ま　え　が　き

1999 年 1 月にシステム制御工学シリーズの 1 冊として「信号とダイナミカルシステム」をコロナ社から発行してから，15 年の歳月が流れた。この本は，システム制御工学を学ぶ際に必要となる連続時間信号とダイナミカルシステムについて解説したものであり，それらを扱う上で重要な数学的な道具であるフーリエ解析とラプラス変換についても詳細に記述した。学部 3 年生で制御工学を学ぶことを前提とした学部 2 年生向けの教科書としてこの本を執筆した。

数年前，著者が勤務する慶應義塾大学理工学部物理情報工学科で，カリキュラムの改革を行った。その中で，フーリエ解析，ラプラス変換，z 変換をカバーする新しい応用数学の科目「物理情報数学 C」を新設し，著者が担当することになった。前著である「信号とダイナミカルシステム」を教科書として使用したが，この本は連続時間信号とシステムしか取り扱っておらず，離散時間を対象とする z 変換は含まれていなかった。そこで，フーリエ解析，ラプラス変換，z 変換を系統的に学ぶことができる新しい教科書として，前著の 1〜5 章を加筆修正し，さらに離散時間信号とシステム，z 変換の部分を書き加えたのが本書である。

従来は，フーリエ解析は数学の授業で，ラプラス変換は電気回路や制御工学の授業で，z 変換はディジタル信号処理の授業などで別々に講義されることが多かった。しかし，これらは非常に密接に関係しており，一つの講義科目の中で一貫して学ぶことが望ましい。そのため，近年，フーリエ変換とラプラス変換を解説した書籍が数多く出版されるようになっており，非常に平易に書かれたものから，数学的に高度なものまで多岐にわたっている。大学でもこのような授業科目が増えてきており，教科書のニーズが高まっているものと思われる。

本書の特徴を以下に列挙しよう。

(1) 数学者ではなく，工学者の立場，すなわち数学を利用する立場から，フーリエ解析，ラプラス変換，z 変換を解説している。

(2) 例題をできるだけ多く準備し，例題を解くことによって読者に力をつけてもらうことを目的としている。

(3) 連続時間であるフーリエ解析・ラプラス変換と，離散時間である z 変換を続けて学ぶことによって，連続時間（物理の世界）と離散時間（情報の世界）の垣根をできるだけ低くすることを目指している。

以下，これらの特徴について少し詳しく述べたい。最初に，著者は数学者ではないので，本書は数学的に厳密でないところが多々あることをお詫びしておきたい。フーリエ解析，ラプラス変換，z 変換は，さまざまな工学分野で利用できる素晴らしい数学的な道具である。本書でそのことを理解した後，より高みを目指す読者は，数学的に厳密な本を探して勉強していただきたい。

つぎに，理工学書を和書と洋書とで比べるといろいろな面で差があるが，最も大きな差は，洋書のほうが例題や演習問題が圧倒的に多いということだろう。いろいろな電子機器が発達してどんなに便利になっていっても，理工系の基礎の習得には，紙と鉛筆を使って問題を何度も解くこと以外にないと著者は信じている。表面的に理解し，わかったつもりになっていても，それを書くことによって頭と体に定着させる作業を行わないと，せっかく勉強したことが短期記憶で終わってしまい，身につかない。そのために，本書では限られたページ数の範囲で例題をたくさん盛り込んだ。また，2 単位の通常の授業を想定して，問題を集中的に解くことを目的とした二つの章「中間試験」と「期末試験」を設けたことも本書の特徴である。

物理現象を扱う分野では連続時間信号（関数）とシステムが対象であり，情報を扱う分野では離散時間（ディジタル）信号とシステムが対象である。これは，物理と情報の本質的な相違点の一つである。そのため，「物理と情報の融合」が科学の世界における現在の最重要課題の一つになっている。われわれの学科である「物理情報工学科」は，まさにこの物理と情報の融合を目的としており，その目的のもと，2 年生秋学期にフーリエ解析，ラプラス変換，z 変換を

