ま　え　が　き

本 書 の 内 容

今世紀は，人間と共生できるロボットの世紀といわれています。このようなロボット製作には，常に変化する環境下で人間と協調して振る舞う知的エージェント技術が必要とされます。知的エージェント技術としては，人間の目的を実現する合理的な行為を推論する意思決定が必要となります。このような推論機構を理解するためには，その基本原理である命題論理，述語論理，導出原理，そして様相論理の理解が必要です。

本書で学ぶこと

本書では，これら数理論理学の諸概念に初めて接する大学 2, 3 年生を対象とし，筆者らが所属する近畿大学の情報学科で 10 年以上実施してきた数理論理学や知的エージェントに関する講義で提示してきたさまざまな例題を用いて，命題論理，述語論理，様相論理をできるだけ容易に解説することを意図しています。これらを解説する書籍は多数発行されていますが，どうしても形式的な記述と正確な証明を与えることに重きが置かれ，それに基づく授業は，筆者の学生時代の経験からも，数理論理学の初学者である大学 2, 3 年生にとってはハードルの高いもの（人によっては苦痛，人によっては安眠タイム）になりがちでした。

本書の特徴 1（**Prolog** プログラミング学習の併用）

そこで，述語論理については，論理型言語 Prolog の解説をする章を用意し，

実際に自動推論を体験しながら，その裏にある形式的な原理を追っていくという授業形態に対応できる章立てになっています。Prolog を用いると，確定節の集合としてのデータベースと，データベースへの問合せ，およびこれらのデータを元にした知識の推論が，ほかの言語を用いるよりもはるかに容易に実現できます。本書ではこのことを体験でき，決して安眠タイムにならないような特徴的な〈例〉を用意しています。漫画「ちびまる子ちゃん」†は，国内でも指折りに有名な一家であり，多くの学生が直感的に家族関係という構造を頭に思い浮かべることができる一家であると思います。本書で用意する〈例〉は，ちびまる子ちゃん一家 (さくら家) の家族構成をそのまま利用してデータベースを構築し，さくら家の家族関係を問い合わせるような再帰処理を行うプログラムです。このような再帰的に動作するプログラムを読者に作成・実行してもらうことで，自動推論の仕組みが容易に理解できるようになります。

本書の特徴 2（定理の証明ではなく例題重視）

述語論理の各種定義や定理の解説に関しては，できるだけ多くの直感的な〈例〉を掲載するように配慮しています。各種定理の証明については，すでに多くの書籍に掲載されており，また，その証明を大学 2, 3 年生が講義の中で理解することは時間的にも無理があるため，思い切って切り捨てます。その代わりにそれらの定理の意味がわかりやすくなるような〈例〉を多数用意しました。

これら数理論理学の基礎を解説した後，本書では，知的エージェントが行う合理的な行為を推論する意思決定機構の原理となる様相論理について解説します。日常生活に関する多くの推論には，その推論が行われる状況や時間の前後関係などのさまざまな要因が含まれます。例えば,「彼は，システムエンジニアになるかもしれない」のような，やがてそうなりうる可能性を持つ「可能性」や「彼は，いつも積極的である」のような，それ以外ではありえない「必然性」などを扱うことが必要となります。しかし，命題論理や一階述語論理では，このような状況の変化を扱うことはできません。様相論理とは，このような物事

† 本書に登場する「ちびまる子ちゃん」は，さくらももこ氏の著作物です。

の有り様や様子,「可能性」や「必然性」などを扱うことのできる論理です。

様相論理は，命題論理や述語論理をベースにした論理です。したがって，様相論理を学習することで，命題論理や述語論理のより深い理解にもつながります。本書では目的を達成する「合理的エージェント」を〈例〉として，そのようなエージェントが備えるべき性質を様相論理を用いて形式的に表現する方法を学びます。形式的記述の学習効果として，論理的思考の訓練になるとともに，厳密に記述することを目指すことで，まぎれのない議論ができるようになります。

