シリーズ 情報科学における確率モデル 11

Series on Stochastic Models in Informatics and Data Science

協力ゲームの理論と応用

菊田　健作【著】

コロナ社

刊行のことば

われわれを取り巻く環境は，多くの場合，確定的というよりもむしろ不確実性にさらされており，自然科学，人文・社会科学，工学のあらゆる領域において不確実な現象を定量的に取り扱う必然性が生じる。「確率モデル」とは不確実な現象を数理的に記述する手段であり，古くから多くの領域において独自のモデルが考案されてきた経緯がある。情報化社会の成熟期である現在，幅広い裾野をもつ情報科学における多様な分野においてさえも，不確実性下での現象を数理的に記述し，データに基づいた定量的分析を行う必要性が増している。

一言で「確率モデル」といっても，その本質的な意味や粒度は各個別領域ごとに異なっている。統計物理学や数理生物学で現れる確率モデルでは，物理的な現象や実験的観測結果を数理的に記述する過程において不確実性を考慮し，さまざまな現象を説明するための描写をより精緻化することを目指している。一方，統計学やデータサイエンスの文脈で出現する確率モデルは，データ分析技術における数理的な仮定や確率分布関数そのものを表すことが多い。社会科学や工学の領域では，あらかじめモデルの抽象度を規定したうえで，人工物としてのシステムやそれによって派生する複雑な現象をモデルによって表現し，モデルの制御や評価を通じて現実に役立つ知見を導くことが目的となる。

昨今注目を集めている，ビッグデータ解析や人工知能開発の核となる機械学習の分野においても，確率モデルの重要性は十分に認識されていることは周知の通りである。一見して，機械学習技術は，深層学習，強化学習，サポートベクターマシンといったアルゴリズムの違いに基づいた縦串の分類と，自然言語処理，音声・画像認識，ロボット制御などの応用領域の違いによる横串の分類によって特徴づけられる。しかしながら，現実の問題を「モデリング」するためには経験とセンスが必要であるため，既存の手法やアルゴリズムをそのまま

適用するだけでは不十分であることが多い。

本シリーズでは，情報科学分野で必要とされる確率・統計技法に焦点を当て，個別分野ごとに発展してきた確率モデルに関する理論的成果をオムニバス形式で俯瞰することを目指す。各分野固有の理論的な背景を深く理解しながらも，理論展開の主役はあくまでモデリングとアルゴリズムであり，確率論，統計学，最適化理論，学習理論がコア技術に相当する。このように「確率モデル」にスポットライトを当てながら，情報科学の広範な領域を深く概観するシリーズは多く見当たらず，データサイエンス，情報工学，オペレーションズ・リサーチなどの各領域に点在していた成果をモデリングの観点からあらためて整理した内容となっている。

本シリーズを構成する各書目は，おのおのの分野の第一線で活躍する研究者に執筆をお願いしており，初学者を対象とした教科書というよりも，各分野の体系を網羅的に著した専門書の色彩が強い。よって，基本的な数理的技法をマスターしたうえで，各分野における研究の最先端に上り詰めようとする意欲のある研究者や大学院生を読者として想定している。本シリーズの中に，読者の皆さんのアイデアやイマジネーションを掻き立てるような座右の書が含まれていたならば，編者にとっては存外の喜びである。

2018 年 11 月

編集委員長　土肥　正

ま　え　が　き

本書は複数の主体が関わる状況（問題）に対して，主体の協力によって得られた価値を主体間で分配するための考え方の一つである協力ゲーム理論の初等部分について述べている。

協力ゲーム理論によって問題にアプローチするとき二つのステップに分けられると思う。第 1 のステップは現実の問題を協力ゲームモデルとして表現すること，第 2 のステップは得られたモデルの解析を行い，解決策を示すことである。上述のように，協力ゲーム理論によって分配の仕方を与えることを目指すから，第 1 のステップにおいては，数学のみならずさまざまの視点からの考察を必要とするであろう。一方，著者はこれまで主に第 2 のステップを研究してきており，本書では第 2 のステップに焦点をあてることにした。すなわち，あらかじめ特性関数型の協力ゲームモデルとして問題が表現されているとして，これまでに提案されている解（解決策のこと）のうちよく知られているものをいくつか取り上げる。それぞれの解の持つ性質を述べ，解の特徴を把握するために数値例を与えている。解の性質を述べた命題の証明で複雑なものは省略しスムーズに読み進められるように配慮した。応用例（協力ゲームモデル）はこれまでに著者が目にしたものである。問や章末問題を配し，読者の理解の手助けになるとともに著者自身の復習も兼ねるように心がけた。数値例や問はおおよそ 3 人ゲームを扱っているが，提携が解に及ぼす複雑な影響を知るためには 4 人以上のプレイヤーを含むゲームの数値例を考えることをお勧めする。

本書で扱っている内容は古典的かつ基本的なものである。微分積分，線形代数，確率の基礎的事項を習得されている読者は理解できると思う。深く学びたい読者は巻末の引用・参考文献に挙げられている文献を参考にしてもらいたい。また，ゲーム理論，数理経済学やオペレーションズリサーチの専門雑誌に目を

通すと多数の応用例が見つかると思う。

本書の 8 章は，拙著「確率的ゲーム理論」[49)†]の 3 章に続けて読めるような内容になっている。前著においては協力ゲームの内容を含めなかったため，それを補う形でシリーズ書目の一巻として発行することになった。このような事情のため，本書では確率モデルとしての様相が薄いことを承知願いたい。一方，協力ゲームモデルに限らず，検討の対象とする状況に現れるデータ（利益，損失など）は見積もりであることが多い。協力ゲームの特性関数の値を見積もりであると考えることができる場合には，背後にある確率・統計事象を特性関数や協力ゲームの解に反映させて解析する研究も存在するし，理論と応用の両面で今後の研究の余地は十分あると思う。7 章，とりわけ 7.7 節の議論は参考になるであろう。本書では

$$\boxed{1\,章} \to \boxed{2\,章} \to \boxed{3\,章} \to \boxed{4\,章} \to \boxed{7\,章}$$

が基本コースである。前著からの継続に興味のある方は 8 章を最初に読んでから基本コースに進んでもよい。専門的と思う節や項には目次において $*$ 印を，専門的と思う問や章末問題にも $*$ 印を付した。また本書において，「定理」と「命題」の間の差異を厳密に考えたわけではないので気にせずに読んでほしい。著者の関心領域でもあった 4，5 章は命題等が多くなった。証明を飛ばしてもいいし，興味のある読者には証明も合わせて原論文を読むことをお勧めする。

大学院の指導教官であった坂口実先生の著書に触れてゲーム理論の存在を知り，以来約 50 年が経過した。この間，お世話になった方々，先生方，同僚，ゼミの学生に感謝したい。玉置光司先生は著者の大学院学生時代のゼミの先輩であり学ぶところが多かった。謝意を示したい。また，原稿に目を通してコメントをいただいた土肥正先生はじめ編集委員会の方々，出版に際してお世話になったコロナ社の方にお礼を申し上げたい。最後に，家族に感謝したい。

2024 年 6 月

菊田　健作

† 肩付き数字は，巻末の引用・参考文献番号を表す。

目　　　次

第2章 コ ア

第3章 シャープレイ値

第 4 章　仁

第 5 章　交渉集合とカーネル

第 6 章　安定集合とコア

第７章　協力ゲームの応用例

第8章　双行列ゲーム

第9章　種々の話題

1 多人数協力ゲーム

本章では，特性関数型協力ゲームを定義し，協力ゲームを表現する特性関数の性質を紹介する。最後に協力ゲームの解を定義し，関連する話題を述べる。特性関数の性質は協力ゲームの解に大きな影響を及ぼす。

1.1 特性関数型協力ゲーム

特性関数型協力ゲーム†（cooperative game in characteristic function form with sidepayments）（以後，簡単に協力ゲームという）は対 (N, v) で与えられる。ここに，N は協力ゲーム (N, v) の**プレイヤー**（player）全体の集合であり，$N = \{1, \cdots, n\}$ である。n は自然数であり，本書では，断らない限り $n \geqq 2$ とする。プレイヤーの数を強調したいとき n 人（協力）ゲーム (N, v) ということもある。N の部分集合 S を（プレイヤーの）**提携**（coalition）という。空集合 $\emptyset$ も提携である。さらに集合 N も提携と考え，**全体提携**（grand coalition）という。したがって，提携の個数は 2^n 個である。例えば，$n = 2$ のとき，すべての提携は $\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}$ の 4 個である。

v は N のべき集合 2^N 上で定義された実数値関数である。v をゲームの**特性関数**（characteristic function）という。提携 $S \subseteq N$ に対し，$v(S) \in \mathbb{R}$ は提携 S の**成員**（member）が協力することによって得る**価値**（worth）であり，提携の成員の間で $v(S)$ を（自由に）分けることができる。$v(S)$ の値は例えば**お金**（money）あるいはそれに類するものである。提携 S にとって $v(S)$ の値は

