シリーズ 情報科学における確率モデル 8

Series on Stochastic Models in Informatics and Data Science

確率的ゲーム理論

菊田　健作【著】

コロナ社

刊行のことば

われわれを取り巻く環境は，多くの場合，確定的というよりもむしろ不確実性にさらされており，自然科学，人文・社会科学，工学のあらゆる領域において不確実な現象を定量的に取り扱う必然性が生じる。「確率モデル」とは不確実な現象を数理的に記述する手段であり，古くから多くの領域において独自のモデルが考案されてきた経緯がある。情報化社会の成熟期である現在，幅広い裾野をもつ情報科学における多様な分野においてさえも，不確実性下での現象を数理的に記述し，データに基づいた定量的分析を行う必要性が増している。

一言で「確率モデル」といっても，その本質的な意味や粒度は各個別領域ごとに異なっている。統計物理学や数理生物学で現れる確率モデルでは，物理的な現象や実験的観測結果を数理的に記述する過程において不確実性を考慮し，さまざまな現象を説明するための描写をより精緻化することを目指している。一方，統計学やデータサイエンスの文脈で出現する確率モデルは，データ分析技術における数理的な仮定や確率分布関数そのものを表すことが多い。社会科学や工学の領域では，あらかじめモデルの抽象度を規定したうえで，人工物としてのシステムやそれによって派生する複雑な現象をモデルによって表現し，モデルの制御や評価を通じて現実に役立つ知見を導くことが目的となる。

昨今注目を集めている，ビッグデータ解析や人工知能開発の核となる機械学習の分野においても，確率モデルの重要性は十分に認識されていることは周知の通りである。一見して，機械学習技術は，深層学習，強化学習，サポートベクターマシンといったアルゴリズムの違いに基づいた縦串の分類と，自然言語処理，音声・画像認識，ロボット制御などの応用領域の違いによる横串の分類によって特徴づけられる。しかしながら，現実の問題を「モデリング」するためには経験とセンスが必要であるため，既存の手法やアルゴリズムをそのまま

適用するだけでは不十分であることが多い。

本シリーズでは，情報科学分野で必要とされる確率・統計技法に焦点を当て，個別分野ごとに発展してきた確率モデルに関する理論的成果をオムニバス形式で俯瞰することを目指す。各分野固有の理論的な背景を深く理解しながらも，理論展開の主役はあくまでモデリングとアルゴリズムであり，確率論，統計学，最適化理論，学習理論がコア技術に相当する。このように「確率モデル」にスポットライトを当てながら，情報科学の広範な領域を深く概観するシリーズは多く見当たらず，データサイエンス，情報工学，オペレーションズ・リサーチなどの各領域に点在していた成果をモデリングの観点からあらためて整理した内容となっている。

本シリーズを構成する各書目は，おのおのの分野の第一線で活躍する研究者に執筆をお願いしており，初学者を対象とした教科書というよりも，各分野の体系を網羅的に著した専門書の色彩が強い。よって，基本的な数理的技法をマスターしたうえで，各分野における研究の最先端に上り詰めようとする意欲のある研究者や大学院生を読者として想定している。本シリーズの中に，読者の皆さんのアイデアやイマジネーションを掻き立てるような座右の書が含まれていたならば，編者にとっては存外の喜びである。

2018 年 11 月

編集委員長　土肥　正

ま え が き

不確定性下の意思決定問題は競争相手のあるなしにかかわらず太古の昔から存在するといえよう。いまから 45 年ほど前，自身が学生であった頃，先輩がつぎのようなことを話していた。最適化モデル（意思決定者が 1 人）として表現された決定問題と 2 人ゲームとして表現された決定問題では，解の公式を見つけるのはどちらがより簡単であるか。自分自身はゲーム理論に興味があったので，いくつかの 2 人ゼロ和ゲームモデルの解の公式を見つけることを研究テーマの一つとしてきた。

不確実な状況での意思決定において代替案の確率的な選択が許されるならば，自然を相手プレイヤーと想定して 2 人ゼロ和ゲームのマクシミン戦略の応用を考えることができると思う。2 人非ゼロ和ゲームモデルでは，意思決定へのナッシュ均衡点戦略の応用を検討できると思う。

本書では，2 人ゲームを念頭において非協力ゲーム理論の基礎を述べ数値例を与えている。数値例は，これまでの研究を振り返りつつ，研究活動において身近で目にしてきたモデル，自身が研究したモデル，さらに，それらのバリエーションに関するものからなっている。特に，自身が研究したモデルとそのバリエーションについては，目次において * 印を付した。

