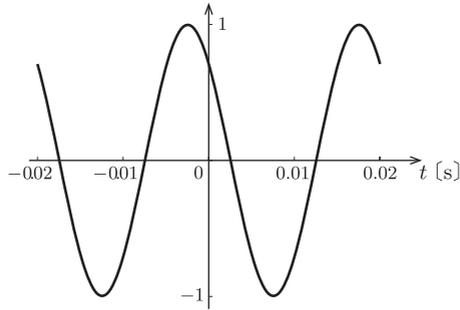


図 1.3

例題 1.2 つぎの波形を丁寧に描け。

- (1) $x_1(t) = \sin(\pi t)$
- (2) $x_2(t) = \cos\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

【解答】 波形を図 1.4 に示す。

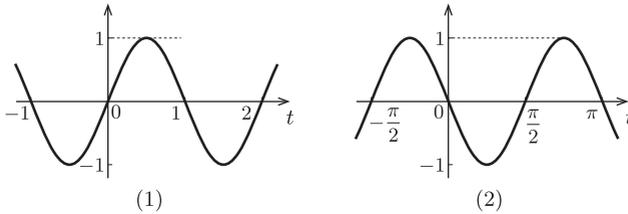


図 1.4

例題 1.3 つぎの波形を丁寧に描け。

- (1) $y_1(t) = 1 - \sin t$
- (2) $y_2(t) = \cos(\pi t)$
- (3) $y_3(t) = \sin\left(2t + \frac{\pi}{2}\right)$

【解答】 波形を図 1.5 に示す。

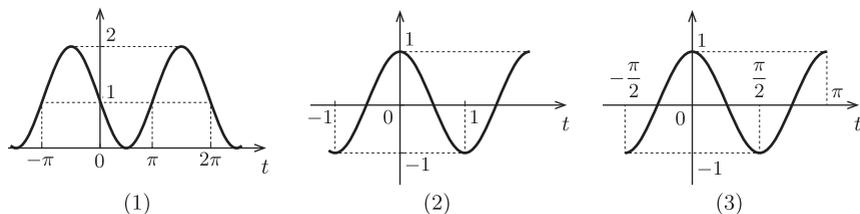


図 1.5

◇

正弦波信号の最大の特徴は、つぎに定義を与える周期性である。

【ポイント 1.1】 周期性 すべての t に対して

$$x(t) = x(t + T) \quad (1.3)$$

が成り立つような正数 T が存在するとき、信号 $x(t)$ は周期 T の周期信号と呼ばれる。また、式 (1.3) を満たす T は無数存在するが、その中で最も小さい正数 T_0 を基本周期という。また、基本周期に対応する ω_0 を基本角周波数 (fundamental angular frequency) という。

この定義より、式 (1.1) の正弦波信号は基本周期

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{1}{|f|} \quad (1.4)$$

を持つ周期信号である。ここで、 T_0 の単位は秒 [s] である。なお、本書では負の周波数も考えるために、 $|\omega_0|$ のように絶対値記号を使った。

1.2.2 複素指数信号

正弦波信号を一般化したものが、次式で与える複素指数信号 (complex exponential signal) $x(t)$ である。

$$x(t) = Ce^{at} \quad (1.5)$$

ただし、一般に C と a は複素数であり、これらが実数値をとるか複素数値をとるかにより、 $x(t)$ は異なる波形になる。

(1) C と a がともに実数の場合 この場合、 $x(t)$ は実指数信号と呼ばれる。さらに、 a の符号によって、図 1.6 に示すように増大実指数信号と減少実指数信号の二つに分類できる。