学ぶことには大きな意義があると思っている。これが 3 番目の特徴である。

フーリエ解析，ラプラス変換，z 変換という数学の基礎を学ぶことは時として退屈な作業かもしれないが，本書によってこれらの基礎を習得すれば，読者は強力な数学的な道具を手に入れることになるだろう。そして，引き続き学習するであろう「制御工学」，「ディジタル信号処理」などの理解の大きな助けになると著者は信じている。

著者の浅学のために，本書の内容には誤りがあるかもしれない。そのときには厳しくご指導いただければ幸いである。

最後に，新科目「物理情報数学 C」がスタートした 2011 年度に，この授業の TA（teaching assistant）として演習問題の解答の作成などにご協力いただいた川口貴弘君と石川健太郎君（当時，足立研究室修士課程在学）と，問題解答のチェックをしていただいた足立研究室の他の学生に感謝します。授業を共同で担当していただいている田中敏幸教授には，中間試験・期末試験の問題作成などでたいへんお世話になり，また，本書の原稿を注意深く読んでいただき有益なご指摘をいただいた。ここに深く感謝します。最後に，本書の発行に際してさまざまな点でお世話になったコロナ社に感謝します。

2014 年 8 月

足立修一

目　　次

1.　信号とシステム

2.　線形時不変システム

3. フーリエ解析

4. 中　間　試　験

5. ラプラス変換

6. 信号のノルム

7. 離散時間信号とシステム

8. z 変 換

9. 期 末 試 験

1 信号とシステム

本章では信号とシステムの基礎について述べる。まず，基本的な連続時間信号を紹介する。特に，重要な信号である正弦波信号について，その周期性や基本周期を中心に詳しく述べる。また，信号の分解，操作などを解説する。ついで，システムの基礎を与える。

1.1 信号の分類

図 1.1 は「あいうえお」と発声した音声を録音し，そのレベルを時間の関数として図示したものである。ここで，横軸は時間を表し，縦軸は音声のレベル（振幅）を表している。いま，時間を t とすると，音声レベルは関数の表記にならって $f(t)$ と表現できる。この例における音声レベルのように，物理系の状態に関する情報をなんらかの方法で伝達する量を**信号**（signal）という。

図 1.1 の時間と振幅（すなわち，横軸と縦軸）を連続量とするか離散量とするかによって，信号は 4 種類に分類することができ，それを**表 1.1** にまとめる。ここで，時間をとびとびにすることを**離散化**（discretization）といい，振幅を

図 1.1 信号の一例

表 1.1　信号の分類

<table>
<tr><th></th><th>連続振幅</th><th>離散振幅</th></tr>
<tr><td rowspan="2">連続時間</td><td colspan="2">連続時間信号</td></tr>
<tr><td>アナログ信号</td><td>多値信号</td></tr>
<tr><td rowspan="2">離散時間</td><td colspan="2">離散時間信号</td></tr>
<tr><td>サンプル値信号</td><td>ディジタル信号</td></tr>
</table>

とびとびにすることを**量子化**（quantization）という。

まず，時間が連続量か離散量かにより，**連続時間信号**（continuous-time signal）と**離散時間信号**（discrete-time signal）に分類できる。さらに，連続時間信号はその振幅値が連続量か離散量かによって**アナログ信号**（analog signal）と**多値信号**（multi-level signal）に分類できる。われわれが通常取り扱う自然界に存在する信号の多くはアナログ信号である。一方，離散時間信号は**サンプル値信号**（sampled signal）と**ディジタル信号**（digital signal）に分類できる。

例えば，アナログ信号を計測する場合，すべての時間におけるデータを収集することは困難であるし，むだでもあるため，通常，ある一定間隔（これをサンプリング周期という）おきにデータを収集する。そのようにして得られたデータは，サンプル値信号になる。さらに，データを無限に高い精度で測定することはできないため，測定値の大きさの量子化も行わなくてはならない。したがって，本来アナログ信号であっても，われわれが処理する段階ではディジタル信号に変換されている場合が多い。

