シリーズ 情報科学における確率モデル 7

Series on Stochastic Models in Informatics and Data Science

システム信頼性の数理

大鑄　史男【著】

コロナ社

刊行のことば

われわれを取り巻く環境は，多くの場合，確定的というよりもむしろ不確実性にさらされており，自然科学，人文・社会科学，工学のあらゆる領域において不確実な現象を定量的に取り扱う必然性が生じる。「確率モデル」とは不確実な現象を数理的に記述する手段であり，古くから多くの領域において独自のモデルが考案されてきた経緯がある。情報化社会の成熟期である現在，幅広い裾野をもつ情報科学における多様な分野においてさえも，不確実性下での現象を数理的に記述し，データに基づいた定量的分析を行う必要性が増している。

一言で「確率モデル」といっても，その本質的な意味や粒度は各個別領域ごとに異なっている。統計物理学や数理生物学で現れる確率モデルでは，物理的な現象や実験的観測結果を数理的に記述する過程において不確実性を考慮し，さまざまな現象を説明するための描写をより精緻化することを目指している。一方，統計学やデータサイエンスの文脈で出現する確率モデルは，データ分析技術における数理的な仮定や確率分布関数そのものを表すことが多い。社会科学や工学の領域では，あらかじめモデルの抽象度を規定したうえで，人工物としてのシステムやそれによって派生する複雑な現象をモデルによって表現し，モデルの制御や評価を通じて現実に役立つ知見を導くことが目的となる。

昨今注目を集めている，ビッグデータ解析や人工知能開発の核となる機械学習の分野においても，確率モデルの重要性は十分に認識されていることは周知の通りである。一見して，機械学習技術は，深層学習，強化学習，サポートベクターマシンといったアルゴリズムの違いに基づいた縦串の分類と，自然言語処理，音声・画像認識，ロボット制御などの応用領域の違いによる横串の分類によって特徴づけられる。しかしながら，現実の問題を「モデリング」するためには経験とセンスが必要であるため，既存の手法やアルゴリズムをそのまま

適用するだけでは不十分であることが多い。

本シリーズでは，情報科学分野で必要とされる確率・統計技法に焦点を当て，個別分野ごとに発展してきた確率モデルに関する理論的成果をオムニバス形式で俯瞰することを目指す。各分野固有の理論的な背景を深く理解しながらも，理論展開の主役はあくまでモデリングとアルゴリズムであり，確率論，統計学，最適化理論，学習理論がコア技術に相当する。このように「確率モデル」にスポットライトを当てながら，情報科学の広範な領域を深く概観するシリーズは多く見当たらず，データサイエンス，情報工学，オペレーションズ・リサーチなどの各領域に点在していた成果をモデリングの観点からあらためて整理した内容となっている。

本シリーズを構成する各書目は，おのおのの分野の第一線で活躍する研究者に執筆をお願いしており，初学者を対象とした教科書というよりも，各分野の体系を網羅的に著した専門書の色彩が強い。よって，基本的な数理的技法をマスターしたうえで，各分野における研究の最先端に上り詰めようとする意欲のある研究者や大学院生を読者として想定している。本シリーズの中に，読者の皆さんのアイデアやイマジネーションを掻き立てるような座右の書が含まれていたならば，編者にとっては存外の喜びである。

2018 年 11 月

編集委員長　土肥　正

まえがき

本書では，2 状態から多状態に至るシステムの信頼性に関する順序集合論的および確率論的な議論を概観する．

2 状態システムではシステムおよび部品の状態として故障と正常のみを考え，システムの状態は部品の状態の組合せによって一意に定まるとされる．部品やシステムのそれぞれの状態空間は必然的にブール束になり，確率論的な議論は寿命分布関数によるものになる．このような枠組みでの議論は 1950 年代から始まり，おおよそ 1980 年代までの間に多くの研究者達によってなされてきた．2 状態システムについての議論はほぼ収束し，その研究成果は Barlow and Proschan[4),7)†]にまとめられており，故障木解析（fault tree analysis，FTA）や安全・リスク解析などの信頼性解析手法の基盤をなしている．

一方で，圧力や温度を考えるまでもなく，部品やシステムの状態が 2 状態のみであることはなく，劣化状態を含めさまざまな状態があり得る．多状態システムについての議論は，1980 年代に始まり多くの研究がなされている．Lisnianski and Levitin[60)]，Lisnianski, Frenkel and Ding[61)]，Natvig[67)] のような実践的な立場からの書籍も出版されているが，理論としての体系化には未(いま)だ至っていない．