本 書 の 構 成

本書で学習する各章の内容を簡単にまとめておきます。

1 章は，集合に関する基礎的な内容です。それ以降の章で多用する集合に関する各種表記方法に疑問が生じた際に，辞書的な使い方をすることを意図しています。

2 章から 6 章を順番に学習することで，数理論理学の内容が基礎から無理なく習得できます。ただし，7 章は後回しにせず，できれば 3, 4 章の述語論理の内容と Prolog プログラミングの内容を並行に学習されることをおすすめします。

2 章では，数理論理学の中でも最も基本的な命題論理について学習します。

3 章では，個別の「ものごと」を明記し「ものごと」の性質や複数の「ものごと」の間の関係,「ものごと」の量に関する知識を表現できる述語論理について学習します。

4 章では，Prolog など論理型言語の基本原理となっている導出原理について学習します。

5 章では，状況や場面や時刻に依存して真偽が変化する命題を扱うことができるさまざまな様相論理について学習します。

6 章では，様相論理の一つである BDI logic の論理式を用いて合理的エージェントの振舞いを厳密に記述します。この記述例を用いて形式的な記述のメリットについて学習します。

7 章は Prolog 入門です。Prolog の処理系である SWI – Prolog を各種 OS ごとにインストールする方法を解説し，SWI–Prolog を使って簡単な Prolog プログラミング方法を学習します。

なお，本書を使った講義用の資料，本書に掲載した図，様相論理に関する定理の証明などの補足資料を案内するページを Web 上に用意しました。下記の URL を参照してください。

http://www.info.kindai.ac.jp/MLRA/

2014 年 8 月

著　者

目　　　次

1. 集　　　合

2. 命　題　論　理

3. 述　語　論　理

4. 導　出　原　理

5.　様　相　論　理

6.　合理的エージェント

7.　Prolog

1 集　　　合

これから数理論理学に関するさまざまな事項を学習していきますが，その中で集合に関する多くの用語，記法などの基礎知識を用います。すでに中学，高校，大学の数学の授業で学習している内容ですが，本書を読み進める準備として，集合に関する諸概念を復習します。

1.1 集合の表し方

集合 (set) とは，明確に定義された「もの」の集まりのことです。ここでいう「もの」とは，自動車や動物など現実のもののほか，整数，実数など概念上のものを含みます。例えば“自然数”のように「もの」の個数が無限個になる場合も含め，明示的にそれがなんであるかを特定できるものに限ります。本節では，集合を表記する方法を学習します。

外延的記法

集合を表記するときに最も簡単な方法は，それに属するものを直接書き並べることです。例えば，りんご，みかん，バナナの三つの果物からなる集合は単に，式 (1.1) のように書くことができます。

$$\{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \tag{1.1}$$

このような集合の書き方を外延的記法といいます。この集合に対して，りんご, みかん, バナナはこの集合の**要素**または**元**といいます。

なお，重複する要素は一つとみなして，{ りんご, みかん, バナナ, りんご }

は式 (1.1) の集合と等しい集合になります。また，各要素は順序付けられていないので，{ バナナ, みかん, りんご } も式 (1.1) と等しい集合になります。集合の等しさ（=）については 1.2 節で正確に定義します。

内包的記法

外延的記法では，すべての果物からなる集合を書こうとするとちょっと困ります。

$$\{ \text{りんご},\ \text{みかん},\ \text{バナナ},\ \text{キウイ},\ \text{パパイヤ},\ \text{パイナップル},\ \cdots \}$$

