数理パズルで楽しく学べる
論理学

藤田　憲悦 著

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

数理パズルを楽しみながら論理学を学ぶ。重きを置いたポイントはつぎの 2 点である。

1. 数理パズルの例を通して，文や対象の**記号化**（形式化）の大切さを理解する。
2. 記号化された例を通して，論理の**構文論的側面**（推論規則，証明論）と**意味論的側面**（真理値，構造，モデル）を理解する。

記号を使って物事を表現することは曖昧さを排除した記述のために大切であり，プログラミングにも必要な能力である。記号化の作業は単純に見えるが記号化される対象の本質をつかむ作業である。文章に限らず物事がいったん記号化されると，元の**意図**を忘れて記号の世界に持ち込むことができる。そして，計算機を活用して自動処理や高速な計算が可能になる。論理の構文論的側面とは，このような機械的な**計算・推論**（**証明論**）を意味している。一方，意味論的側面とは記号の**解釈**およびその意図や**真偽の値**（**意味論・モデル**）に関することである。この二つの側面の違いと関係を理解することが目標である。これら二つの側面は，情報社会では例えば検証の分野，特に数理的・形式的技法で活用されている。それらは，**モデル検査技法**（**様相・時相論理**）と**アルゴリズムの検証**（**ホーア論理**）の応用例として知られている。

対象読者とそのレベルは，情報系および文系を含む関連分野の学部学生を念頭に置いた。そのために，一つずつ順を追って概念や定義をゆっくりと説明していった。また，証明も可能な限り省略しなかった。

最初に日常的推論で考察可能なパズルを導入した。まず本書のねらいをここで説明した。そして，スマリヤンによる「正直者と嘘つきのパズル」がある。記号を使ってこのパズルを表現し分析していった。重きを置いたことは，**記号化が妥当**であることの説明である。これは真偽の意味論に基づいて与えられる。

そして，大切な点は，パズルの答えを見つけるためにまったく異なる二つの手法（**証明論的手法**と**意味論的手法**）があるということである。最終的にはブーロスの「最強の論理パズル」にも挑戦して論理式を活用した記号化法は興味深いことを見ていく。また，計算機科学や数学でよく登場する概念についても記号を使って述べていった。このように，記号化の題材として多くの数理パズルを引用した。これは普通の教科書と大きく異なる点である。出発点から目的点に行くのに，グーグル検索やダイクストラのアルゴリズムなどを使って最短経路や最適パスを通るのではなく，それとは対極的な戦略である「最長片道切符」流の進み方のように思われる†。

そしてつぎに，論理の構文論的側面・意味論的側面の話題につなげる。構文論では形式的体系として，シーケント計算，ヒルベルトの体系，自然演繹の体系，タブロー法などさまざまな体系が知られている。ここでは，日常行う論理的推論を素直に反映した**ゲンツェンの自然な論理計算**（**自然演繹法**）の考え方に従って，直観主義論理や古典論理における論理的推論の形式化（**NJ**，**NK**）を紹介する。その理由は，日常的推論でも十分に活用できるからである。グローバル化された社会における教育でしばしば重要視される点は

1. コミュニケーション能力
2. 協調性
3. クリティカルシンキング

である。ここで，自然演繹法の証明をすることは，特に 3 の訓練につながると考えられる。あることを仮定するとなにが導かれるか。そしてその論理的筋道・説明はいかなるものか。また，別の状況ではなにが可能かなどを理路整然と述べることができる。ここでの証明の過程は**証明図**と呼ばれる図で表現されるので，仮定から結論に至る推論の流れが読み取りやすい。さらに，この図も**ラムダ計算の式**によって形式化可能となり，証明図の簡約（変形）はラムダ式の計算で扱うことができる。この話題は，カリー・ハワード同型の 4.3 節で扱う。

† 宮脇俊三：最長片道切符の旅（新潮社）に北海道から九州まで重複しない最長経路の旅行の話がある。本書においては最長でもなく話題の重複（復習）もあるが，数理パズルを楽しみながら記号化・形式化の例を通して論理を学ぼうという意図がある。