身近で目にしてきたモデルは自分の判断で選択したのでモデルの数は少なく，扱っている領域も限定されている。これらのモデルを詳しく研究したわけではないので，いずれも古典的な基本モデルの紹介にとどまっている。

モデルのバリエーションは，ゼロ和ゲームモデルと非ゼロ和ゲームモデル，無限ゲームモデルと有限ゲームモデル，最適化モデルと 2 人ゲームモデル，という関係であり，上述のように数値例の域にとどまっている。モデルの設定の仕方の妥当性や先行研究などに関してご教示やご意見をいただければありがたい

し，読者のお役に立てれば幸いである。既出と思われるものはわかる範囲で文献を紹介している。

同じタイトルを持つ項同士は互いに関連している。本文中の問や章末問題は執筆中に思い付いたものが多数含まれており，大半が数値例に関している。問のうち，難解かあるいは応用・研究の余地があるかもしれないと判断したものには（研究）のラベルを付した。また，線形代数，微分積分，グラフ理論，確率，凸集合の基礎的事項について読者は既知であると想定し，本書では触れていないが，文献リストに参考書をいくつか挙げている。

40 年を超える研究活動において多数の先生方や学兄にお世話になった。この場を借りてお礼を申し上げたい。最後に，本書を書く機会を与えていただいた編集委員長の土肥正先生を始め編集委員会と，出版にたどり着くまでお世話になったコロナ社の皆様に謝意を表したい。家族にも感謝したい。

2021 年 10 月

菊田　健作

目　　　次

第3章　2人非ゼロ和有限ゲーム

第4章　無限ゲーム

第5章　展開型のゲーム

第6章　情報不完備ゲーム

第 7 章　種 々 の 話 題

本書で使用する記号について

$\mathbb{R}$：実数全体の集合

$(x_1, \cdots, x_k)$：k 次元実ベクトル，横ベクトルあるいは単にベクトル，$1 \times k$ 型の行列

$\mathbb{R}^k$：k 次元実ベクトルの全体，$\mathbb{R} = \mathbb{R}^1$

x_i：$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \cdots, x_k)$ のとき，$\boldsymbol{x}$ の第 i 成分

$\boldsymbol{x}_{-i}$：$\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \cdots, x_k)$ のとき，x_i を除いて得られる $k-1$ 次元実ベクトル

$\boldsymbol{x} = [x_1, \cdots, x_k]$：$k$ 次元確率ベクトル

$\boldsymbol{e}^i \in \mathbb{R}^k$：単位ベクトル，$e^i_\ell = 1,\ \ell = i; = 0,\ \ell \neq i$

$\mathbf{1}^k$：すべての成分が 1 である k 次元ベクトル

$\mathbf{0}^k$：すべての成分が 0 である k 次元ベクトル

$\boldsymbol{x} \geqq \boldsymbol{y}$：$k$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \cdots, x_k)$ と $\boldsymbol{y} \equiv (y_1, \cdots, y_k)$ について，すべての i に対し，$x_i \geqq y_i$

$< \boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^\ell >$：ベクトル $\boldsymbol{x}^1, \cdots, \boldsymbol{x}^\ell$ を含む最小の凸集合

$\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y}$：$k$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x} \equiv (x_1, \cdots, x_k)$ と $\boldsymbol{y} \equiv (y_1, \cdots, y_k)$ の内積である。つまり，

$$\sum_{i=1}^{k} x_i y_i$$

$d(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$：$k$ 次元ベクトル $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の距離。つまり，$\sqrt{(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y}) \cdot (\boldsymbol{x}-\boldsymbol{y})}$

$\lfloor x \rfloor$：実数 x をこえない最大の整数

$\lceil x \rceil$：実数 x 以上の最小の整数

$X \setminus Y$：集合 X, Y の差集合

$|X|$：集合 X の濃度

$A = (a_{ij})$：第 (i,j) 成分が a_{ij} であるような行列 A

$A_{i\bullet}$：行列 A の第 i 行

$A_{\bullet j}$：行列 A の第 j 列

$|A|$：正方行列 A の行列式

A^T：行列 A の転置行列

A^c：行列 A のすべての成分に c を加えて得られる行列

A^c：プレイヤーのタイプが c のとき，そのプレイヤーの利得行列

1 意思決定とゲーム理論

われわれ（意思決定主体）が不確定性を含む将来に向かって意思決定をしなければならない状況を**決定問題**（decision problem）という。決定問題は家庭内から世界まで，また経済，経営，外交，政治，娯楽など種々の局面で存在する。