キリがないですね。こういうときに便利なのが内包的記法と呼ばれる，式 (1.2) のような書き方です。

$$\{x \mid x \text{ は果物 }\} \tag{1.2}$$

縦棒 “|” の左側に集合の要素を表す変数（x でも y でもなんでも構いません）を，右側にその要素が満たすべき条件を書きます。

空 集 合（$\emptyset$）

なにも要素を持たない集合，あえて外延的記法で書くと $\{\}$ となるのですが，これを 1 文字で $\emptyset$ と書きます。

特別な意味を持つ集合

空集合 $\emptyset$ 以外にも数学でよく使用される特別な意味を持つ集合がいくつかあります。それらの表記方法を**表 1.1** にまとめておきます。

表 1.1 特別な意味を持つ集合の表記方法

集合を表す記号	集合の種類	使用例 (その意味)
$\mathbb{N}$	自然数全体の集合	$n \in \mathbb{N}$ (n は自然数)
$\mathbb{Z}$	整数全体の集合	$z \in \mathbb{Z}$ (z は整数)
$\mathbb{R}$	実数数全体の集合	$r \in \mathbb{R}$ (r は実数)
$\mathbb{Q}$	有理数全体の集合	$q \in \mathbb{Q}$ (q は有理数)

本書では，これら以外にも特別な集合がこの後にいくつか登場します。例えば，真理値の集合 $\mathbb{B}$ (p. 15) や，論理式全体の集合 $\mathbb{E}$ (p. 11) などです。これらのように「特別な意味を持つ集合」を，本書では白抜きのボールド体フォント[†]で表記します。

1.2　集合の要素や集合間の関係

ある集合が与えられたとき，ある「もの」がその集合の要素か否かを明示したり，ある集合が別の集合に含まれるか否かの包含関係を明示したり，複数の集合から新たな集合を求めたりするなど，集合に対してさまざまな操作を行うことができます。本節では集合に対するこれらの操作の表記方法についてまとめます。

要素と集合の関係（$\in$）

ある「もの」x がある集合 X の要素であることを，$x \in X$ のように表します。例えば，りんごが式 (1.1) の集合の要素であることを，式 (1.3) のように書きます。

$$\text{りんご} \in \{\,\text{りんご},\ \text{みかん},\ \text{バナナ}\,\} \tag{1.3}$$

もちろん，りんご $\in \{x \mid x\ \text{は果物}\,\}$ のように，内包的記法にも有効です。

部分集合（$\subseteq$）

ある集合 X のすべての要素がある集合 Y の要素になっているとき，$X \subseteq Y$ と書き，X は Y の部分集合であるといいます。例えば，りんご，みかん，バナナはすべて果物ですので式 (1.2) の要素でもあります。したがって，式 (1.4) のように書くことができます。

[†] フォントとは，印刷・画面表示用の文字の形のことで，例えば太文字の**ボールド体フォント**や斜体の *Italic Font*，それら以外にもさまざまなフォントがコンピュータでは使用できます。

$$\{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \subseteq \{x \mid x \text{ は果物}\} \tag{1.4}$$

なお，空集合 $\emptyset$ はあらゆる集合の部分集合になることを覚えておいてください。

集合間の等しさ（=）

集合 X が集合 Y の部分集合（$X \subseteq Y$）であり，しかも Y が X の部分集合（$Y \subseteq X$）のとき，X と Y はたがいに等しい集合といい，$X = Y$ と書きます。

真部分集合（$\subsetneq$）

集合 X が集合 Y の部分集合であり，しかも Y が X の要素以外の要素も含んでいるとき，つまり X と Y が等しくないとき $X \subsetneq Y$ と書き，X は Y の真部分集合であるといいます。例えば，式 (1.2) の集合は明らかに，りんご，みかん，バナナ以外の果物も要素としているので，式 (1.5) のように書くことができます。

$$\{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \subsetneq \{x \mid x \text{ は果物}\} \tag{1.5}$$

部分集合 $\subseteq$ と真部分集合 $\subsetneq$ の違い

部分集合，真部分集合とも同じ集合を使って説明したので混乱したかもしれませんが,「ある集合 X のすべての要素がある集合 Y の要素」が部分集合の定義ですので

$$\{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \subseteq \{\text{りんご，みかん，バナナ}\} \tag{1.6}$$