このように形式化は大切であるが，対象が込み入ってくると記号化が容易とは限らない。しかし，この困難さを逆手にとると，物事の内容を整理して深く理解する（本質をつかむ）ための方法として記号化が使えるということである。これは，一長一短である。論理式，プログラミング言語，定理証明システムなどの形式言語を使って教科書などに書かれている内容，物事の性質，振る舞いを記述することはまさに検証技術の一つの利用法である。このような記号化に重点を置いたが，記号化のためにはなにが重要であろうか？ 自然言語で物事の性質，振る舞いをキチンと説明・記述することである。それなくしては，形式化も考えられない。いったん記号化されると，元の意図を忘れても正しく推論可能な体系はすでに準備されているので，中身のよく知らないことが簡単に記号化できてしまっては虫がよすぎる。この作業の過程で，定義の曖昧さや場合分けの欠如などが発見されることもある。記号化の先には先人たちの叡智に満ちた論理の世界が広がっている。さらに，記号化は形式論理に限らずほかの分野の領域にも転用可能な基本スキルである。そこでは，**形式化の妥当性**を確認する必要がある。

本書では，論理の構文論的側面と意味論的側面を明確に区別する立場で，記号化・論理の学習から出発した。その流れは，**ゲーデルの完全性定理**にて合流する。それは，恒真性（トートロジーである性質）と形式的体系の証明可能性との関係であり，つぎの二つの性質がポイントになる。

- **性質 1**：推論規則によって**恒真性は保存**されている。
- **性質 2**：**推論規則の逆操作**（**分解**）によっても恒真性は保存されている[†]。

性質 1 から，恒真な式から証明できる式は恒真な式だけであることがわかる。性質 2 から，恒真ではない性質は推論規則によって伝播することがわかる。これは，恒真ではない式に対する**反例の生成**につながる。

本書で扱っているトピックスはつぎの五つに分類される。階段を一段ずつ登るように話を進めたので，それぞれ独立に読むこともできる。ただし，数理パ

† 形式的体系としては自然演繹の体系（NK）を採用するが，完全性の証明ではシーケント計算を活用した**シュッテの分解法**（Von Kurt Schütte，1954）を利用する。命題論理の分解法は**ワンのアルゴリズム**（Hao Wang，1960）とも呼ばれている。

ズルと記号化については，**真理値表**の定義と基本的な**推論規則**の使い方を仮定している。もし必要ならば，命題論理（2.4 節）と述語論理（3.3 節）における定義を先読みしてもよい。

- **数理パズルと記号化について**

  $\boxed{\text{2.1 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.2 節}} \longrightarrow \boxed{\text{3.1 節}}$
- **ブール代数とブール関数について**

  $\boxed{\text{2.5 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.6 節}}$
- **命題論理について**

  $\boxed{\text{2.1 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.3 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.4 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.5 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.6 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.7 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.8 節}} \longrightarrow \boxed{\text{2.2 節}}$
- **述語論理について**

  $\boxed{\text{2.1 節}} \longrightarrow \boxed{\text{3.2 節}} \longrightarrow \boxed{\text{3.3 節}} \longrightarrow \boxed{\text{3.4 節}} \longrightarrow \boxed{\text{3.1 節}}$
- **カリー・ハワード同型について**

  $\boxed{\text{2.7 節}} \longrightarrow \boxed{\text{3.3 節}} \longrightarrow \boxed{\text{4.1 節}} \longrightarrow \boxed{\text{4.2 節}} \longrightarrow \boxed{\text{4.3 節}}$

1 章は準備運動の章であり，基本的な言葉を説明した。3.1 節でも復習するが，必要なときに復習すればよい。2.1 節では本書の二つのポイントを日常的な推論の例で説明した。また，可能な限り図などを使った説明や証明などを加えた。証明は定義の言い換えや論理式・証明の構成（長さ）に関する帰納法を使うことが多いので，場合分けを丁寧に調べれば確認できる。

本書のつぎのステップの重要なテーマとしては，記号化の限界に関して，不完全性定理，記号化による表現能力などさまざまな話題がある。

本書の執筆・出版のためコロナ社の皆様にお世話になった。心より感謝申し上げる。

2022 年 1 月

藤田憲悦

目　　　次

1. 準　　　備

2. 命 題 論 理

3. 述　語　論　理

4.　証明の形式化とラムダ計算

1章　準　　　備

言葉づかいについて：集合，順序と同値関係，写像と関数

いくつかのものをひとまとめにしたものの集まりを**集合**と呼ぶ†。そして，その中に属しているかいないかが定まっているものの集まりとする。集合を構成するものとしては，数，関数，集合などさまざまなものがあるが，集合に属しているものを集合の**要素**または**元**という。自然数の要素を列挙して，例えば，つぎのように自然数の集合を書くことができる（集合の**外延的記法**）。

$$\{\ \},\ \{1\},\ \{1,2\},\ \{1,2,3\},\ \cdots$$

特に，$\{\ \}$ は要素を一つも含まない集合（空集合）であり，$\emptyset$ とも書く。以降，集合は，$A, B, X, Y, \cdots$ などの大文字で表し，集合を構成しうるものを $a, b, x, y, \cdots$ などの小文字で表すことが多い。そして，a が集合 A の要素である（集合 A に a が属している）ことを