本書では，2 状態システムでのさまざまな概念を拡張する立場で，部品およびシステムの状態空間を全順序集合とした場合の議論を紹介する．状態空間が半順序集合の場合についてはその必要性を示唆し，最近の論文を紹介するにとどめる．

2 章で見られるように，2 状態システムの理論においては極小パス集合（minimal path set）と極小カット集合（minimal cut set）が根幹的な役割を果たす．FTA はこのことに対する一つの根拠を与える．FTA は，多数の要素からなる複雑な

---

† 肩付き数字は，巻末の引用・参考文献の番号を表す．

システムの故障や不具合事象（トップ事象と呼ばれるが）の原因を探し出すためのトップダウン的で実践的な手法であるが，このトップ事象に対する極小カット集合を最終的に与える．極小カット集合は，トップ事象を発生させるために必要な部品の事象の極小的な組合せであり，極小パス集合は極小カット集合に双対的な関係にある．極小カット集合や極小パス集合は，それぞれシステムに内在する並列システムや直列システムを定義し，システムの構造はこれらの直列または並列システムから再構成される．このことから，直列システムや並列システムなどの基本的なシステムによるシステムの分解と統合の観点が重要であり，確率的な信頼性評価方法の多くがこのような分解に依拠する．

本書の構成は以下のとおりである．信頼性理論では，順序集合論的な概念が，構造的および確率論的な議論の至るところでさまざまに姿を変えながら，基本的な道具として用いられる．1 章では本書で用いる順序に関する基本的な概念を解説する．また信頼性理論に特有の状態ベクトルに対する切貼り的な操作について説明する．さらに統計的な正の相関性の概念の一つであるアソシエイション（association）を紹介する．これは，上記の直列システムまたは並列システムへの分解と統合を用いたシステムの信頼性評価において，重要な役割を果たす．

2 章では，信頼性理論において最も基本的である，2 状態単調システムの順序集合論的および確率論的な議論を紹介する．2 状態単調システムの構造は，極小パスベクトルあるいは極小カットベクトルから一意に決まる．このことは，2 状態システムの信頼性を議論する際の基盤をなす．

実際的なシステムはモジュールの階層的な積上げで構成され，部品がむき出しの形で組み上げられているわけではない．この意味で，モジュール分解とそれを介したシステムの信頼性に関する議論は重要である．2 章ではモジュールについての議論を紹介し，信頼性評価をモジュールの階層構造に従って積み上げることで，よりよい評価が得られることを証明する．

3 章はエージング（aging）の概念を扱う．IFR（increaing failure rate）性はよく知られているエージングの一つであり直感的に理解しやすいが，システムの性質として考えた場合，むしろ IFRA（increasing failure rate average）

性が重要であり中心的な位置を占める．これに対して，IFR 性は直列システムに密接に関係する．さらにシステムの寿命分布が指数分布であるとき，システムの構造は直列に限定されるだけでなく，部品の寿命分布も指数分布に限定される．これらのことについて，他のエージングの概念とともに 3 章で詳説する．

3 章では，ショックモデルについてもふれる．ショックモデルは，環境からのストレスとそれに対するシステムの耐性の二つの要素から構成されるが，この耐性がもつ離散的な分布関数としてのエージング性が，システムの寿命分布関数のエージング性に反映される．さらに，IFRA 性がさまざまな確率過程の初期通過時間の性質として現れることから，そのいく分技巧的な定義にかかわらず自然な性質であることを示す．3 章では，さらに，これらのエージングの概念を多変量の場合に拡張する．

4 章，5 章では 2 章，3 章での議論を多状態に拡張する．多状態システムの順序集合論的な議論は 4 章で，信頼性評価方法とエージングの議論は 5 章で示される．2 状態システムでの議論は，状態空間が二つの要素からなることからスムーズである．本書では状態空間を全順序集合とするが，比較的扱いやすいこのような場合でも，例えば，直列システムや並列システムの定義など，2 状態では素朴に考えておけばよかったさまざまな概念が改めて問い直される．

5 章では，多状態システムの確率過程論的な議論を行う．エージング性については 2 状態の場合と同様に IFRA 性が重要であり，IFR 閉包の成立はシステムの構造を直列システムに限定することが示される．

6 章では 2 状態システムにおける部品の重要度について，7 章では 6 章の議論を拡張し，多状態システムでの重要度について述べる．部品の重要度は，システムにおいてその部品がどの程度重要であるかの指標である．Birnbaum 重要度を基本とし，これから派生してくるいくつかの重要度が提案されており，システムの安全・リスク解析などに応用される．Birnbaum 重要度は臨界状態ベクトルによって定義される．本書では，この臨界状態ベクトルを極小カットおよび極小パスベクトルから得るためのアルゴリズムを示し，さらに実際によく見られる構造である直・並列システムにおける一連の重要度の相互関係につい