は正しい式です。しかし，式 (1.6) の右辺の集合の要素は左辺の集合の要素以外の要素を含まないので

$$\{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \subsetneq \{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \tag{1.7}$$

は誤った式です。$\{$ りんご, みかん, バナナ $\} \subsetneq \{$ りんご, みかん, バナナ, キ

ウイ } なら正しい式になります。つまり部分集合の場合は両辺が同じ集合でも構いませんが，真部分集合では両辺が同じ集合では許されないということになります。

ここで，正しい式，誤った式，許される，許されないという言い方をしましたが，正確には「成り立つ」「成り立たない」，あるいは「真である」「偽である」という言い方をしなければなりません。このあたりになると論理学の話題になってしまいますので，詳しくは 2 章で学習します。

和　集　合（∪）

集合 X と集合 Y の要素をすべて要素として持ち，それら以外の要素を持たない集合を X と Y の和集合といい，式 (1.8) のように書きます。

$$X \cup Y \tag{1.8}$$

例えば，集合 { りんご, みかん, バナナ } と集合 { りんご, キウイ, パイナップル } の和集合を Z とすると，式 (1.9) のようになります。

$$\begin{aligned} Z &= \{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \cup \{\text{りんご, キウイ, パイナップル}\} \\ &= \{\text{りんご, みかん, バナナ, キウイ, パイナップル}\} \end{aligned} \tag{1.9}$$

積　集　合（∩）

集合 X と集合 Y の共通の要素をすべて要素として持ち，それら以外の要素を持たない集合を式 (1.10) のように書き，この集合を X と Y の積集合と呼びます。

$$X \cap Y \tag{1.10}$$

例えば，集合 { りんご, みかん, バナナ } と集合 { りんご, キウイ, パイナップル } の積集合を Z とすると，式 (1.11) のようになります。

$$\begin{aligned} Z &= \{\text{りんご, みかん, バナナ}\} \cap \{\text{りんご, キウイ, パイナップル}\} \\ &= \{\text{りんご}\} \end{aligned} \tag{1.11}$$

冪集合 (2^X)

集合 X のすべての部分集合からなる集合を X の冪集合 (power set) といい，2^X と書きます。例えば，式 (1.1) の集合 { りんご, みかん, バナナ } を X とすると，2^X は式 (1.12) のようになります。

$$\begin{aligned} 2^X = \{\emptyset, &\{\text{りんご}\}, \{\text{みかん}\}, \{\text{バナナ}\}, \{\text{りんご, みかん}\}, \\ &\{\text{りんご, バナナ}\}, \{\text{みかん, バナナ}\}, \\ &\{\text{りんご, みかん, バナナ}\}\} \end{aligned} \tag{1.12}$$

タプル $(\langle x, y, z, \cdots \rangle)$

複数の要素 $x, y, z, \cdots$ の順序付けられたものをタプル (組) といい，$\langle x, y, z, \cdots \rangle$ と書きます。集合と違い各要素には順番があるので，⟨ りんご, みかん, バナナ ⟩ と ⟨ バナナ, みかん, りんご ⟩ は異なるタプルになります。また，タプルでは，⟨ りんご, みかん, バナナ, みかん ⟩ のように要素の重複も許されます。

直積 $(\times)$

集合 X と集合 Y の直積とは，それぞれの集合の要素からできるタプルをすべて集めた集合で，正確には式 (1.13) のように定義されます。

$$X \times Y = \{\langle x, y \rangle \mid x \in X, y \in Y\} \tag{1.13}$$

X を式 (1.1) の集合 { りんご, みかん, バナナ }，Y を $\{80,\ 30,\ 100\}$ という集合とするとき，X と Y の直積は式 (1.14) のようになります。

$$\begin{aligned} X \times Y = \{&\langle \text{りんご}, 80\rangle, \langle \text{りんご}, 30\rangle, \langle \text{りんご}, 100\rangle, \\ &\langle \text{みかん}, 80\rangle, \langle \text{みかん}, 30\rangle, \langle \text{みかん}, 100\rangle, \\ &\langle \text{バナナ}, 80\rangle, \langle \text{バナナ}, 30\rangle, \langle \text{バナナ}, 100\rangle\} \end{aligned} \tag{1.14}$$