$$a \in A$$

と書き，a が A の要素ではない（$a \in A$ の否定の）ことを

$$a \notin A$$

と書く。ここで，$a \in A$ または $a \notin A$ のどちらか一方が成立している。例えば，

† 使う言葉についてきちんと述べるには，そもそも述語論理と基本的な関係 $\in$，$=$ が必要である。このことは，3 章で復習することにする。

つぎの名前が付いている数の集合はしばしば登場する。

- 自然数全体の集合 $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$
- 整数全体の集合 $\mathbb{Z}$
- 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$
- 実数全体の集合 $\mathbb{R}$

集合 A の要素がすべて集合 B の要素でもあるとき，A は B の**部分集合**であるといい

$$A \subseteq B$$

と書く。すなわち，任意のもの x について，$x \in A$ ならば $x \in B$ である。特に，空集合は，任意の集合の部分集合（$\emptyset \subseteq A$）とする。

集合 A，B が等しいとは，A，B が同じ要素から構成されていることと定義して，$A = B$ と書く[†1]。つまり，どのような x をとってきても，$x \in A$ であるならば $x \in B$ であり，かつ $x \in B$ であるならば $x \in A$ でもある。これらの定義から，$A = B$ である必要十分条件[†2]は

$$A \subseteq B \text{ かつ } B \subseteq A$$

である。このことを，記号 $\Longleftrightarrow$ を使って

$$A = B \iff A \subseteq B, B \subseteq A$$

で表す[†3]。これらのことから，例えばつぎの三つの集合は等しいことがわかる。

$$\{0, 1, 2\} = \{0, 1, 1, 0, 2, 2, 2, 0\} = \{2, 1, 0\}$$

これまでの定義から，部分集合という集合に関する関係 $\subseteq$ はつぎの性質を満たしている。

[†1] 集合論では，これは**外延性の公理**と呼ばれる。
[†2] 同等であるための条件のこと。
[†3] 慣例でカンマ「,」は「かつ」を意味している。後で登場する**シーケント計算**のカンマは，出現位置でその意味が変わる。

- **性質 1（反射律）**：$A \subseteq A$
- **性質 2（推移律）**：$A \subseteq B, B \subseteq C$ ならば $A \subseteq C$
- **性質 3（反対称律）**：$A \subseteq B, B \subseteq A$ ならば $A = B$

このような反射的，推移的かつ反対称的な二項関係[†1]を**順序**という。順序のために記号「$\subseteq$」「$\leqq$」などを使うことがある。例えば，$0 \leqq n$ である自然数 n に対して，有限個の集合を $N_n := \{1, 2, \cdots, n\}$ とする。ここで記号「$:=$」は，この記号の左辺を右辺で定義することを意味している。集合の要素の個数を $|N_n|$ と書くことにする[†2]。いまの例では，$N_n \subseteq N_{n+1}$ であり，自然数の順序について $|N_n| = n \leqq n + 1 = |N_{n+1}|$ となっている。集合 X とその上の順序 $\leqq$ において，X の要素 a が存在して，どんな $x \in X$ に対しても $x \leqq a$ となるとき，a を X の最大元といい，$\max X$ と表す。同様に，要素 $b \in X$ が存在して，どんな $x \in X$ に対しても $b \leqq x$ となるとき，b を X の最小元といい，$\min X$ と表す。

一方，つぎのように反射的，推移的かつ対称的な二項関係を**同値関係**という（つまり，等しいという関係のことである）。同値関係のために記号「$=$」「$\sim$」などを使うことがある。

- **性質 1（反射律）**：$A = A$
- **性質 2（推移律）**：$A = B, B = C$ ならば $A = C$
- **性質 3（対称律）**：$A = B$ ならば $B = A$

A と B が等しくないこと（つまり，$A = B$ の否定）を $A \neq B$ と書く。

集合 A，B が与えられたときに，二つの集合の要素をすべて集めて得られた集合を A，B の**和集合**といい，$A \cup B$ と書く。すなわち

$$A \cup B := \{x \mid x \in A \text{ または } x \in B\}$$

と定義される（**内包的記法**）。

[†1] 二項関係は，二つの与えられた集合の要素間に定義されるものである。関係は，一般的には，すぐ後で導入される直積集合の部分集合として定義される。

[†2] $N_0 := \emptyset$，$|N_0| := 0$ とする。有限集合 A の要素の個数 $|A| = n$ については，間もなく約束するが，A の各要素と N_n の各要素がとりこぼしなく 1 対 1 に対応していることを写像（全単射）を使って数えることにする。