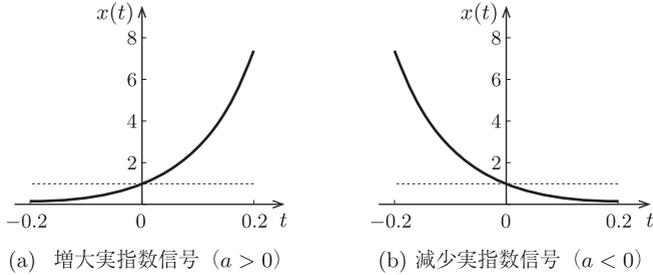


図 1.6 実指数信号

(2) a が純虚数の場合 つぎに、 a が純虚数の場合、すなわち

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \quad (1.6)$$

を考えよう。ただし、 $j = \sqrt{-1}$ は虚数単位である[†]。また、 $C = 1$ とおいた。複素数値をとる信号をイメージすることは難しいが、このような信号を定義すると、さまざまな利点がある。

まず、 $x(t)$ は時間 t の複素関数であり、その絶対値（振幅）と偏角（位相角）はそれぞれ次式で与えられる。

$$\text{絶対値: } |x(t)| = 1, \quad \forall t \quad (1.7)$$

$$\text{偏角: } \angle x(t) = \omega_0 t \quad (1.8)$$

したがって、 t をパラメータとして $x(t)$ を複素平面上に図示すると、図 1.7 のようになる。

図より明らかなように、 $x(t)$ の軌跡は半径 1 の円になる。ここで、この円を単位円 (unit circle) と呼ぶ。図において、 $t = 0$ のとき $x(t)$ は単位円上の点

[†] 数学では虚数単位を i で表記するが、特に電気工学では、 i は電流を表すことが多いので虚数単位を j と表記することが多く、本書でもそれを用いる。

索引

【あ】		
アナログ信号	2	片側指数信号 116
アナロジー	29	片側正弦波信号 116
安定条件	56	加法定理 32
安定性	56	関数空間 63, 147
【い】		【き】
位相	3, 158	奇信号 16
位相スベクトル	77, 182	基底 59
因果系列	186	ギブス現象 71
因果信号	56	基本角周波数 5
因果性	55	基本周期 5, 13, 160
インパルス応答	40, 43, 44, 173, 175, 176	基本波成分 66
インパルス関数	101	逆システム 57
インパルス列	94	逆フーリエ変換 84
【う】		逆ラプラス変換 114, 130
ウェーブレット解析	105	逆 z 変換 192
打ち切り誤差	71	共役対称性 97
【え】		極 130, 185
エネルギー	153	【く】
エネルギー密度スペクトル	85	偶奇分解 17, 170
【お】		偶信号 16
オイラーの関係式	8	矩形信号 12
大きさ	61	【け】
【か】		結合則 53
可逆	57	【こ】
角周波数	3, 158	交換則 53
重ね合わせの理	36	恒等システム 55
		固有角周波数 142
		【さ】
		最終値の定理 127, 200
		(最大) 振幅 3, 158
		差分方程式 201
		三角関数 32
		—の合成 35
		サンプル値信号 2
		【し】
		時間軸推移 21, 97, 124, 172
		—(時間遅れ) 197
		—(時間進み) 198
		時間軸スケーリング 20, 99, 125
		時間軸反転 199
		時間・周波数解析 105
		時間積分 102, 126
		時間遅延 98
		時間微分 102, 125
		時間領域 43
		システム 2
		実効値 148
		時不変性 175
		周期 5, 160
		周期信号 5, 160
		周期性 5, 160
		収束領域 185
		周波数 158
		周波数軸推移 99, 199
		周波数軸スケーリング 101
		周波数微分 103
		周波数領域 77
		初期値の定理 127, 200
		信号 1
		—の反転 20, 171
		信号空間 63