† transferable utility game と呼ばれることもある。

大きい方が好ましいといえる。本書では，$v(\emptyset) = 0$ を仮定する。

状況の分析のために協力ゲームモデルを構築するとき，特性関数値をどのように定義したらよいかという問題がある。本書の 2 章から 6 章では特性関数は所与であるとしている。提携 $S \subseteq N$ に対する特性関数値 $v(S)$ の決め方については，提携 S と $N \setminus S$ との間の 2 人ゲームを想定し，提携 S のマクシミン戦略による値を $v(S)$ とする考え方がある（文献 77), 91), 113), 123) 参照）。また，7 章のいくつかの例を特性関数値 $v(S)$ の決め方の参考にされたい。さらに文献 108) 参照。

問 1.1　$n = 3$ のとき，すべての提携を書け。

提携の成員が協力することによって得た価値を成員の間でどのように分配するかを考えるのが協力ゲームのテーマの一つである。ある状況を特性関数型の協力ゲームとしてモデル化したとき，分配の仕方を考えるためのデータはプレイヤー全体の集合 N と特性関数値である。ゲーム (N, v) の特性関数 v は 2^N 上の実数値関数であり，それがどのような性質を持つか，例えば提携の大きさ，つまり成員の数にどのように依存するか，ある特別なプレイヤーの存在に影響されるのか，などは分配の仕方を考えるときに検討されるべきである。1.2 節では特性関数のさまざまの性質を述べる。

問 1.2　2 人ゲーム (N, v) において，$N = \{1, 2\}$，特性関数値が †

$$v(1) = 1,\ v(2) = 1,\ v(12) = 3 > 1 + 1 = 2 \tag{1.1}$$

である。プレイヤー 1, 2 がそれぞれ単独で行動した場合は $v(1) = 1, v(2) = 1$ を得ることができる。2 人は協力して得た価値 $v(12) = 3$ をどのように分ければよいと思うか。つぎに，$v(1) = 2 > v(2) = 1 > 0$ かつ

$$v(12) = 4 > v(1) + v(2) \tag{1.2}$$

のときは，2 人は協力して得た価値 $v(12) = 4$ をどのように分ければよいと思うか（8.4 節参照）。

† 本書では，以下 $v(\{1\})$ を簡単に $v(1)$ と表す。他の提携についても同様である。

問 1.3 国内外での政治・経済その他の活動で目にする協力の状況や身の回りでの協力の状況の例を考えてみよ。

2 個の協力ゲーム $(N, v), (N, w)$ に対して，すべての $S \subseteq N$ に対し $v(S) = w(S)$ であるとき，$v = w$ と書く。

2 個の協力ゲーム $(N, v), (N, w)$ に対して協力ゲーム $(N, v \pm w)$ を，すべての $S \subseteq N$ に対し

$$(v \pm w)(S) = v(S) \pm w(S), \text{（複号同順）} \tag{1.3}$$

と定義する。また，協力ゲーム (N, v) と実数 c に対して協力ゲーム (N, cv) を，すべての $S \subseteq N$ に対し

$$(cv)(S) = cv(S) \tag{1.4}$$

と定義する。

1.2 特性関数の性質

本節では，協力ゲームの特性関数のさまざまな性質を紹介する。これらの性質は協力ゲームの解を与えるときに影響する。1.4 節以降を読み進めるにあたって，必要なときに本節の内容を確認されてもよい。

1.2.1 優加法的ゲームと単調ゲーム

協力ゲーム (N, v) において特性関数 v が優加法性，つまり，$S \cap T = \emptyset$ であるようなすべての $S, T \subseteq N$ に対して

$$v(S \cup T) \geqq v(S) + v(T) \tag{1.5}$$

を満たすとき，協力ゲーム (N, v) は**優加法的**（superadditive）であるという。式 (1.5) の右辺は提携 S と T が個別に行動したときそれぞれが得る利益（価値）$v(S)$ と $v(T)$ の和を表す。左辺は提携 S と T が協力し提携 $S \cup T$ として行動

