

シリーズ 情報科学における確率モデル 7

Series on Stochastic Models in Informatics and Data Science

# システム信頼性の数理

大鑄 史男【著】

コロナ社



シリーズ 情報科学における確率モデル  
編集委員会

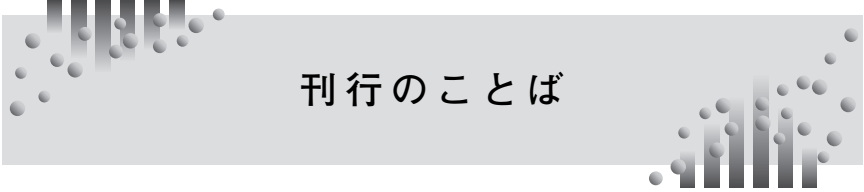
編集委員長

博士（工学） 土肥 正（広島大学）

編集委員

博士（工学） 栗田多喜夫（広島大学）

博士（工学） 岡村 寛之（広島大学）



## 刊行のこ と ば

われわれを取り巻く環境は、多くの場合、確定的というよりもむしろ不確実性にさらされており、自然科学、人文・社会科学、工学のあらゆる領域において不確実な現象を定量的に取り扱う必然性が生じる。「確率モデル」とは不確実な現象を数理的に記述する手段であり、古くから多くの領域において独自のモデルが考案されてきた経緯がある。情報化社会の成熟期である現在、幅広い裾野をもつ情報科学における多様な分野においてさえも、不確実性下での現象を数理的に記述し、データに基づいた定量的分析を行う必要性が増している。

一言で「確率モデル」といっても、その本質的な意味や粒度は各個別領域ごとに異なっている。統計物理学や数理生物学で現れる確率モデルでは、物理的な現象や実験的観測結果を数理的に記述する過程において不確実性を考慮し、さまざまな現象を説明するための描写をより精緻化することを目指している。一方、統計学やデータサイエンスの文脈で出現する確率モデルは、データ分析技術における数理的な仮定や確率分布関数そのものを表すことが多い。社会科学や工学の領域では、あらかじめモデルの抽象度を規定したうえで、人工物としてのシステムやそれによって派生する複雑な現象をモデルによって表現し、モデルの制御や評価を通じて現実に役立つ知見を導くことが目的となる。

昨今注目を集めている、ビッグデータ解析や人工知能開発の核となる機械学習の分野においても、確率モデルの重要性は十分に認識されていることは周知の通りである。一見して、機械学習技術は、深層学習、強化学習、サポートベクターマシンといったアルゴリズムの違いに基づいた縦串の分類と、自然言語処理、音声・画像認識、ロボット制御などの応用領域の違いによる横串の分類によって特徴づけられる。しかしながら、現実の問題を「モデリング」するためには経験とセンスが必要であるため、既存の手法やアルゴリズムをそのまま

## ii 刊 行 の こ と ば


適用するだけでは不十分であることが多い。

本シリーズでは、情報科学分野で必要とされる確率・統計技法に焦点を当て、個別分野ごとに発展してきた確率モデルに関する理論的成果をオムニバス形式で俯瞰することを目指す。各分野固有の理論的な背景を深く理解しながらも、理論展開の主役はあくまでモデリングとアルゴリズムであり、確率論、統計学、最適化理論、学習理論がコア技術に相当する。このように「確率モデル」にスポットライトを当てながら、情報科学の広範な領域を深く概観するシリーズは多く見当たらず、データサイエンス、情報工学、オペレーションズ・リサーチなどの各領域に点在していた成果をモデリングの観点からあらためて整理した内容となっている。

本シリーズを構成する各書目は、おのおのの分野の第一線で活躍する研究者に執筆をお願いしており、初学者を対象とした教科書というよりも、各分野の体系を網羅的に著した専門書の色彩が強い。よって、基本的な数理的技法をマスターしたうえで、各分野における研究の最先端に上り詰めようとする意欲のある研究者や大学院生を読者として想定している。本シリーズの中に、読者の皆さんのアイデアやイマジネーションを掻き立てるような座右の書が含まれていたならば、編者にとっては存外の喜びである。