振動数	164	単位ステップ応答	179	パワー信号	150
振幅スペクトル	77, 182	単位ステップ信号	10, 115, 169	パワースペクトル	77, 182
【す】		単位ランプ信号	115, 169	半域展開	76
ステップ応答	43	【ち】		半角の公式	33
スペクトル	77, 80	調和解析	66	【ひ】	
【せ】		調和関係にある複素指数信号	9	非線形システム	37
正規直交関数系	62	直線位相特性	98	微分方程式	139
正規直交基底	59	直流成分	66	【ふ】	
正弦波信号	3, 158	直列接続	54	フーリエ	67
静的システム	55	直交	59	フーリエ級数	64-67, 77
絶対可積分	56	直交性	61	フーリエ係数	65, 77
絶対値総和可能	182	【て】		フーリエ正弦級数	68
絶対平均値	150	デジタルシステム	3	フーリエ変換	84, 123
零次ホールダ	120	デジタル信号	2	フーリエ変換対	84
零点	130, 185	テイラー級数	69	フーリエ余弦級数	68
線形結合	59, 60	テイラー級数展開	38	不確定性原理	101
線形システム	37	ディレクレの条件	68	複素指数信号	5, 161
線形シフト不変システム	176	電気回路	27	複素フーリエ級数	77
線形時不変システム	36	【と】		複素フーリエ係数	77
線形従属	60	動的システム	55	符号信号	13
線形性	97, 124, 197	等比級数の和	178	部分積分	72
線形独立	60	【な】		部分分数展開	130, 192
線スペクトル	93	内積	58, 61	ふるい特性	40, 175
【そ】		【に】		ブロック線図	53
双対性	101	ニュートンの運動方程式	26	分配則	54
測度	145	【の】		【へ】	
【た】		ノルム	59, 146	平均2乗誤差	71
第 n 次高調波成分	66	【は】		平面を張る	60
たたみ込み	176, 200	パーセバルの定理	82, 105, 153	並列接続	54
たたみ込み積分	43, 52, 104, 127	倍角の公式	33	べき級数展開	195
たたみ込み和	176	ハイゼンベルグの不確定性		【み】	
多値信号	2	原理	101	右側系列	185
単位インパルス関数	91	パワー	153	【む】	
単位インパルス信号	11, 115, 167, 168			むだ時間	98
単位円	6			【め】	
単位加速度信号	169			メジャー	145
単位サンプル	168				

	【φ】	ラプラス	123	離散スペクトル	80, 93
有界な入力	56	ラプラス変換	113, 123	留数	130
ユークリッド距離	146			量子化	2
ユークリッドノルム	146	【り】			
有限長系列	188	力学システム	26, 142	【れ】	
		離散化	1	連続時間システム	3
		離散時間システム	3	連続時間信号	2
		離散時間信号	2	連続時間複素指数信号	164
ライプニッツの公式	82	離散時間複素指数信号	166	連続スペクトル	86, 93

	【F】	\mathcal{L}_∞ ノルム	152	sinc 関数	87
FIR フィルタ	188			sup	154
	【I】	【R】			
inf	154	RC 回路	27	【Z】	
		RL 回路	143	z 変換	181, 197, 199
		rms	148, 150	z 変換対	182
	【L】	【S】		~~~~~	
LSI システム	176	s 平面	114	【数字】	
LTI システム	36, 55	s 領域	114	2 乗平均平方根	148, 150
\mathcal{L}_1 ノルム	152	—— での微分	127	3 倍角の公式	33
\mathcal{L}_2 ノルム	152	s 領域推移	125		

— 著者略歴 —

1981 年 慶應義塾大学工学部電気工学科卒業
1986 年 慶應義塾大学大学院博士課程修了(電気工学専攻)
工学博士(慶應義塾大学)
1986
～90 年 株式会社東芝勤務
1990 年 宇都宮大学助教授
2002 年 宇都宮大学教授
2006 年 慶應義塾大学教授
現在に至る

信号・システム理論の基礎

—フーリエ解析, ラプラス変換, z 変換を系統的に学ぶ—

Fundamentals of Signals and Systems

—Fourier Analysis, Laplace Transform and z-Transform—

© Shuichi Adachi 2014

2014 年 10 月 10 日 初版第 1 刷発行



検印省略

著者 あ だち しゅう いち
足 立 修 一
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-03214-7 (新宅) (製本:愛千製本所) G

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします