シリーズ　情報科学における確率モデル　*6*

Series on Stochastic Models in Informatics and Data Science

確率システムにおける制御理論

向谷　博明【著】

コロナ社

刊行のことば

われわれを取り巻く環境は，多くの場合，確定的というよりもむしろ不確実性にさらされており，自然科学，人文・社会科学，工学のあらゆる領域において不確実な現象を定量的に取り扱う必然性が生じる。「確率モデル」とは不確実な現象を数理的に記述する手段であり，古くから多くの領域において独自のモデルが考案されてきた経緯がある。情報化社会の成熟期である現在，幅広い裾野をもつ情報科学における多様な分野においてさえも，不確実性下での現象を数理的に記述し，データに基づいた定量的分析を行う必要性が増している。

一言で「確率モデル」といっても，その本質的な意味や粒度は各個別領域ごとに異なっている。統計物理学や数理生物学で現れる確率モデルでは，物理的な現象や実験的観測結果を数理的に記述する過程において不確実性を考慮し，さまざまな現象を説明するための描写をより精緻化することを目指している。一方，統計学やデータサイエンスの文脈で出現する確率モデルは，データ分析技術における数理的な仮定や確率分布関数そのものを表すことが多い。社会科学や工学の領域では，あらかじめモデルの抽象度を規定したうえで，人工物としてのシステムやそれによって派生する複雑な現象をモデルによって表現し，モデルの制御や評価を通じて現実に役立つ知見を導くことが目的となる。

昨今注目を集めている，ビッグデータ解析や人工知能開発の核となる機械学習の分野においても，確率モデルの重要性は十分に認識されていることは周知の通りである。一見して，機械学習技術は，深層学習，強化学習，サポートベクターマシンといったアルゴリズムの違いに基づいた縦串の分類と，自然言語処理，音声・画像認識，ロボット制御などの応用領域の違いによる横串の分類によって特徴づけられる。しかしながら，現実の問題を「モデリング」するためには経験とセンスが必要であるため，既存の手法やアルゴリズムをそのまま

適用するだけでは不十分であることが多い。

本シリーズでは，情報科学分野で必要とされる確率・統計技法に焦点を当て，個別分野ごとに発展してきた確率モデルに関する理論的成果をオムニバス形式で俯瞰することを目指す。各分野固有の理論的な背景を深く理解しながらも，理論展開の主役はあくまでモデリングとアルゴリズムであり，確率論，統計学，最適化理論，学習理論がコア技術に相当する。このように「確率モデル」にスポットライトを当てながら，情報科学の広範な領域を深く概観するシリーズは多く見当たらず，データサイエンス，情報工学，オペレーションズ・リサーチなどの各領域に点在していた成果をモデリングの観点からあらためて整理した内容となっている。

本シリーズを構成する各書目は，おのおのの分野の第一線で活躍する研究者に執筆をお願いしており，初学者を対象とした教科書というよりも，各分野の体系を網羅的に著した専門書の色彩が強い。よって，基本的な数理的技法をマスターしたうえで，各分野における研究の最先端に上り詰めようとする意欲のある研究者や大学院生を読者として想定している。本シリーズの中に，読者の皆さんのアイデアやイマジネーションを掻き立てるような座右の書が含まれていたならば，編者にとっては存外の喜びである。

2018 年 11 月

編集委員長　土肥　正

ま　え　が　き

自然システムにおける物理現象を数学の表記法に従って記述する場合，常微分方程式が利用される。場合によっては，化学プロセスのように，時間と空間によって現在の状態を記述するときには，偏微分方程式が利用される。これらの数理モデルは，ハミルトンの原理「始点と終点の二つの定点を運動する経路は，ラグランジアン，すなわち運動エネルギーとポテンシャルエネルギーの差の時間積分の最小値」として与えられる。実際，解析力学で見られるこの結果を利用して，マニピュレータなどの運動方程式が得られることはよく知られている。あるいは，数理モデルが具体的に得られない場合，統計的手法を基盤としたシステム同定によって，次数とパラメータが決定される。近年では，コンピュータおよびインターネットの発達に伴って，ビッグデータの採取や大規模計算が容易にかつ高速に行われるようになり，複雑な数理モデルを求めることが容易となった。その結果，プロトタイプを作る前に，シミュレーションを行うことによって，ものづくりの期間短縮に貢献していることは周知の事実である。