2018年11月

編集委員長 土肥 正



## まえがき

本書では、2 状態から多状態に至るシステムの信頼性に関する順序集合論的および確率論的な議論を概観する。

2 状態システムではシステムおよび部品の状態として故障と正常のみを考え、システムの状態は部品の状態の組合せによって一意に定まるとされる。部品やシステムのそれぞれの状態空間は必然的にブール束になり、確率論的な議論は寿命分布関数によるものになる。このような枠組みでの議論は 1950 年代から始まり、おおよそ 1980 年代までの間に多くの研究者達によってなされてきた。2 状態システムについての議論はほぼ収束し、その研究成果は Barlow and Proschan<sup>4), 7)</sup>†にまとめられており、故障木解析 (fault tree analysis, FTA) や安全・リスク解析などの信頼性解析手法の基盤をなしている。

一方で、圧力や温度を考えるまでもなく、部品やシステムの状態が2 状態のみであることはなく、劣化状態を含めさまざまな状態があり得る。多状態システムについての議論は、1980 年代に始まり多くの研究がなされている。Lisnianski and Levitin<sup>60)</sup>, Lisnianski, Frenkel and Ding<sup>61)</sup>, Natvig<sup>67)</sup> のような実践的な立場からの書籍も出版されているが、理論としての体系化には未だ<sup>いま</sup>至っていない。

本書では、2 状態システムでのさまざまな概念を拡張する立場で、部品およびシステムの状態空間を全順序集合とした場合の議論を紹介する。状態空間が半順序集合の場合についてはその必要性を示唆し、最近の論文を紹介するにとどめる。

2 章で見られるように、2 状態システムの理論においては極小パス集合 (minimal path set) と極小カット集合 (minimal cut set) が根幹的な役割を果たす。FTA はこのことに対する一つの根拠を与える。FTA は、多数の要素からなる複雑な

---

† 肩付き数字は、巻末の引用・参考文献の番号を表す。

システムの故障や不具合事象（トップ事象と呼ばれるが）の原因を探し出すためのトップダウン的で実践的な手法であるが、このトップ事象に対する極小カット集合を最終的に与える。極小カット集合は、トップ事象を発生させるために必要な部品の事象の極小的な組合せであり、極小パス集合は極小カット集合に双対的な関係にある。極小カット集合や極小パス集合は、それぞれシステムに内在する並列システムや直列システムを定義し、システムの構造はこれらの直列または並列システムから再構成される。このことから、直列システムや並列システムなどの基本的なシステムによるシステムの分解と統合の観点が重要であり、確率的な信頼性評価方法の多くがこのような分解に依拠する。

本書の構成は以下のとおりである。信頼性理論では、順序集合論的な概念が、構造的および確率論的な議論の至るところでさまざまに姿を変えながら、基本的な道具として用いられる。1章では本書で用いる順序に関する基本的な概念を解説する。また信頼性理論に特有の状態ベクトルに対する切貼りのな操作について説明する。さらに統計的な正の相関性の概念の一つであるアソシエーション (association) を紹介する。これは、上記の直列システムまたは並列システムへの分解と統合を用いたシステムの信頼性評価において、重要な役割を果たす。

2章では、信頼性理論において最も基本的である、2状態単調システムの順序集合論的および確率論的な議論を紹介する。2状態単調システムの構造は、極小パスベクトルあるいは極小カットベクトルから一意に決まる。このことは、2状態システムの信頼性を議論する際の基盤をなす。

実際のシステムはモジュールの階層的な積上げで構成され、部品がむき出しの形で組み上げられているわけではない。この意味で、モジュール分解とそれを介したシステムの信頼性に関する議論は重要である。2章ではモジュールについての議論を紹介し、信頼性評価をモジュールの階層構造に従って積み上げることで、よりよい評価が得られることを証明する。

3章はエージング (aging) の概念を扱う。IFR (increasing failure rate) 性はよく知られているエージングの一つであり直感的に理解しやすいが、システムの性質として考えた場合、むしろ IFRA (increasing failure rate average)

性が重要であり中心的な位置を占める。これに対して、IFR 性は直列システムに密接に関係する。さらにシステムの寿命分布が指数分布であるとき、システムの構造は直列に限定されるだけでなく、部品の寿命分布も指数分布に限定される。これらのことについて、他のエージングの概念とともに3章で詳説する。

3章では、ショックモデルについてもふれる。ショックモデルは、環境からのストレスとそれに対するシステムの耐性の二つの要素から構成されるが、この耐性をもつ離散的な分布関数としてのエージング性が、システムの寿命分布関数のエージング性に反映される。さらに、IFRA 性がさまざまな確率過程の初期通過時間の性質として現れることから、そのいく分技巧的な定義にかかわらず自然な性質であることを示す。3章では、さらに、これらのエージングの概念を多変量の場合に拡張する。

4章、5章では2章、3章での議論を多状態に拡張する。多状態システムの順序集合論的な議論は4章で、信頼性評価方法とエージングの議論は5章で示される。2状態システムでの議論は、状態空間が二つの要素からなることからスムーズである。本書では状態空間を全順序集合とするが、比較的扱いやすいこのような場合でも、例えば、直列システムや並列システムの定義など、2状態では素朴に考えておけばよかったさまざまな概念が改めて問い直される。

5章では、多状態システムの確率過程論的な議論を行う。エージング性については2状態の場合と同様にIFRA 性が重要であり、IFR 閉包の成立はシステムの構造を直列システムに限定することが示される。

6章では2状態システムにおける部品の重要度について、7章では6章の議論を拡張し、多状態システムでの重要度について述べる。部品の重要度は、システムにおいてその部品がどの程度重要であるかの指標である。Birnbaum 重要度を基本とし、これから派生してくるいくつかの重要度が提案されており、システムの安全・リスク解析などに応用される。Birnbaum 重要度は臨界状態ベクトルによって定義される。本書では、この臨界状態ベクトルを極小カットおよび極小パスベクトルから得るためのアルゴリズムを示し、さらに実際によく見られる構造である直・並列システムにおける一連の重要度の相互関係につい

て議論する。

最後に、状態空間が半順序の場合の理論構築が求められることを簡単な例によって示唆し、その際のシステムの定義を作業仮説として与える。さらに、このような多状態システムのモデルが実際の多層的なネットワークのモデルになり得るとともに、さらに拡張が必要であることについてもふれる。

レリバント (relevant) とアソシエイト (associate) の訳語について述べておく。いずれも「関係する」、「関連する」といった意味であるが、本書ではそれぞれの読みであるレリバントとアソシエイトを用いる。

レリバントは部品に関する概念であり、システムの機能においてその部品を外せないことを意味し、その度合いが重要度の概念につながる。日本語の「関係する」や「関連する」といったイメージではなく、適切な日本語が見当たらないため、そのままの読みを用いることとした。


アソシエイトは確率変数間の相関性を意味する。二つの確率変数の場合、 $X$  と  $Y$  がアソシエイトであるとは、任意の単調増加な関数  $f$  と  $g$  に対して、 $Cov[f(X, Y), g(X, Y)] \geq 0$  であるとして定義され、単純ではない正の相関性を意味する。 $Cov[f(X), g(Y)] \geq 0$  の場合を考えてみる。単調増加な関数  $f$  と  $g$  の選択によって、確率変数  $X$  と  $Y$  の任意の部分を拡大・縮小できる。上の不等号関係は、それぞれの確率変数をどのように拡大・縮小してもそれらの間に正の相関があることを意味する。アソシエイトは、正の相関性が、 $X$  と  $Y$  から単調増加関数によって生成されるどのような確率変数についても成立することを要請しており、 $X$  と  $Y$  の多様な正の相互依存関係をイメージさせ、適切な訳語を見出せない。このため、本書ではレリバントと同様にその読みを用いることとした。本書では、一般的に順序集合上の確率についてアソシエイトを定義する。

広島大学の土肥正教授には本書執筆の機会をいただきました。ここに深く感謝致します。

2019年10月

著 者





# 目 次

## 第 1 章 順序集合論の準備と記号

---

1.1 順序集合, 全順序集合 .....	1
1.1.1 順序集合	1
1.1.2 擬順序集合	3
1.1.3 直積順序集合	4
1.1.4 ハッセ図	6
1.2 極大元, 最大元, 極小限, 最小元 .....	7
1.3 上側単調集合と下側単調集合 .....	9
1.4 上限と下限 .....	12
1.4.1 上限と下限の定義	12
1.4.2 束	13
1.5 単調増加関数 .....	14
1.6 アソシエイトな確率 .....	16
1.7 状態ベクトルに対する操作と記号 .....	18

## 第 2 章 2状態システム

---

2.1 構造関数 .....	21
2.1.1 2状態システムの定義	21
2.1.2 コヒーレントシステムの例	23
2.1.3 構造関数と直列, 並列システム	28
2.1.4 双対システム	30
2.2 極小パスベクトル, 極小カットベクトル .....	31