1.1 不確定性の下での意思決定

決定問題はつぎのような要素からなる。

(1)　われわれの m 個の行動案：$a_1, \cdots, a_m$

(2)　起こり得る（自然の）n 個の状態：$s_1, \cdots, s_n$

(3)　行動 a_i をとったとき状態 s_j によりもたらされる結果または利得：$f(a_i, s_j)$

決定問題での行動案の選択の仕方を論じるのが決定理論である。決定問題は通常 2 通りの方法で表現される。

例 1.1　　ある企業はある商品の三つの生産計画案，つまり増産（a_1），現状維持（a_2），減産（a_3）のうちどれにするかを検討している。企業が計画案を選択した後，景気動向は良くなる（s_1），現状維持（s_2），悪くなる（s_3）のうちいずれかを想定している。利得 $f(a_i, s_j)$ を見積もったら**表 1.1** のよ

表 1.1　利得表（単位：億円）

	s_1	s_2	s_3
a_1	23	17	5
a_2	17	13	11
a_3	9	12	14

うになった。この企業は三つの行動案のうちどれを選んだらよいか。

---

(1) **利得表**（payoff table）（あるいは利得行列）による表現：大きさ $m \times n$ の行列の第 (i, j) 成分が $f(a_i, s_j)$ である。行列の各行 i，各列 j がそれぞれ行動 a_i，状態 s_j に対応する。表 1.1 は例 1.1 の利得表である。

(2) **決定の木**（decision tree）による表現：決定問題をグラフを用いて表現する。例 1.1 の決定の木は**図 1.1** である。図において記号 ◯ は偶然の分岐点，記号 □ は決定の分岐点を表す。

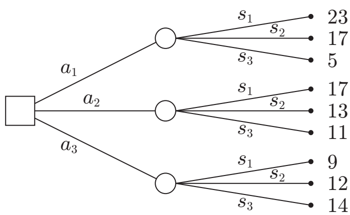

図 1.1　決定の木

不確定性には

(1) リスクの場合：将来起こり得る状態が，過去のデータなどによって，起こり得る状態全体の集合上の確率分布で記述される場合

(2) 不確実性の場合：将来起こり得る状態に対して確率を付与するのが困難な場合

とがある。不確定性 (1)，(2) のそれぞれに対して，複数個の準拠すべき方針が提案されてきている。これらの方針を（意思）決定基準という。どの決定基準を採用するかは意思決定者が決めることである。ここでは (2) の場合の基準を一つ紹介する。文献 68)や決定分析のテキストを参照されたい。

マクシミン（ミニマックス）基準：最小（最大）の利得（損失）

$$\min_{1 \leqq j \leqq n} \{f(a_i, s_j)\} \left(\max_{1 \leqq j \leqq n} \{f(a_i, s_j)\} \right) \tag{1.1}$$

を最大（最小）にする行動案を第 1 順位とする。

ところで，例 1.1 の将来起こり得る（自然の）状態に対して生起確率を付与するのが困難であり，意思決定者は不確実性の場合の決定を迫られているとしよう。意思決定者がマクシミン基準に従うとすれば，最低でも 11 億円の利益を当てにして行動 a_2 を選ぶであろう。

一方，この企業は 4 半期ごと，毎月あるいは毎週とかいうように長期にわたって繰り返し表 1.1 の状況に直面するとしよう。この企業が，裏面は見分けがつかない 31 枚のカードの組を用意する。うち 18 枚の表面には数 3，12 枚の表面には数 2，1 枚の表面には数 1 が書いてある。意思決定に際して裏返した 31 枚のカードから 1 枚をアトランダムに選び，表面の数が i であれば行動 a_i を選ぶ。例えば，このようにして，a_1, a_2, a_3 をそれぞれ 1 対 12 対 18 の割合で選択すれば，s_1, s_2, s_3 のいずれが起こったとしても利得の平均は $\dfrac{389}{31}=$ 約 12.5 億円となり，マクシミン基準による 11 億円より大きい。仮に 1 回だけの意思決定においても，上記のカードの組を用いて a_1, a_2, a_3 を 1 対 12 対 18 の割合で選択することが許されているならば，約 12.5 億円を念頭において行動案を選ぶことも考えられるだろう（ギャンブル？）。これは代替案の選択を確率的選択まで拡張してマクシミン基準を適用することにほかならない。それはまた意思決定者（プレイヤー I）と，起こり得る（自然の）状態の一つを選ぶことができる仮想的な意思決定者（プレイヤー II）との間の 2 人ゼロ和（有限）ゲーム（2 章）を想定して行動案を選ぶことに等しい[68),80),104)†]。