数学を基盤としたシステム理論の始まりとして，常微分方程式によって支配される確定システムにおけるラウス・フルビッツやナイキストの安定判別に代表される 1950 年代に現れた古典制御理論が挙げられる。その後，比例・積分・微分の三つのパラメータを操作することによって制御則を決定する PID 制御が確立された。PID 制御に至っては，現在でもその不動の地位を保っており，ありとあらゆる電気・機械・プロセスシステムで利用されている。1960 年代には，旧ソ連の有人月旅行計画や，アメリカのアポロ計画にみられるように，宇宙船の制御にシステム理論は多大な貢献をなした。具体的には，最大原理を応用した最短時間制御，あるいは，カルマンの提案した状態空間法に基づく時間領域の二次形式評価関数を最小にする最適レギュレータ問題が盛んに研究され，

応用された。さらには，カルマンフィルタに見られるように，必要な信号からノイズを除去する手法が確立された。1980 年代に入ると，最悪外乱を抑える H_∞ ノルムを評価基準とした H_∞ 制御が開発され，車両のセミアクティブサスペンション技術に応用された。近年では，伊藤の確率微分方程式による拡張や，マルコフ過程を導入した新たな確率システム論が研究されるなど，システム理論の発展は，枚挙にいとまがない。

本書では，伊藤の確率微分方程式によって支配される確率システムを基盤とした電気・機械・プロセスシステムにおけるシステム理論および動的ゲーム理論への応用について述べる。本書を読み進めるにあたり，線形代数学，微分積分学，微分方程式，最適化は既習であることを前提にしている。本書の前半部分では，確率システムにおける基礎となる内容から，システム理論の基盤に至るまで，広範囲に記述している。特に，1 章および 2 章に限っては，既習である場合，読み飛ばしてもなんら問題は生じないと思われる。後半では，動的ゲーム理論についての結果や関連する証明などを記述している。現在に至るまで，ダイナミクスを伴わない静的ゲーム理論に関しては，多数の良書が存在する。一方，ダイナミクスを前提とした動的ゲーム理論に関する書籍は，洋書では，多数の良書があるにもかかわらず，著者が知る限り，和書ではなかなか見当たらない。近年，原子力エネルギーから再生可能エネルギーへのシフトでは，ウィンドファームでの風車の配置問題，あるいは，それらの電力を利用したピークシフト・ピークカット問題などが知られている。さらには，複数ドローンに見られる協調制御など，動的ゲーム理論が大いに活躍できる諸問題が多く存在する。本書では，線形・非線形確率システムに対して，協力ゲームにおけるパレート最適戦略から始まり，非協力ゲームの代表であるナッシュ均衡戦略，階層戦略を構成する非協力スタッケルベルグ均衡戦略について記述している。また，H_∞ 制御問題を定式化できるサドルポイント均衡など，おもなゲーム問題を確率システムを基盤として論じている。通常，これらの戦略を得るためには，連立型確率リカッチ代数方程式や，非線形システムでは，ハミルトン・ヤコビ・ベルマン方程式で有名な偏微分方程式を解く必要がある。本書では，それらの解法

についても詳細を述べている。さらに，MATLAB を利用したシミュレーションも行っている。MATLAB にはさまざまな Tool Box が存在し，制御系設計を容易にし，かつ，Simulink によって，視覚的に設計することが可能となる。

最後に，前半は，偉大な先人による確率システムに関する良書があるにもかかわらず，薄学な著者による記述をお許しいただきたい。動的ゲーム理論に関しては，詳細な証明は記述できなかったが，概念を理解するには十分と考える。本書によって，動的ゲーム問題が，実際の社会問題を解決する一つの手段として利用されることを願ってやまない。また，本書を作成するにあたり，川上恭平氏には，証明の確認や原稿の校閲を行っていただいた。ここに改めて謝辞を述べさせていただく。