2.2.1	極小パスベクトルと極小カットベクトルの定義	31
2.2.2	単調構造関数の直・並列表現と並・直列表現	36
2.3	モジュール分解	39
2.3.1	モジュール	39
2.3.2	極小カットベクトル, 極小パスベクトルとモジュール分解	43
2.4	システムの信頼性の計算	45
2.4.1	システムの信頼性	45
2.4.2	包除原理	46
2.4.3	排反積和法	48
2.4.4	信頼度関数とブール変数による期待値計算	49
2.4.5	$k$ -out-of- $n$ :G システムの信頼度によるシステム信頼度の凸表現	51
2.4.6	信頼度関数の S 形	54
2.5	システム信頼度の上界と下界	55
2.5.1	極小パスおよびカットベクトルによるシステム信頼度の上界と下界	55
2.5.2	モジュール分解によるシステム信頼度の上界と下界	57

### 第 3 章 2 状態システムの劣化過程

---

3.1	寿命分布関数	62
3.1.1	寿命分布	62
3.1.2	バスタブ曲線	67
3.1.3	寿命分布のパラメーター族	68
3.1.4	ポアソン過程	72
3.2	エージングによる寿命分布関数のクラス分類	77
3.2.1	エージング	78
3.2.2	IFR 分布と指数分布	84
3.2.3	IFRA 分布と指数分布	85
3.3	コヒーレントシステムの寿命分布	88
3.3.1	コヒーレントシステムの寿命分布の上界と下界	89
3.3.2	コヒーレントシステムと閉包性	90
3.4	エージングとシステムの構造	91
3.4.1	指数分布とコヒーレントシステムの構造	92

3.4.2	IFR 分布とコヒーレントシステムの構造	94
3.4.3	IFRA 分布とコヒーレントシステム	94
3.5	エージング性の和に関する保存性	99
3.6	再生過程	103
3.6.1	定義と再生回数の分布	103
3.6.2	再生関数 $M(t) = \mathbf{E}[N(t)]$	107
3.7	ショックモデル	110
3.7.1	ポアソンショックモデルのエージング性	112
3.7.2	累積損傷臨界モデル	114
3.7.3	一変量ショックモデルの拡張	119
3.7.4	二変量ショックモデル	120
3.8	多変量エージングと正の相関	124
3.8.1	多変量エージング	124
3.8.2	境界分布	128
3.8.3	二変量アーラン分布の NBU 性と IFRA 性	129
3.8.4	多変量エージングの定義について	130
3.8.5	正の相関性	131

## 第 4 章 多状態システム

---

4.1	多状態システムの定義	132
4.2	直列システムと並列システム	137
4.3	$k$ -out-of- $n$ :G システム	145
4.3.1	内包されるシステム	145
4.3.2	$k$ -out-of- $n$ :G システムの定義と性質	145
4.4	モジュール分解	148

## 第 5 章 多状態システムの確率的評価と劣化過程

---

5.1	多状態システムの確率的評価	156
-----	---------------	-----

5.1.1	多状態システムの信頼性評価方法	156
5.1.2	モジュール分解によるシステムの信頼性評価	158
5.1.3	モジュール分解による上界と下界の計算	161
5.1.4	数 値 例	162
5.2	多状態システムの劣化過程	166
5.2.1	IFRA 閉包定理と NBU 閉包定理	166
5.2.2	多状態システムのハザード変換	170
5.2.3	IFRA 過程と NBU 過程	180

## 第 6 章 2 状態システムにおける重要度

6.1	Birnbaum 重要度	181
6.1.1	臨界状態ベクトル	181
6.1.2	臨界状態ベクトルを求めるためのアルゴリズム	185
6.1.3	Birnbaum 重要度	187
6.2	臨 界 重 要 度	189
6.3	狭義臨界重要度	192
6.4	Fussell-Vesley 重要度	194
6.5	いくつかの例	196
6.6	モジュール分解を介した重要度の計算	201
6.7	直・並列システムにおける重要度の計算	207
6.7.1	直・並列システムにおける Birnbaum 重要度	208
6.7.2	直・並列システムにおける臨界重要度	208
6.7.3	直・並列システムにおける Fussell-Vesely 重要度	209
6.7.4	Birnbaum, 臨界および Fussell-Vesely 重要度における大小関係の間の整合性	209
6.7.5	直・並列システムにおける狭義臨界重要度	210
6.8	Barlow-Proschan 重要度	211
6.8.1	Barlow-Proschan 重要度—修理を考慮しない場合—	212
6.8.2	平均をとる場合—修理を考慮しない場合—	212
6.8.3	Barlow-Proschan 重要度—部品ごとに修理人が存在する場合—	213

6.8.4 故障頻度と Birnbaum 重要度	215
--------------------------	-----

## 第7章 多状態システムにおける重要度

7.1 多状態臨界状態ベクトル	218
7.2 多状態 Birnbaum 重要度	225
7.3 多状態 Birnbaum 重要度とモジュール分解	227
7.4 多状態臨界重要度	230
7.4.1 多状態臨界重要度の定義	230
7.4.2 モジュール分解と臨界重要度との関係	231
7.5 多状態 Barlow-Proschan 重要度	233
7.5.1 確率過程 $\{X_i(t), t \geq 0\}$ と保全	233
7.5.2 時点重要度	235
7.5.3 多状態 Barlow-Proschan 重要度—保全を考慮しない場合—	235
7.5.4 平均をとる場合—保全を考慮しない場合—	236
7.5.5 多状態 Barlow-Proschan 重要度—保全を考慮する場合—	236
7.6 二つの部品と修理人—人の場合の重要度について—	238

## 第8章 多状態システムの拡張—あとがきにかえて—

8.1 状態空間の順序構造	240
8.2 ネットワークとしての状態空間	241
引用・参考文献	243
索引	252

# 1

## 順序集合論の準備と記号

本章では、われわれの議論に関係する範囲内での順序に関する概念を解説するとともに、順序集合上のアソシエイトな確率を紹介する。さらに、本書に特有の記号についても説明する。なお、集合については標準的な記号を用い、確率論の入門的な素養は前提とする。

### 1.1 順序集合, 全順序集合

#### 1.1.1 順序集合

**定義 1.1** 集合  $A$  における関係  $\leq$  はつぎの条件を満たすとき、順序関係 (order relation) または順序 (order) と呼ぶ。

(1) (反射律 (reflexivity, reflexive law))  $A$  のすべての元  $a$  について、  
 $a \leq a$ .

(2) (反対称律 (antisymmetry, antisymmetric law))  $A$  の元  $a, b$  について、

$$a \leq b, b \leq a \Rightarrow a = b.$$

(3) (推移律 (transitivity, transitive law))  $A$  の元  $a, b, c$  について、

$$a \leq b, b \leq c \Rightarrow a \leq c.$$

$A$  の元  $a, b$  について、 $a \leq b$  または  $b \leq a$  であるとき、 $a$  と  $b$  は比較可能

## 2 1. 順序集合論の準備と記号

(comparable) であるという.  $a \leq b$  かつ  $a \neq b$  であるとき,  $a < b$  と書く.  $A$  のすべての二つの元が比較可能であるとき, 順序  $\leq$  は全順序 (totally order) と呼ばれる.

集合  $A$  とその上の順序  $\leq$  を組にした  $(A, \leq)$  を順序集合 (ordered set), 順序が全順序であるときは全順序集合 (totally ordered set) と呼ぶ. 必ずしも全順序でないとき, 順序  $\leq$  は半順序 (partially order),  $(A, \leq)$  は半順序集合 (partially ordered set) と呼ばれる. 考えている順序が明らかで誤解がない場合は, 順序の記号を明記せずに順序集合  $A$  と呼ぶ. また,  $A$  が有限集合 (finite set) であるとき, 有限順序集合 (finit order set) と呼ぶ.

---

### 例 1.1

- (1) 二つの元からなる集合  $A = \{0, 1\}$  に  $0 < 1$  として順序を定義したとき,  $(A, \leq)$  は全順序集合である. 2 状態システムの信頼性理論では, 0 は故障状態を, 1 は正常状態または動作状態を意味し, 部品やシステムの状態空間として用いられる.
- (2)  $N + 1$  個の元からなる集合  $A = \{0, 1, \dots, N\}$  に  $0 < 1 < \dots < N$  として順序を定義したとき,  $(A, \leq)$  は全順序集合である. 0 は故障状態,  $N$  は正常に動作している状態,  $1, \dots, N - 1$  は劣化状態を意味し, 多状態の信頼性理論で部品およびシステムの状態空間として用いられる.
- (3) 五つの元からなる集合  $A = \{a, b, c, d, e\}$  に,  $a < c, b < c, c < d, c < e$  として順序を定義すると,  $a$  と  $b$  や  $d$  と  $e$  はそれぞれ比較可能でなく,  $(A, \leq)$  は半順序集合である. 半順序集合は, 順序がつかない状態が存在し得る場合の状態空間として用いられる.

---

順序集合  $(A, \leq)$  において,  $a \leq b$  である  $a, b \in A$  に対して

$$[a, b] = \{x \in A : a \leq x \leq b\}, \quad (a, b] = \{x \in A : a < x \leq b\},$$

$$[a, b) = \{x \in A : a \leq x < b\}, \quad (a, b) = \{x \in A : a < x < b\},$$

$$[a, \rightarrow) = \{x \in A : a \leq x\}, \quad (\leftarrow, b] = \{x \in A : x \leq b\},$$

$$(a, \rightarrow) = \{x \in A : a < x\}, \quad (\leftarrow, b) = \{x \in A : x < b\}$$

の形の  $A$  の部分集合を区間と呼ぶ.  $[, ], (, )$  などの括弧の意味は通常の実数値からなる区間の場合と同様で, 端の点を含む, 含まないを意味し, 閉区間, 开区間, 右閉区間などと呼ばれる. 信頼性理論では,  $[a, \rightarrow)$  と  $(\leftarrow, b]$  の形の区間が重要である.

順序集合  $(A, \leq)$  において, 部分集合  $M \subseteq A$  上の順序  $\leq_M$  を, つぎのように定義する.  $x, y \in M$  に対して,

$$x \leq_M y \iff x \leq y.$$

順序集合  $(M, \leq_M)$  を  $(A, \leq)$  の部分順序集合と呼び, 簡単に  $(M, \leq)$  と書く.

順序集合  $(A, \leq)$  において,  $A$  上の順序  $\leq_D$  を,  $x, y \in A$  に対して,

$$x \leq_D y \iff y \leq x$$

と定義する. 順序  $\leq_D$  を  $\leq$  の双対順序 (dual order) と呼び,  $(A, \leq_D)$  を  $(A, \leq)$  の双対順序集合 (dual ordered set) という.

### 1.1.2 擬順序集合

---

**定義 1.2** 集合  $A$  上の関係  $\leq_s$  が以下の条件を満たすとき, 擬順序関係 (pseudo-order relation) であるという.

- (1) (反射律)  $A$  のすべての元  $a$  に対して,  $a \leq_s a$ ,
  - (2) (推移律)  $A$  の元  $a, b, c$  に対して,  $a \leq_s b, b \leq_s c \Rightarrow a \leq_s c$ .
- 

$a \leq_s b, b \leq_s a$  のとき,  $a = b$  は必ずしも成立しないが, 同値関係 (equivalence relation) を考えることで順序集合にできる. 擬順序集合  $(A, \leq_s)$  の  $A$  上に二項関係 (binary relation)  $=_s$  をつぎのように定義する.  $a, b \in A$  に対して,

$$a =_s b \iff a \leq_s b, b \leq_s a.$$



#### 4 1. 順序集合論の準備と記号

この関係は同値関係であり、つぎの条件を満たす。

- (1) (反射律)  $A$  のすべての元  $a$  について、 $a =_s a$ ,
- (2) (対称律 (symmetry, symmetric law))  $A$  の元  $a, b$  について、 $a =_s b \implies b =_s a$ ,
- (3) (推移率)  $A$  の元  $a, b, c$  について、 $a =_s b, b =_s c \implies a =_s c$ .

この同値関係による  $A$  の商空間 (quotient space)  $A|_{=s}$  の要素である同値類 (equivalence class)  $\alpha, \beta$  に対して、順序  $\leq_s$  を以下のように定義できる。

$$\alpha \leq_s \beta \iff a \in \alpha, b \in \beta, a \leq_s b$$

$a, b$  はそれぞれの同値類の元であり、上記の同値類間の順序  $\leq_s$  の定義はこれらの元の選択によらない。

##### 1.1.3 直積順序集合

$(A, \leq_A), (B, \leq_B)$  を二つの順序集合とする。直積集合  $A \times B$  の上につぎのようにして定義される順序  $\leq_{A \times B}$  を直積順序 (product order) と呼び、 $(A \times B, \leq_{A \times B})$  をこれら二つの順序集合の直積順序集合 (product ordered set) と呼ぶ。 $A \times B$  の元  $(a, b), (a', b')$  に対して

$$(a, b) \leq_{A \times B} (a', b') \iff a \leq_A a', b \leq_B b'.$$

したがって、 $a <_A a'$  かつ  $b' <_B b$  であるとき、 $(a, b)$  と  $(a', b')$  は直積順序に関して比較可能ではない。さらに  $a$  と  $a'$  または  $b$  と  $b'$  が比較可能でなければ、 $(a, b)$  と  $(a', b')$  は比較可能ではない。

順序集合  $(A_i, \leq_{A_i})$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) に対して直積順序集合  $(\prod_{i=1}^n A_i, \leq_{\prod_{i=1}^n A_i})$  が定義でき、 $\prod_{i=1}^n A_i$  の要素  $\mathbf{a} = (a_1, \dots, a_n)$  と  $\mathbf{b} = (b_1, \dots, b_n)$  に対して

$$(a_1, \dots, a_n) \leq_{\prod_{i=1}^n A_i} (b_1, \dots, b_n) \iff a_i \leq_{A_i} b_i, i = 1, \dots, n.$$

例 1.2 例 1.1 を用いた直積順序集合の例を挙げる.

- (1) 例 1.1 (1) の順序を用いて,  $(A_i, \leq_{A_i}) = (\{0, 1\}, \leq)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) とすると, 直積順序集合  $(A_1 \times A_2 \times A_3, \leq_{A_1 \times A_2 \times A_3})$  は

$$A_1 \times A_2 \times A_3 = \{(0, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 0), (1, 1, 1)\}$$

である. 三つの部品からなるシステムを考えると, 上記の直積順序は三つの部品の状態の組間の優劣を意味し, 例えば,  $(1, 0, 0) \leq_{A_1 \times A_2 \times A_3} (1, 1, 0)$  であるが,  $(1, 0, 0)$  と  $(0, 1, 0)$  は比較可能ではない.

- (2)  $A = \{0, 1, \dots, N_A\}$ ,  $B = \{0, 1, \dots, N_B\}$  とし, 例 1.1 (2) の順序を用いると, 直積集合は

$$A \times B = \{(a, b) : 0 \leq a \leq N_A, 0 \leq b \leq N_B\}$$

であり, 図 1.1 の格子点からなる集合である. 例えば  $(1, 1) \leq_{A \times B} (2, 3)$  であるが,  $(1, 3)$  と  $(3, 1)$  は比較できない.

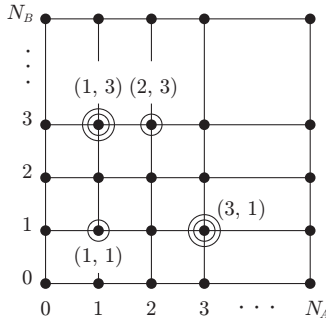


図 1.1 例 1.2 (2) の直積順序集合

- (3)  $n$  個の部品からなるシステムで部品  $i$  の状態空間を順序集合  $(A_i, \leq_{A_i})$  とすれば, 直積順序集合  $(\prod_{i=1}^n A_i, \leq_{\prod_{i=1}^n A_i})$  は,  $n$  個の部品の状態の組間の優劣を示す.

