すぐわかる

応用計画数学

工 学 博 士　秋山　孝正　編著

博士（工学）　奥嶋　政嗣

博士（工学）　武藤　慎一　共著

博士（工学）　井ノ口弘昭

コ ロ ナ 社

ま　え　が　き

大学教育課程は，学部・学科に対応した特定専門分野の知識を学習するところであり，教科書には特定分野の高度な知識が記載されるというプロトタイプは，高度情報化・多様化した社会システムを考えるうえで有益であろうか。むしろ，現代社会のシステムは複雑であり，特定分野の知識だけで問題を解決できることは稀なのではないかと考えている。

そもそも，私たちは，他分野の学習をしたからといって，研究分野が異なるので，やめたほうがよいと咎められるようなことはないはずである。むしろ，社会システムをいくつもの分野の知識からとらえることができる能力を学ぶことは，応用的価値を向上させることにつながるのではないかと考える。

これまで，特定の研究分野に限定せず，計画数学の基礎知識をわかりやすく整理した『すぐわかる計画数学』（コロナ社，1998 年）が出版され，社会システムの計画における数理的解析の理解に大きな役割を果たしてきた。

上記の書籍の共編著者である故 上田孝行先生（元・東京大学教授）は，土木計画学と経済学を統合した土木経済学を計画の基礎科目として構成することを提唱されていた。すなわち，数理的モデルの基礎を踏まえて，経済分析の技術論を社会システムに応用しようとする試みであると思う。

研究分野が異なると，同じ内容でも用語も相違することがある。例えば，社会システムにおける意思決定者は，プレーヤーとも消費者ともいわれる。分析の出発点の用語が相違すると，異なる理論体系のように思われる。しかしながら，経済分析モデルの意思決定と，数理計画モデルの意思決定は形式は異なるが，同一の行動帰結を与えている場合がある。すなわち，社会システムの問題には，数理的解釈と経済学的解釈が同時に存在している場合が多数見られる。この計画問題における多面的な理解は基礎技術の応用力を与えるものである。

本書では，計画数学の基本的知識を社会システム計画に応用するための方法を整理している。このため，応用的な数理計画として組合せ最適化問題と社会的意思決定のためのゲーム理論について講義する。つぎに，社会システムの解析に関して，基礎的な経済理論を学習する。さらに，計画プロジェクトの評価では応用的な経済分析手法を学習する。また応用的な意味から，現実の社会システムとして都市交通システムの解析方法について学習する。したがって，本書は，社会システム計画の応用的解析技術と現実的な問題解決法の理解を目的としている。

基礎理論を論述した前書の出版から多数の年月を経て，近年では情報機器の利用が日常的となっている。そのため数理的な教科書について体系的理論を記載するだけでは現実の問題解決には不十分なので，本書では，パソコンを用いて，計算技術を実際に利用するための演習問題を掲載することにした。

本書の内容は，関西大学環境都市工学部の学部講義において，学生諸氏の理解を踏まえたうえで改良を重ねてきたものである。本書が計画分野における応用技術の習得を志す諸氏の理解を高めることを期待している。

本書の企画から出版まで，ご協力をいただいたコロナ社の皆様に感謝の意を表する次第である。

2017 年 10 月

編著者　秋山　孝正

目　　　　次

1. 社会的意思決定とゲーム理論

2. 社会システムの経済分析

3. プロジェクト評価手法

4. 都市交通の経済分析

執 筆 分 担

秋山　孝正（関西大学）　1 章，2 章，4 章
奥嶋　政嗣（徳島大学）　4.1 節
武藤　慎一（山梨大学）　3 章
井ノ口弘昭（関西大学）　演習問題

（所属は 2017 年 12 月現在）

1 社会的意思決定とゲーム理論

本章では，社会的意思決定の問題を取り扱う。特に社会システムの意思決定者が単独の主体であるときには，いわゆる数理計画の問題として解くことができる。なお，連続変数を用いた一般の数理計画問題については，関連書籍に紹介されているので[1)†]，ここでは離散的な数による数理計画問題について述べる。一方で，社会システムの中には，多数の意思決定者が参加する計画問題もある。この場合にはゲーム理論の考え方が必要になる。本章では，これらを順に説明する。

1.1 組合せ最適化問題

1.1.1 数理計画問題

単独の主体に関する社会システムの意思決定問題を整理するため，数理計画問題の基本的手法の要点について述べる。

数理計画問題は，一般的には目的関数といくつかの制約条件で定式化できる。例えば，つぎのような問題を考えよう。

$$\begin{cases} \max\ z = 5x_1 + 3x_2 \\ \text{s.t.} \quad x_1 + x_2 \leqq 8 \\ \qquad 2x_1 + x_2 \leqq 12 \\ \qquad\qquad x_2 \leqq 6 \\ \qquad x_1 \geqq 0, \quad x_2 \geqq 0 \end{cases} \tag{1.1}$$