2019 年 5 月

向谷　博明

目　　　次

第1章　数学的準備

第2章　確率過程論

第3章　連続・離散時間線形確率システム

第4章　数値計算アルゴリズム

第5章　マルコフジャンプ確率システム

第6章　非線形確率システム

第 7 章　動的ゲーム理論への応用

1 数学的準備

ここでは，本書で学習するにあたって必要となる数学の基礎的内容について説明を行う。また，関連する表記法についても説明を行う。基礎的内容に関しては，最適化手法を重点に説明を行う。さらに，最適解を得るために必要な数値計算法について触れる。その後，システムの安定性から始まり，システム制御理論ではおなじみの最適レギュレータ問題に関して考察を行う。特に，最大原理や動的計画法による解法について説明を行う。また，近年のシステム制御理論の成果として重要な H_∞ 制御や，線形行列不等式（LMI）について論じる。一方，数学的表記法に関しては，ベクトル・行列表現を導入することによって，記述が簡単化され，見通しがよくなることが示される[1),2)]。

1.1 ベクトル・行列の性質

まず，n 次元実ベクトルを

$$\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$$

のように定義する。本章では，ベクトルを $\boldsymbol{x}$ のように表記するが，以後，特に断らず x のまま記述している場合があることに注意されたい。この $\boldsymbol{x}$ に対して，実数値スカラ関数 $f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = f(\boldsymbol{x}) \in \mathbb{R}$ の $\boldsymbol{x}$ に関する微分を以下のように定義する。

$$\frac{\partial f(\boldsymbol{x})}{\partial \boldsymbol{x}} = \nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad} f(\boldsymbol{x}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f}{\partial x_n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$

ここで，記号 ∇ を**ナブラ**（nabla），**grad** を**グラディエント**（gradient，勾配）と読む。

続いて，**ヘッセ行列**（Hessian matrix），およびその行列式である**ヘッシアン**（Hessian）を定義する。実数値関数 $f(\boldsymbol{x})$ において，すべての二階偏微分が存在すると仮定する。このとき，$f = f(\boldsymbol{x})$ のヘッセ行列 $H(f)$ は，以下で表される。

$$H(f) = \nabla^2 f = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{1.2}$$

また，式 (1.2) の行列式 $|H(f)| = \mathbf{det} H(f)$ がヘッシアンである。

つぎに，**首座小行列式**（principal minor）を以下のように定義する。

定義 1.1（**首座小行列式**）　つぎの行列 E

$$E = \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{bmatrix}$$

に対して，首座小行列式とは

$$e_{11},\ \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} \end{vmatrix},\ \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & e_{13} & e_{14} \\ e_{21} & e_{22} & e_{23} & e_{24} \\ e_{31} & e_{32} & e_{33} & e_{34} \\ e_{41} & e_{42} & e_{43} & e_{44} \end{vmatrix},$$

$$\cdots,\ \begin{vmatrix} e_{11} & e_{12} & \cdots & e_{1n} \\ e_{21} & e_{22} & \cdots & e_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ e_{n1} & e_{n2} & \cdots & e_{nn} \end{vmatrix}$$

を指す。

さらに，行列の符号に関する定義を与える。

定義 1.2（行列の符号）

(1) 対称行列 A が**準（半）正定値対称行列**（positive semidefinite symmetric matrix），すなわち，$A \geqq 0$ であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq 0)$ に対して $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} \geqq 0$ という条件を満たすことをいう。この条件は A のすべての固有値が非負であることと等価である。一方，対称行列 A が**正定値対称行列**（positive definite symmetric matrix）であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{x}$ $(\neq 0)$ に対して $\boldsymbol{x}^T A\boldsymbol{x} > 0$ という条件を満たすことをいう。この条件は A のすべての固有値が正であることと等価である。

(2) 対称行列 B が**準（半）負定値対称行列**（negative semidefinite symmetric matrix），すなわち，$B \leqq 0$ であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ $(\neq 0)$ に対して $\boldsymbol{y}^T B\boldsymbol{y} \leqq 0$ という条件を満たすことをいう。この条件は B のすべての固有値が非正であることと等価である。一方，対称行列 B が**負定値対称行列**（negative definite symmetric matrix）であるとは，任意のベクトル $\boldsymbol{y}$ $(\neq 0)$ に対して $\boldsymbol{y}^T B\boldsymbol{y} < 0$ という条件を満たすことを