また，二つの集合 A，B があるときに，両方に共通な要素の集合を A，B の**積集合**といい，$A \cap B$ で表す。すなわち

$$A \cap B := \{x \mid x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

である。和集合と積集合は，同値関係のもとで部分集合とつぎのように対応付けられる。

$$A \cap B = A \iff A \subseteq B \iff B = A \cup B$$

和集合と積集合について，つぎの性質が成り立っている。

- **性質 1**：$A \subseteq A \cup B$，$B \subseteq A \cup B$
- **性質 2**：$A \subseteq C$ かつ $B \subseteq C$ ならば $A \cup B \subseteq C$
- **性質 3**：$A \cap B \subseteq A$，$A \cap B \subseteq B$
- **性質 4**：$C \subseteq A$ かつ $C \subseteq B$ ならば $C \subseteq A \cap B$

和集合 $A \cup B$ は，性質 1，2 より，A，B の両方を部分集合とする集合のうちで順序 $\subseteq$ に関して最小の集合であることがわかる。また，性質 3，4 より，積集合 $A \cap B$ は，A，B の両方の部分集合のうち $\subseteq$ に関して最大の集合となっている。

さらに，つぎの性質も成り立っている。

- **性質 1**：$A \cup \emptyset = A = \emptyset \cup A$, $A \cap \emptyset = \emptyset = \emptyset \cap A$
- **性質 2**（べき等律）：$A \cup A = A = A \cap A$
- **性質 3**（交換律）：$A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$
- **性質 4**（結合律）：
  $$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C,\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$
- **性質 5**（分配律）：
  $$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C),\ (A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$$
- **性質 6**（吸収律）：$(A \cup B) \cap A = A = A \cup (A \cap B)$

分配律†の成立はつぎのようにわかる。

† 分配律の形式的な証明は 2 章で扱う。

$$
\begin{aligned}
x \in (A \cup B) \cap C &\iff x \in A \cup B \ \ \text{かつ} \ \ x \in C \\
&\iff (x \in A \ \ \text{または} \ \ x \in B) \ \ \text{かつ} \ \ x \in C \\
&\iff (x \in A \ \ \text{かつ} \ \ x \in C) \ \ \text{または} \ \ (x \in B \ \ \text{かつ} \ \ x \in C) \\
&\iff (x \in A \cap C) \ \ \text{または} \ \ (x \in B \cap C) \\
&\iff x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)
\end{aligned}
$$

また，吸収律の成立は，つぎの必要十分条件からわかる。

$$A \cap (A \cup B) = A \iff A \subseteq A \cup B$$

集合 A の部分集合全体を要素とする集合を $\mathcal{P}(A)$ と書き，A のべき集合という。すなわち

$$X \subseteq A \iff X \in \mathcal{P}(A)$$

である。例えば

$$\mathcal{P}(\{0,1,2\}) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{1,2\}, \{2,0\}, \{0,1,2\}\}$$

である[†]。特に，空集合については，$\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$ である。

ある特定の集合 U が与えられていて，その部分集合についてのみ考えるときに，U を全体集合（または普遍集合）という。全体集合を U として，部分集合 $A \subseteq U$ の U に対する**補集合**を

$$\{x \mid x \notin A \ \ \text{かつ} \ \ x \in U\}$$

で定義して，A^c または $(U - A)$ と書く。すなわち

$$x \in A^c \iff x \notin A, x \in U$$

のことである。また，否定をとると，つぎの通りである。

[†] 有限集合 A の要素の個数を $|A| = n$ とすると，$|\mathcal{P}(A)| = 2^n$ となっている。特に，$|\mathcal{P}(\emptyset)| = |\{\emptyset\}| = 1$ である。

索　　引

―― 著 者 略 歴 ――

1984年　東北大学工学部電子工学科卒業
1986年　東北大学大学院博士前期課程修了（電子工学専攻）
1990年　東北大学大学院博士後期課程単位取得退学（情報工学専攻）
　　　　工学博士
2004年　群馬大学助教授
2007年　群馬大学准教授
　　　　現在に至る

数理パズルで楽しく学べる論理学
Logical Labyrinths and Mathematical Logic　　ⓒ Ken-etsu Fujita 2022

2022 年 3 月 25 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者　藤(ふじ)　田(た)　憲(けん)　悦(えつ)
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–02923–9　C3055　Printed in Japan　（谷口）