て議論する．

最後に，状態空間が半順序の場合の理論構築が求められることを簡単な例によって示唆し，その際のシステムの定義を作業仮説として与える．さらに，このような多状態システムのモデルが実際の多層的なネットワークのモデルになり得るとともに，さらに拡張が必要であることについてもふれる．

レリバント（relevant）とアソシエイト（associate）の訳語について述べておく．いずれも「関係する」,「関連する」といった意味であるが，本書ではそれぞれの読みであるレリバントとアソシエイトを用いる．

レリバントは部品に関する概念であり，システムの機能においてその部品を外せないことを意味し，その度合いが重要度の概念につながる．日本語の「関係する」や「関連する」といったイメージではなく，適切な日本語が見当たらないため，そのままの読みを用いることとした．

アソシエイトは確率変数間の相関性を意味する．二つの確率変数の場合，X と Y がアソシエイトであるとは，任意の単調増加な関数 f と g に対して，$Cov[f(X,Y),g(X,Y)] \geqq 0$ であるとして定義され，単純ではない正の相関性を意味する．$Cov[f(X),g(Y)] \geqq 0$ の場合を考えてみる．単調増加な関数 f と g の選択によって，確率変数 X と Y の任意の部分を拡大・縮小できる．上の不等号関係は，それぞれの確率変数をどのように拡大・縮小してもそれらの間に正の相関があることを意味する．アソシエイトは，正の相関性が，X と Y から単調増加関数によって生成されるどのような確率変数についても成立することを要請しており，X と Y の多様な正の相互依存関係をイメージさせ，適切な訳語を見出せない．このため，本書ではレリバントと同様にその読みを用いることとした．本書では，一般的に順序集合上の確率についてアソシエイトを定義する．

広島大学の土肥正教授には本書執筆の機会をいただきました．ここに深く感謝致します．

2019 年 10 月

著　者

目　　次

第1章　順序集合論の準備と記号

第2章　2状態システム

第 3 章　2 状態システムの劣化過程

第 4 章　多状態システム

第 5 章　多状態システムの確率的評価と劣化過程

第6章　2状態システムにおける重要度

第 7 章　多状態システムにおける重要度

第 8 章　多状態システムの拡張 —あとがきにかえて—

1 順序集合論の準備と記号

本章では，われわれの議論に関係する範囲内での順序に関する概念を解説するとともに，順序集合上のアソシエイトな確率を紹介する．さらに，本書に特有の記号についても説明する．なお，集合については標準的な記号を用い，確率論の入門的な素養は前提とする．

1.1 順序集合，全順序集合

1.1.1 順　序　集　合

定義 1.1　　集合 A における関係 $\leqq$ はつぎの条件を満たすとき，**順序関係**（order relation）または**順序**（order）と呼ぶ．

(1)　（**反射律**（reflexivity，reflexive law））　A のすべての元 a について，$a \leqq a$.

(2)　（**反対称律**（antisymmetry，antisymmetric law））　A の元 a, b について，

$$a \leqq b,\ b \leqq a \ \Rightarrow\ a = b.$$

(3)　（**推移律**（transitivity，transitive law））　A の元 a, b, c について，

$$a \leqq b,\ b \leqq c \ \Rightarrow\ a \leqq c.$$

A の元 a, b について，$a \leqq b$ または $b \leqq a$ であるとき，a と b は**比較可能**

(comparable) であるという．$a \leqq b$ かつ $a \neq b$ であるとき，$a < b$ と書く．A のすべての二つの元が比較可能であるとき，順序 $\leqq$ は**全順序**（totally order）と呼ばれる．

集合 A とその上の順序 $\leqq$ を組にした $(A, \leqq)$ を**順序集合**（ordered set），順序が全順序であるときは**全順序集合**（totally ordered set）と呼ぶ．必ずしも全順序でないとき，順序 $\leqq$ は**半順序**（partially order），$(A, \leqq)$ は**半順序集合**（partially ordered set）とも呼ばれる．考えている順序が明らかで誤解がない場合は，順序の記号を明記せずに順序集合 A と呼ぶ．また，A が有限集合 (finite set）であるとき，**有限順序集合**（finit order set）と呼ぶ．