一方，例 1.1 において，同じような商品を生産する競争的な（自分の利得を増やすことは当該企業の利得を減少させることになる）他企業が存在して，「景気動向」を「他企業の戦略」と読み替えることができるならば，ある企業（プレイヤー I）と他企業（プレイヤー II）の間の 2 人ゼロ和ゲームの状況となる。

1.2 戦略型のゲーム

複数の**意思決定主体**（decision-maker）が存在し，主体間の競争や協調の可

† 肩付き数字は，巻末の引用・参考文献番号を表す。

能性が考えられる局面での各主体の意思決定の仕方を検討するのがゲーム理論である。

戦略型の（$\boldsymbol{n}$ 人）ゲーム（game in strategic form または in normal form）は，順序付けられた組 $\mathcal{G}=(N,(S_i)_{i\in N},(f_i)_{i\in N})$ で与えられる。$n \geqq 2$ であり

1. $N=\{1,2,\cdots,n\}$ はゲームの参加者（**プレイヤー**（player））全体の有限集合
2. すべての $i\in N$ に対し，S_i はプレイヤー i の**戦略**（strategy）の集合
3. すべての $i\in N$ に対し，f_i は直積集合 $S\equiv S_1\times S_2\times\cdots\times S_n$ 上で定義された実数値関数

である。各プレイヤー i がそれぞれ戦略 $s_i \in S_i$ を選択したとき，実数値 $f_i(s_1,s_2,\cdots,s_n)$ はプレイヤー i の利得（あるいは効用）を表し，f_i をプレイヤー i の**利得関数**（payoff function）という。すべてのプレイヤーは自分の利得（あるいは効用）ができるだけ大きくなるように戦略を選びたい。

本書では戦略型の 2 人ゲームを中心に話を進める。その際，プレイヤーを I, II と表す。

2　2人ゼロ和有限ゲーム

つぎの六つの条件を満たすような戦略型のゲーム $\mathcal{G}$ を **2 人ゼロ和有限ゲーム**という。

1.　（**2 人ゲーム**（two-person game））　$n=2,\ N=\{\mathrm{I},\mathrm{II}\}$ とする。
2.　（**ゼロ和ゲーム**（zero-sum game））　すべての $x\in S_{\mathrm{I}}, y\in S_{\mathrm{II}}$ に対して

$$f_{\mathrm{I}}(x,y)+f_{\mathrm{II}}(x,y)=0 \tag{2.1}$$

3.　（**有限ゲーム**（finite game））　$S_{\mathrm{I}}, S_{\mathrm{II}}$ がともに空でない有限集合である。
4.　（**同時ゲーム**）　各プレイヤーがそれぞれ戦略を同時に選択する（あるいは，各プレイヤーが，他プレイヤーに知られないようにして第三者に自分の選択を伝え，第三者がすべてのプレイヤーの選択内容を公表する）。
5.　各プレイヤーが他プレイヤーと独立に戦略を選択する。
6.　組 $(N,(S_i)_{i\in N},(f_i)_{i\in N})$ の内容はすべてのプレイヤーに既知である。

式 (2.1) は 2 人の利得の和が 0 であることを述べている。式 (2.1) により，プレイヤー II の利得 $f_{\mathrm{II}}(x,y)=-f_{\mathrm{I}}(x,y)$ であるので，プレイヤー II はプレイヤー I に $f_{\mathrm{I}}(x,y)$ を支払う，ということもできる。

2.1　行列ゲーム

2 人ゼロ和有限ゲーム $\mathcal{G}$ においてプレイヤー I, II がそれぞれ $m,n(m,n\geqq 1)$ 個の戦略を持つとし, 戦略の順に番号を付けて $S_{\mathrm{I}}=\{1,\cdots,m\}$, $S_{\mathrm{II}}=\{1,\cdots,n\}$ とする。プレイヤー I, II がそれぞれ戦略 $i\in S_{\mathrm{I}}$, $j\in S_{\mathrm{II}}$ を選んだとき，利得は

索　　　引

——— 著 者 略 歴 ———

1973年　大阪大学理学部数学科卒業
1979年　大阪大学大学院基礎工学研究科博士課程修了（数理系専攻）
　　　　工学博士
1979年　富山大学講師
1989年　富山大学教授
1998年　神戸商科大学教授
2004年　兵庫県立大学教授（大学統合）
2015年　兵庫県立大学特命教授
2018年　兵庫県立大学名誉教授

確率的ゲーム理論

Stochastic Game Theory

2021 年 10 月 15 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者	菊　田　健　作
発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
	代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所	有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–02838–6　C3355　Printed in Japan　（新井）