本書の前半では連続時間信号について考える。そして，後半では離散時間信号について考える。なお，本書では量子化については考えず，振幅はすべて連続量とする。

つぎに，**システム**（system）とは，与えられた信号になんらかの処理を施すもののことであり，**図 1.2** に示すように，入力信号 $x(t)$ を出力信号 $y(t)$ に写

図 1.2　信号とシステム

像するものであると定義できる。このとき，入力信号と出力信号がともに連続時間信号であれば**連続時間システム**（continuous-time system）と呼ばれ，ともに離散時間信号であれば**離散時間システム**（discrete-time system）と呼ばれる。また，**ディジタルシステム**（digital system）も同様に定義される。

1.2　基本的な連続時間信号

まず，基本的な連続時間信号である正弦波信号，インパルス信号などを紹介し，それぞれの性質について調べよう。

1.2.1　正 弦 波 信 号

正弦波信号（sinusoidal signal）は次式で与えられる。

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \tag{1.1}$$

ただし，t〔s〕は時間である。また，A，ω_0〔rad/s〕，ϕ〔rad〕は，それぞれ正弦波の（**最大**）**振幅**（magnitude），**角周波数**[†]（angular frequency），そして**位相**（phase）である。本書では，$\cos(\omega_0 t + \phi)$ と $\sin(\omega_0 t + \phi)$ を正弦波信号と総称する。また，角周波数 ω_0 と周波数 f_0〔Hz〕の間には，つぎの関係式が成り立つ。

$$\omega_0 = 2\pi f_0 \tag{1.2}$$

例題 1.1　次式で表される正弦波信号を図示せよ。

$$x(t) = \cos\left(314\,t + \frac{\pi}{4}\right)$$

【解答】　波形を図 **1.3** に示す。

† ω_0 を単に周波数と呼ぶこともある。

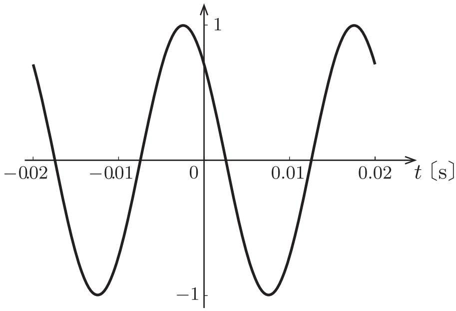


図 1.3

例題 1.2　つぎの波形を丁寧に描け。

(1)　$x_1(t) = \sin(\pi t)$

(2)　$x_2(t) = \cos\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

【解答】　波形を図 **1.4** に示す。

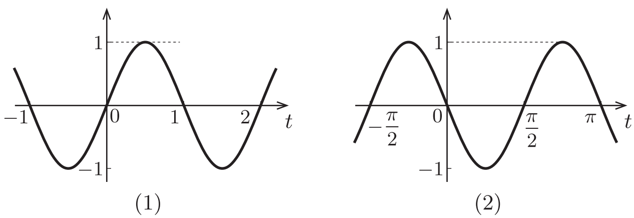


図 1.4

例題 1.3　つぎの波形を丁寧に描け。

(1)　$y_1(t) = 1 - \sin t$

(2)　$y_2(t) = \cos(\pi t)$

(3)　$y_3(t) = \sin\left(2t + \dfrac{\pi}{2}\right)$

【解答】　波形を図 **1.5** に示す。

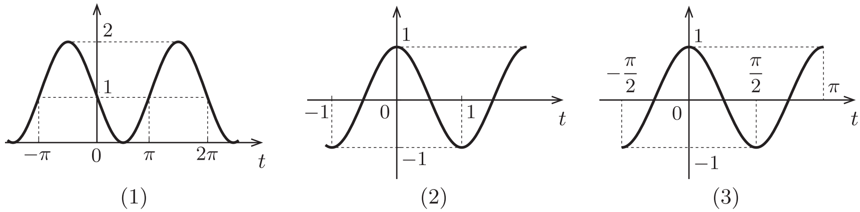


図 1.5

◇

正弦波信号の最大の特徴は，つぎに定義を与える周期性である。

【ポイント 1.1】周期性　すべての t に対して

$$x(t) = x(t + T) \tag{1.3}$$

が成り立つような正数 T が存在するとき，信号 $x(t)$ は**周期** T の**周期信号**と呼ばれる。また，式 (1.3) を満たす T は無数存在するが，その中で最も小さい正数 T_0 を**基本周期**という。また，基本周期に対応する ω_0 を**基本角周波数**（fundamental angular frequency）という。