例 1.1

(1) 二つの元からなる集合 $A = \{0, 1\}$ に $0 < 1$ として順序を定義したとき，$(A, \leqq)$ は全順序集合である．2 状態システムの信頼性理論では，0 は故障状態を，1 は正常状態または動作状態を意味し，部品やシステムの状態空間として用いられる．

(2) $N+1$ 個の元からなる集合 $A = \{0, 1, \cdots, N\}$ に $0 < 1 < \cdots < N$ として順序を定義したとき，$(A, \leqq)$ は全順序集合である．0 は故障状態，N は正常に動作している状態，$1, \cdots, N-1$ は劣化状態を意味し，多状態の信頼性理論で部品およびシステムの状態空間として用いられる．

(3) 五つの元からなる集合 $A = \{a, b, c, d, e\}$ に，$a < c$, $b < c$, $c < d$, $c < e$ として順序を定義すると，a と b や d と e はそれぞれ比較可能でなく，$(A, \leqq)$ は半順序集合である．半順序集合は，順序がつかない状態が存在し得る場合の状態空間として用いられる．

順序集合 $(A, \leqq)$ において，$a \leqq b$ である $a, b \in A$ に対して

$$[a, b] = \{x \in A : a \leqq x \leqq b\}, \qquad (a, b] = \{x \in A : a < x \leqq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in A : a \leqq x < b\}, \qquad (a, b) = \{x \in A : a < x < b\},$$

$$[a, \to) = \{x \in A : a \leqq x\}, \qquad (\leftarrow, b] = \{x \in A : x \leqq b\},$$

$$(a, \to) = \{x \in A : a < x\}, \qquad (\leftarrow, b) = \{x \in A : x < b\}$$

の形の A の部分集合を**区間**と呼ぶ．[，]，(，) などの括弧の意味は通常の実数値からなる区間の場合と同様で，端の点を含む，含まないを意味し，**閉区間**，**開区間**，**右閉区間**などと呼ばれる．信頼性理論では，$[a, \to)$ と $(\leftarrow, b]$ の形の区間が重要である．

順序集合 $(A, \leqq)$ において，**部分集合** $M \subseteqq A$ 上の順序 $\leqq_M$ を，つぎのように定義する．$x,\ y \in M$ に対して，

$$x \leqq_M y \iff x \leqq y.$$

順序集合 $(M, \leqq_M)$ を $(A, \leqq)$ の**部分順序集合**と呼び，簡単に $(M, \leqq)$ と書く．

順序集合 $(A, \leqq)$ において，A 上の順序 $\leqq_D$ を，$x, y \in A$ に対して，

$$x \leqq_D y \iff y \leqq x$$

と定義する．順序 $\leqq_D$ を $\leqq$ の**双対順序**（dual order）と呼び，$(A, \leqq_D)$ を $(A, \leqq)$ の**双対順序集合**（dual ordered set）という．

1.1.2　擬順序集合

定義 1.2　　集合 A 上の関係 $\leqq_s$ が以下の条件を満たすとき，**擬順序関係**（pseudo–order relation）であるという．

(1) （反射律）　A のすべての元 a に対して，$a \leqq_s a$,

(2) （推移律）　A の元 a, b, c に対して，$a \leqq_s b,\ b \leqq_s c \ \Rightarrow\ a \leqq_s c$.

$a \leqq_s b,\ b \leqq_s a$ のとき，$a = b$ は必ずしも成立しないが，**同値関係**（equivalence relation）を考えることで順序集合にできる．擬順序集合 $\left(A, \leqq_s\right)$ の A 上に**二項関係**（binary relation）$=_s$ をつぎのように定義する．$a, b \in A$ に対して，

$$a =_s b \iff a \leqq_s b,\ b \leqq_s a.$$

この関係は同値関係であり，つぎの条件を満たす．

(1)（反射律） A のすべての元 a について，$a =_s a$,

(2)（**対称律**（symmetry，symmetric law）） A の元 a, b について，

$a =_s b \Longrightarrow b =_s a$,

(3)（推移率） A の元 a, b, c について，$a =_s b$, $b =_s c \Longrightarrow a =_s c$.