† 肩付き数字は，巻末の引用・参考文献を表す。

この問題は，目的関数・制約条件がすべて線形関数で書かれており，**線形計画問題**（linear programming problem，**LP**）といわれる。したがって，シンプレックス法などの方法で解が得られる。一方で，目的関数・制約条件に非線形関数が含まれる場合には，**非線形計画問題**（nonlinear programming problem，**NLP**）となり，Kuhn–Tucker 条件を用いて解くことができる。これらの基本的解法については，関連書籍を参考にしていただきたい[1),2)]。

1.1.2　組合せ最適化問題

ところで，上記の数理計画問題は，じつは変数が整数であるときは簡単に解けない。ここでは，現実の社会システム計画の中で，連続的な変数ではなく 1 個，2 個と数えるような変数を考える。すなわち，変数が整数値しかとらない問題を考える。これを**離散最適化問題**（discrete optimization problem），あるいは**整数計画問題**（integer programming problem）という。さらに，離散最適化問題が，組合せ的性質を持つ場合には，**組合せ最適化問題**（combinatorial optimization problem）と呼ばれる[3),4)]。

例えば，連続変数の標準形の線形計画問題（LP）は次式のように書くことができる。

$$\begin{cases} \min\ z = cx \\ \text{s.t.}\quad Ax = b \\ \qquad\quad x \geqq 0 \end{cases} \tag{1.2}$$

つぎに，同じ線形計画問題を離散的変数で表現する場合には，次式のようになる。

$$\begin{cases} \min\ z = cx \\ \text{s.t.}\quad Ax = b \\ \qquad\quad x_j：\text{非負整数}\quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{1.3}$$

この問題の変数は連続変数ではなく，離散変数（0, 1, 2, …）であり，この点を考慮した効率的な解法が必要である。また，現実プロジェクト（道路網計

画，都市計画など）では，離散的な意思決定問題が多数存在する。

つぎに，具体的な組合せ最適化問題を考える。公共事業プロジェクト（A, B, C, …）の組合せ最適化により社会的便益を最大にするという問題を取り上げる。このときは，各変数はつぎのように定義できる。

$$x_j = \begin{cases} 1 & （計画\ j\ を実行する） \\ 0 & （計画\ j\ を実行しない） \end{cases} \tag{1.4}$$

ここで，各プロジェクト j の費用を a_j，社会的便益を c_j として，予算額を b とするとき，この問題はつぎのように定式化できる。

$$\begin{cases} \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j & （社会的便益最大） \\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b & （予算制約） \\ \qquad x_j \in \{0, 1\} \quad (j = 1, 2, \cdots, n) & \end{cases} \tag{1.5}$$

この問題は，袋の中に「効用」が大きくなるように品物を入れるという問題の形式から，**ナップサック問題**（knapsack problem）といわれる。この問題は，離散変数の問題であり，簡単に解くことが難しい。

一方で，変数が連続数である場合は，**連続ナップサック問題**（continuous knapsack problem）となり，最適解は比較的簡単に求めることができる。連続ナップサック問題はつぎのように定式化できる。

$$\begin{cases} \max\ z = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \\ \text{s.t.}\quad \sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq b \\ \qquad 0 \leqq x_j \leqq 1 \quad (j = 1, 2, \cdots, n) \end{cases} \tag{1.6}$$

なお，変数 x_j の値が 0 〜 1 の連続量となっていることに注意する。

このとき，変数 x_j の効率 c_j/a_j を $c_1/a_1 \geqq c_2/a_2 \geqq \cdots \geqq c_n/a_n$ となるように並べ替えておくと，最適解は（$x_1, x_2, x_3, x_4, \cdots, x_n$）の順に $x_j = 1$ とおく。さらに，$\sum_{j=1}^{q-1} a_j < b$，$\sum_{j=1}^{q} a_j \geqq b$ となる $j = q$ を整数でない値とする。すなわち，連続ナッ

プサック問題の最適解は，つぎのように表せる。

$$x_j = \begin{cases} 1 & (j=1,2,\cdots,q-1) \\ \dfrac{b-\sum_{j=1}^{q-1} a_j}{a_q} & (j=q) \\ 0 & (j=q+1,q+2,\cdots,n) \end{cases} \tag{1.7}$$

すなわち，最適解は（$1,1,1,\cdots,x_q,0,0,0,\cdots$）となり，$x_q$ が実数値である。

このように，整数計画問題を直接解くことが難しい場合，取り扱いやすい連続変数を用いた**緩和問題**（relaxation problem）を考えることができる。これを**連続緩和問題**（continuous relaxation problem）という。

1.1.3　列挙法による解法

つぎに，以下のような実際の組合せ最適化問題を解いてみる。

$$\begin{cases} \max\ z=4x_1+5x_2+x_3+3x_4 \\ \text{s.t.}\quad 2x_1+3x_2+x_3+4x_4 \leqq 4 \\ \qquad\ x_j \in \{0,1\} \quad (j=1,2,3,4) \end{cases} \tag{1.8}$$