この定義より，式 (1.1) の正弦波信号は基本周期

$$T_0 = \frac{2\pi}{|\omega_0|} = \frac{1}{|f|} \tag{1.4}$$

を持つ周期信号である。ここで，T_0 の単位は秒〔s〕である。なお，本書では負の周波数も考えるために，$|\omega_0|$ のように絶対値記号を使った。

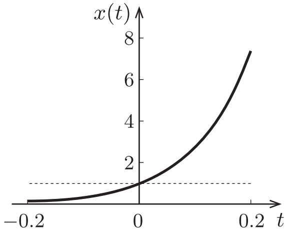
1.2.2　複素指数信号

正弦波信号を一般化したものが，次式で与える**複素指数信号**（complex exponential signal）$x(t)$ である。

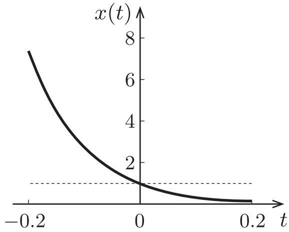
$$x(t) = Ce^{at} \tag{1.5}$$

ただし，一般に C と a は複素数であり，これらが実数値をとるか複素数値をとるかにより，$x(t)$ は異なる波形になる。

（1）$\boldsymbol{C}$ と $\boldsymbol{a}$ がともに実数の場合　この場合，$x(t)$ は実指数信号と呼ばれる。さらに，a の符号によって，**図 1.6** に示すように増大実指数信号と減少実指数信号の二つに分類できる。



(a)　増大実指数信号（$a > 0$）



(b) 減少実指数信号（$a < 0$）

図 1.6　実指数信号

（2）$\boldsymbol{a}$ が純虚数の場合　つぎに，a が純虚数の場合，すなわち

$$x(t) = e^{j\omega_0 t} \tag{1.6}$$

を考えよう。ただし，$j = \sqrt{-1}$ は虚数単位である†。また，$C = 1$ とおいた。複素数値をとる信号をイメージすることは難しいが，このような信号を定義すると，さまざまな利点がある。

まず，$x(t)$ は時間 t の複素関数であり，その絶対値（振幅）と偏角（位相角）はそれぞれ次式で与えられる。

絶対値：　$|x(t)| = 1, \ \forall t$　　(1.7)

偏　角：　$\angle x(t) = \omega_0 t$　　(1.8)

したがって，t をパラメータとして $x(t)$ を複素平面上に図示すると，**図 1.7** のようになる。

図より明らかなように，$x(t)$ の軌跡は半径 1 の円になる。ここで，この円を**単位円**（unit circle）と呼ぶ。図において，$t = 0$ のとき $x(t)$ は単位円上の点

† 数学では虚数単位を i で表記するが，特に電気工学では，i は電流を表すことが多いので虚数単位を j と表記することが多く，本書でもそれを用いる。

索　　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1981 年　慶應義塾大学工学部電気工学科卒業
1986 年　慶應義塾大学大学院博士課程修了（電気工学専攻）
　　　　工学博士（慶應義塾大学）
1986
～90 年　株式会社東芝勤務
1990 年　宇都宮大学助教授
2002 年　宇都宮大学教授
2006 年　慶應義塾大学教授
　　　　現在に至る

信号・システム理論の基礎
—フーリエ解析，ラプラス変換，z 変換を系統的に学ぶ—
Fundamentals of Signals and Systems
——Fourier Analysis, Laplace Transform and z-Transform——

2014 年 10 月 10 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　足立修一（あだち しゅういち）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話（03）3941–3131（代）
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03214–7　（新宅）　（製本：愛千製本所）G
Printed in Japan