この同値関係による A の**商空間**（quotient space）$A| =_s$ の要素である**同値類**（equivalence class）α, β に対して，順序 $\leqq_s$ を以下のように定義できる．

$$\alpha \leqq_s \beta \Longleftrightarrow a \in \alpha,\ b \in \beta,\ a \leqq_s b$$

a, b はそれぞれの同値類の元であり，上記の同値類間の順序 $\leqq_s$ の定義はこれらの元の選択によらない．

1.1.3　直積順序集合

$(A, \leqq_A)$, $(B, \leqq_B)$ を二つの順序集合とする．直積集合 $A \times B$ の上につぎのようにして定義される順序 $\leqq_{A\times B}$ を**直積順序**（product order）と呼び，$(A \times B,\ \leqq_{A\times B})$ をこれら二つの順序集合の**直積順序集合**（product ordered set）と呼ぶ．$A \times B$ の元 (a, b), (a', b') に対して

$$(a, b) \leqq_{A\times B} (a', b') \iff a \leqq_A a',\ b \leqq_B b'.$$

したがって，$a <_A a'$ かつ $b' <_B b$ であるとき，(a, b) と (a', b') は直積順序に関して比較可能ではない．さらに a と a' または b と b' が比較可能でなければ，(a, b) と (a', b') は比較可能ではない．

順序集合 $(A_i, \leqq_{A_i})$ $(i = 1, 2, \cdots, n)$ に対して直積順序集合 $\left(\prod_{i=1}^n A_i, \leqq_{\prod_{i=1}^n A_i}\right)$ が定義でき，$\prod_{i=1}^n A_i$ の要素 $\boldsymbol{a} = (a_1, \cdots, a_n)$ と $\boldsymbol{b} = (b_1, \cdots, b_n)$ に対して

$$(a_1, \cdots, a_n) \leqq_{\prod_{i=1}^n A_i} (b_1, \cdots, b_n) \Longleftrightarrow a_i \leqq_{A_i} b_i,\ i = 1, \cdots, n.$$

例 1.2　例 1.1 を用いた直積順序集合の例を挙げる．

(1)　例 1.1 (1) の順序を用いて，$\left(A_i,\ \leqq_{A_i}\right) = (\{0, 1\},\ \leqq)$ $(i = 1, 2, 3)$ とすると，直積順序集合 $\left(A_1 \times A_2 \times A_3,\ \leqq_{A_1 \times A_2 \times A_3}\right)$ は

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(0,0,0), (0,0,1), (0,1,0), (1,0,0), \\ (0,1,1), (1,0,1), (1,1,0), (1,1,1)\}$$

である．三つの部品からなるシステムを考えると, 上記の直積順序は三つの部品の状態の組間の優劣を意味し, 例えば, $(1,0,0) \leqq_{A_1 \times A_2 \times A_3} (1,1,0)$ であるが，$(1,0,0)$ と $(0,1,0)$ は比較可能ではない.

(2)　$A = \{0, 1, \cdots, N_A\}$，$B = \{0, 1, \cdots, N_B\}$ とし，例 1.1 (2) の順序を用いると，直積集合は

$$A \times B = \{(a, b) : 0 \leqq a \leqq N_A,\ 0 \leqq b \leqq N_B\}$$

であり，**図 1.1** の格子点からなる集合である．例えば $(1,1) \leqq_{A \times B} (2,3)$ であるが，$(1,3)$ と $(3,1)$ は比較できない.

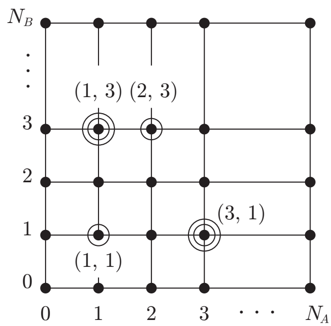

図 1.1　例 1.2 (2) の直積順序集合

(3)　n 個の部品からなるシステムで部品 i の状態空間を順序集合 $(A_i, \leqq_{A_i})$ とすれば，直積順序集合 $\left(\prod_{i=1}^{n} A_i,\ \leqq_{\prod_{i=1}^{n} A_i}\right)$ は，n 個の部品の状態の組間の優劣を示す.

索　　引

【る】

【れ】

【わ】

【B】

【D】

【F】

【I】

【K】

【M】

【N】

【P】

【R】

【S】

【記号数字】

―― 著 者 略 歴 ――

1974年　名古屋工業大学工学部計測工業科卒業
1976年　名古屋工業大学大学院修士課程修了（計測工学専攻）
1978年　大阪大学大学院博士後期課程退学（応用物理学専攻）
1978年　大阪大学助手
1981年　工学博士（大阪大学）
1989年　愛知工業大学助教授
1995年　名古屋工業大学助教授
2000年　名古屋工業大学教授
2016年　名古屋工業大学名誉教授

システム信頼性の数理
Mathematics of System Reliability

2019 年 12 月 5 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　大(おお)鑄(い)　史(ふみ)男(お)
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–02837–9　C3355　Printed in Japan　（金）