いう。この条件は B のすべての固有値が負であることと等価である。

ここで，実対称行列の固有値は実数となることに注意されたい。そのほかに，必要十分条件の意味で，対称行列かつ，首座小行列式がすべて正であるとき，正定値対称行列である。同様に，負定値対称行列であれば，対称行列かつ，首座小行列式が負，正，負，正，…を交互に繰り返す。ここで，A が準正定値対称行列であれば，A の任意の首座小行列式が 0 以上はいえるが，その逆は成立しないことに注意されたい。一方，表記方法については，正定値対称行列 A に関して，$A > 0$ を $A \succ 0$ と表す場合もある。

実数値関数 $f(\boldsymbol{x})$ の傾きである $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad} f(\boldsymbol{x})$ が，ある点 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ で $\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{grad} f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ であるとき，$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において**停留点**（stationary point）をもつという。停留点において，ヘッセ行列 $H(f)$ を利用して，以下のように**極値**（extreme value）（極大値：local maximum，極小値：local minimum）を判定することが可能となる。

(1)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において $H(f)$ が正定値対称行列，すなわち，$H(f) > 0$ であれば，f は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において極小値をとる。

(2)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において $H(f)$ が負定値対称行列，すなわち，$H(f) < 0$ であれば，f は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において極大値をとる。

(3)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において $H(f)$ が正負両方の固有値をもつとき，f は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において**鞍**(あん)**点**（saddle point）となる。

ちなみに，上記以外の場合には，極値の判定は不確定である。特に，ヘッセ行列が準正定値対称行列や準負定値対称行列であるときには，この判定法ではなにもいえないことに注意を要する。

以上，多変数関数の極値判定をまとめれば以下となる。

式 (1.1) で与えられる $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \mathbf{grad} f(\boldsymbol{x})$ を計算する。

いま，$\nabla f(\boldsymbol{x}_0) = \mathbf{grad} f(\boldsymbol{x}_0) = 0$ であるとき，式 (1.2) で与えられるヘッセ行列 $H(f)$ 考える。このとき以下が成立する。

(1)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において

(1-1)　$H(f) > 0$

(1-2)　$H(f)$ の固有値がすべて正

(1-3)　$H(f)$ の首座小行列式がすべて正

のいずれかが成立すれば，$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において極小である。

(2)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において

(2-1)　$H(f) < 0$

(2-2)　$H(f)$ の固有値がすべて負

(2-3)　$H(f)$ の首座小行列式が負，正，負，正，…を交互に繰り返す

のいずれかが成立すれば，$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において極大である。

(3)　$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において

$H(f)$ が正と負の固有値の両方をもつ。ただし 0 を含まない。

が成立すれば，$f(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}_0$ において鞍点である。

1.2 二次形式と微分

二次形式（quadratic form）は，いくつかの変数に関する次数が 2 の斉次多項式であるものをいう。ここで，斉次多項式とは，同じ次数の単項式の和として得られるものを指す。例えば，$x^2 + 2xy + 3y^2$ は，二次の斉次多項式である。

実数値スカラ関数 $f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ における二次形式は，以下のように定義される。

$$f(\boldsymbol{x}) = f(x_1, x_2, \cdots, x_n) := \sum_{1 \leqq i \leqq j \leqq n} a_{ij} x_i x_j \tag{1.3}$$

ここで，一般に，行列 A は，対称行列 $\dfrac{A + A^T}{2}$ と，交代行列（ひずみ対称行列）$\dfrac{A - A^T}{2}$ の和で書ける。すなわち

$$A = \frac{A + A^T}{2} + \frac{A - A^T}{2}$$

索　　　　引

—— 著 者 略 歴 ——

1992年　広島大学総合科学部総合科学科数理情報科学コース卒業
1994年　広島大学大学院工学研究科博士課程前期修了（情報工学専攻）
1997年　広島大学大学院工学研究科博士課程後期修了（情報工学専攻），博士（工学）
1998年　広島市立大学助手
2002年　広島大学講師
2005年　広島大学助教授
2007年　広島大学准教授
2012年　広島大学教授
　　　　現在に至る

確率システムにおける制御理論

Control Theory of Stochastic Systems

2019 年 7 月 3 日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者　向谷（むかいだに）　博明（ひろあき）
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所　有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–02836–2 C3355　Printed in Japan　（新井）