したときの利益である。式 (1.5) は提携 S と T が協力した方が不利でないことを述べている。

問 1.4　3 人ゲーム (N,v) のとき，特性関数の優加法性 (1.5) を書き下せ。

問 1.5　3 人ゲーム (N,v) が

$$v(1)=v(2)=v(3)=0, v(12)=3, v(13)=4, v(123)=10 \tag{1.6}$$

である。特性関数が優加法性を満たすための $v(23)$ の値の範囲を求めよ。

特性関数の優加法性に関連して，すべての $S \subseteq N, i \notin S$ に対して

$$v(S \cup \{i\}) \geqq v(S) + v(i) \tag{1.7}$$

という性質を**ゼロ単調性**（zero-monotonicity）という。これを満たすとき協力ゲームはゼロ単調であるという。また，すべての $S \subseteq T \subseteq N$ に対して

$$v(T) \geqq v(S) \tag{1.8}$$

という性質を特性関数の**単調性**（monotonicity）という。これを満たすとき協力ゲームは単調であるという。

問 1.6　特性関数 v が優加法性を満たすならばゼロ単調性を満たすことを示せ。

問 1.7　特性関数 v がゼロ単調性を満たすことと，すべての $S,T \subseteq N, S \cap T = \emptyset$, に対して

$$v(S \cup T) \geqq v(S) + \sum_{i \in T} v(i) \tag{1.9}$$

を満たすことは同値であることを示せ。

1.2.2　凸　ゲ　ー　ム

協力ゲーム (N,v) において，特性関数 v が凸性，つまり，すべての $S,T \subseteq N$ に対して

$$v(S \cup T) + v(S \cap T) \geqq v(S) + v(T) \tag{1.10}$$

を満たすとき，協力ゲーム (N,v) は**凸**（convex）[†]であるという。また，(N,v) を凸ゲームという。凸ゲームは 2.3 節，3.6 節，5.3 節などで現れる。文献 99) 参照。

命題 1.1　協力ゲーム (N,v) が凸であるための必要十分条件は特性関数 v が，すべての $S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ に対して

$$v(S \cup \{i\}) - v(S) \leqq v(T \cup \{i\}) - v(T) \tag{1.11}$$

を満たすことである。

【証明】　協力ゲーム (N,v) が凸であり，$S \subseteq T \subseteq N \setminus \{i\}$ とする。$S' = S \cup \{i\}, T' = T$ とすると $S' \cup T' = T \cup \{i\}, S' \cap T' = S$ となり，式 (1.10) から

$$v(S' \cup T') + v(S' \cap T') \geqq v(S') + v(T') \tag{1.12}$$

であるから，式 (1.11) が得られる。逆にゲーム (N,v) が式 (1.11) を満たすとする。任意の $S, T \subseteq N$ に対して，$S \setminus T = \{i_1, \cdots, i_k\}$ とおける。

$$\left.\begin{aligned} v(S \cup T) - v(T) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \{v(S \cup T \setminus \{i_1, \cdots, i_\ell\}) \\ &\qquad - v(S \cup T \setminus \{i_1, \cdots, i_{\ell+1}\})\} \\ v(S) - v(S \cap T) &= \sum_{\ell=0}^{k-1} \{v(S \setminus \{i_1, \cdots, i_\ell\}) - v(S \setminus \{i_1, \cdots, i_{\ell+1}\})\} \end{aligned}\right\} \tag{1.13}$$

が成り立つ。さらに，式 (1.11) により，すべての $\ell = 0, \cdots, k-1$ に対して

$$\begin{aligned} &v(S \cup T \setminus \{i_1, \cdots, i_\ell\}) - v(S \cup T \setminus \{i_1, \cdots, i_{\ell+1}\}) \\ &\quad \geqq v(S \setminus \{i_1, \cdots, i_\ell\}) - v(S \setminus \{i_1, \cdots, i_{\ell+1}\}) \end{aligned} \tag{1.14}$$

であるから，式 (1.10) が成り立つ。

◇

さらに，つぎの性質を得る。

[†] supermodular ということもある。文献 120) を参照。

索　　　引

—— 著者略歴 ——

1973年　大阪大学理学部数学科卒業
1979年　大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程修了（数理系専攻）
　　　　工学博士
1979年　富山大学講師
1989年　富山大学教授
1998年　神戸商科大学教授
2004年　兵庫県立大学教授（大学統合により）
2015年　兵庫県立大学特命教授
2018年　兵庫県立大学名誉教授

協力ゲームの理論と応用

Cooperative Game Theory and Applications

2024 年 8 月 8 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者	菊田健作
発行者	株式会社　コロナ社 代表者　牛来真也
印刷所	三美印刷株式会社
製本所	有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–02841–6　C3355　Printed in Japan　（新井）