この問題では，各変数 x_j のとりうる値は 0 または 1 の 2 値である。また，この問題は $x_1 \sim x_4$ の 4 変数問題なので，すべての解の組合せ総数は $2^4=16$ 通りである。この問題の場合は，解をすべて列挙して，実行可能解のうちで目的関数が最大のものを見つけることができる。これを**列挙法**（enumeration method）という。この組合せ最適化問題のすべての解を列挙すると，**図 1.1** のようになる。制約条件を満たさない実行不能な解を除いて，最適解は $z=6$, $(x_1,x_2,x_3,x_4)=(0,1,1,0)$ であることがわかる。

一般に，離散変数の数を n とすると，場合分けの総数は 2^n となる。つまり，変数の数が大きくなると解の組合せは膨大となる。したがって，列挙法を用いて最適解が得られるのは比較的小規模な問題に限られる。そのため，一般的な離散最適化問題の解法として，以下に分枝限定法を説明する。

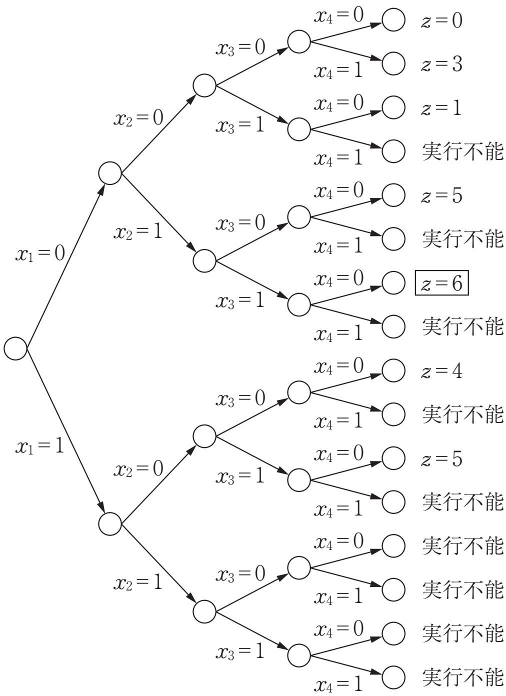

図 1.1　組合せ最適化問題の列挙法

1.1.4　分枝限定法による解法

つぎに，組合せ最適化問題を直接解くことが難しい場合，問題をいくつかの**部分問題**（partial problem）に分解し，それらを解くことによりもとの問題を解く方法を**分枝限定法**（branch and bound method）という。

具体的には

① **分枝操作**（branching operation）：ある問題から部分問題を生成する

② **限定操作**（bounding operation）：最適解を与える見込みのない問題を対象から除く

という操作で構成される。

ここで，最適解を与える見込みのない場合を**終端**，最適解の探索を継続する

索　　　引

―― 編著者・著者略歴 ――

秋山　孝正（あきやま　たかまさ）

1981年　京都大学工学部交通土木工学科卒業
1983年　京都大学大学院工学研究科修士課程修了（交通土木工学専攻）
1983年　京都大学助手
1989年　工学博士（京都大学）
1990年　京都大学講師
1992年　ロンドン大学文部省在外研究員
1994年　岐阜大学助教授
1998年　岐阜大学教授
2008年　関西大学教授
　　　　現在に至る

奥嶋　政嗣（おくしま　まさし）

1992年　京都大学工学部交通土木工学科卒業
1994年　京都大学大学院工学研究科修士課程修了（応用システム科学専攻）
1994年　株式会社日本総合研究所勤務
2002年　岐阜大学助手
2005年　博士（工学）（京都大学）
2007年　岐阜大学助教
2008年　徳島大学准教授
　　　　現在に至る

武藤　慎一（むとう　しんいち）

1994年　岐阜大学工学部土木工学科卒業
1996年　岐阜大学大学院工学研究科博士前期課程修了（土木工学専攻）
1999年　岐阜大学大学院工学研究科博士後期課程修了（生産開発システム工学専攻）
　　　　博士（工学）
1999年　岐阜大学助手
2002年　大阪工業大学講師
2006年　山梨大学助教授
2007年　山梨大学准教授
　　　　現在に至る

井ノ口　弘昭（いのくち　ひろあき）

1994年　豊田工業高等専門学校土木工学科卒業
1996年　豊橋技術科学大学工学部知識情報工学課程卒業
1998年　名古屋大学大学院工学研究科博士前期課程修了（地圏環境工学専攻）
2001年　名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程修了（土木工学専攻）
　　　　博士（工学）
2001年　関西大学助手
2007年　関西大学助教
2013年　関西大学准教授
　　　　現在に至る

すぐわかる応用計画数学
Quick Master of Applied Mathematical Techniques for Planning

2018 年 1 月 18 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

編 著 者　秋　山　孝　正
著　　者　奥　嶋　政　嗣
　　　　　武　藤　慎　一
　　　　　井　ノ　口　弘　昭
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　新 日 本 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112-0011　東京都文京区千石 4-46-10
発 行 所　株式会社　**コ ロ ナ 社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978-4-339-02879-9　C3051　Printed in Japan　（中原）