# 索引

<b>【あ】</b>		極限平均 Barlow-Proschan 重要度 216	<b>【さ】</b>	
アソシエイト	16, 159	極小カット集合 31	最小元	7
アーラン分布	69	極小カットベクトル 31	再生過程	103
<b>【い】</b>		極小元 7	再生関数	107
位相パラメーター	69	極小ノーマル 136	最大元	7
一変量ショックモデル	111	極小パス集合 31	残存寿命	108
<b>【う】</b>		極小パスベクトル 31	残存寿命分布関数	63
上側単調集合	9	極大元 7	<b>【し】</b>	
上側単調部分集合	9	極大ノーマル 136	指数分布	68
上に有界	12	極値統計 71	指数分布関数	66
<b>【え】</b>		切り口 168	下側単調集合	10
エージング	64, 77	<b>【く】</b>	下側単調部分集合	10
<b>【か】</b>		偶発故障期 67	下に有界	12
開区間	3	区 間 3	時点重要度	211
下 限	12	<b>【け】</b>	時点 Birnbaum 重要度	211
ガンマ分布	69	形状パラメーター 69, 70	尺度パラメーター	69, 70
<b>【き】</b>		下 界 12	写 像	14
幾何分布	83	<b>【こ】</b>	寿命関数	88
擬順序関係	3	交叉の性質 85	寿命分布関数	63
基本再生定理	107	更新過程 103	順 序	1
境界 NBU 確率	128	構造関数 21, 132, 241	順序関係	1
狭義コヒーレント	134	構造重要度 188	順序集合	2
狭義臨界重要度	192	交替再生過程 214	上 界	12
狭義臨界信頼度重要度	192	故障状態 21	商空間	4
狭義臨界信頼度重要度	192	故障頻度 216	上 限	12
狭義レリバント	134	故障率 63	条件付き故障率	63
強度関数	77	故障率関数 63	状態空間	21
極限平均重要度	212	コヒーレント 134	状態ベクトル	21, 132
		コヒーレントシステム 23	初期故障期	67
			初期通過時間	116
			信頼性	45
			信頼度	45
			信頼度関数	50, 63

信頼度重要度 188

【す】

推 移 235

推移律 1

枢軸分解 50

【せ】

正規分布 71

積の連鎖則 205, 228, 232

切断正規分布 71

全順序 2

全順序集合 2

【そ】

像確率 20

双対システム 30

双対順序 3

双対順序集合 3

束 13

【た】

退 化 20, 92

対称律 4

対数正規分布 71

多重線形多項式 37

多状態システム 132, 241

多状態 Barlow-Proschan  
重要度 235

たたみ込み 99

脱出時間 62, 88

単調減少 14

単調システム 23, 133

単調増加 14

【ち】

直積順序 4

直積順序集合 4

直・並列システム 25

直列システム 23, 137

直列システムの重要度 196

【と】

統合構造関数 43, 149

統合システム 43, 149

動作状態 21

同値関係 3

同値類 4

独立増分 72

【に】

二項関係 3

二項分布 83

二変量アーラン分布 123

二変量指数分布関数 120

二変量ポアソンショック  
モデル 120

【の】

ノーマル 136, 149

ノーマルコヒーレントシス  
テム 159

【は】

排反積和法 48

ハザード関数 64

ハザード変換 175

ハッセ図 6

バーンイン 67

反射律 1

半順序 2

半順序集合 2

反対称律 1

【ひ】

比較可能 1

非定常ポアソン過程 77

【ふ】

不信頼度 45

負の二項分布 84

部分集合 3

部分順序集合 3

ブラックウェルの再生定理 108

ブリッジシステム 27

【へ】

平均重要度 212

平均値関数 77

閉区間 3

並列システム 24, 137

——の重要度 198

バルヌーイ分布 83

【ほ】

ポアソン過程 72

ポアソンショックモデル 111

ポアソン分布 84

包除原理 46

【ま】

摩耗故障期 68

マルコフ性 68

【み】

右閉区間 3

三つのモジュールの定理 42

密度関数 63

【む】

無記憶性 68, 121

【も】

モジュール 39, 43, 149

モジュール構造関数 43, 149

モジュールシステム 43, 149

モジュール分解 43, 149

【ゆ】

優加法的 80

有限順序集合 2

誘導された確率 20

【り】

離散的 DMRL 83



— 著者略歴 —

1974年 名古屋工業大学工学部計測工業科卒業  
1976年 名古屋工業大学大学院修士課程修了（計測工学専攻）  
1978年 大阪大学大学院博士後期課程退学（応用物理学専攻）  
1978年 大阪大学助手  
1981年 工学博士（大阪大学）  
1989年 愛知工業大学助教授  
1995年 名古屋工業大学助教授  
2000年 名古屋工業大学教授  
2016年 名古屋工業大学名誉教授

## システム信頼性の数理

Mathematics of System Reliability

© Fumio Ohi 2019

2019年12月5日 初版第1刷発行

検印省略

著者 大 鑄 史 男  
発行者 株式会社 コロナ社  
代表者 牛 来 真 也  
印刷所 三美印刷株式会社  
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社  
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03) 3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-02837-9 C3355 Printed in Japan

(金)



 < 出版者著作権管理機構 委託出版物 >

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jccopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。