三つ以上の集合に対しても直積は定義され，例えば集合 W, X, Y, Z の直積は式 (1.15) のようになります。

$$W \times X \times Y \times Z = \{\langle w, x, y, z \rangle \mid w \in W, x \in X, y \in Y, z \in Z\} \tag{1.15}$$

また，同じ集合 X に対する 2 回以上の直積を，冪乗の記法を使って以下のように表記します。

$$X \times X = X^2, \quad X \times X \times X = X^3, \cdots$$

二項関係（$\mathcal{R}$）

集合 X と集合 Y の直積 $X \times Y$ の部分集合 $\mathcal{R}$ を，X と Y の間の二項関係といいます。特に，$X = Y$ であるとき，$\mathcal{R}$ を集合 X（または集合 Y）上の二項関係といいます。例えば，実数全体の集合 $\mathbb{R}$ における大小関係 に基づく“ $<$ ”は，二項関係の観点から説明すると以下のように定義される $\mathbb{R}$ 上の二項関係です。

$$< \quad = \{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, x \text{ は } y \text{ より小さい}\} \tag{1.16}$$

このとき上記の集合が，$\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ つまり $\{\langle x, y \rangle \mid x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}\}$ の部分集合になっていることがわかります。

また，ある要素 $x \in X$ と $y \in Y$ のタプル $\langle x, y \rangle$ が二項関係 $\mathcal{R}$ の要素であるとき，x と y は $\mathcal{R}$ の関係にあるといい，$x \mathrel{\mathcal{R}} y$ と書きます。例えば 3.8 は 4.2 より小さいので $\langle 3.8, 4.2 \rangle$ というタプルは式 (1.16) で定義された集合の要素であることから，$3.8 < 4.2$ と書きます。

同 値 関 係

X を $x_1, x_2, \ldots$ という要素からなる集合とします。例えば，X を整数全体の集合 $\mathbb{Z}$ とするとき，$x_1 = x_2$（値が一致），$x_1 < x_2$（値が小さい）など，集合 X 上でさまざまな二項関係を定義することができます。二項関係が，反射，対称，推移と呼ばれる下記のような三つの性質を満たすとき同値関係であるといいます。

定義 1.1（**同値関係**）　集合 X 上の二項関係 $\mathcal{R}$ が次の三つの性質を満たすとき，$\mathcal{R}$ は X 上の同値関係であるという。

索　　引

—— 著 者 略 歴 ——

加藤　暢（かとう　とおる）

1991 年　岡山大学工学部情報工学科卒業
1993 年　岡山大学大学院工学研究科修士課程修了（情報工学専攻）
1997 年　岡山大学大学院自然科学研究科博士課程修了（知能開発科学専攻），博士（工学）
1998 年　日本学術振興会特別研究員
2000 年　近畿大学講師
2011 年　近畿大学准教授
現在に至る

高田　司郎（たかた　しろう）

1979 年　大阪大学基礎工学部情報工学科卒業
1979 年　コンピューターサービス株式会社（1987 年に株式会社 CSK に商号変更）入社
1991 年　技術士（情報工学部門）
1993 年　株式会社けいはんな入社
1999 年　奈良先端科学技術大学院大学情報科学研究科博士後期課程修了（情報システム学専攻），博士（工学）
1999 年　株式会社国際電気通信基礎技術研究所（ATR）入所
2002 年　福岡工業大学助教授
2003 年　近畿大学助教授
2007 年　近畿大学准教授
現在に至る

新出　尚之（にいで　なおゆき）

1986 年　京都大学理学部卒業
1988 年　京都大学大学院理学研究科修士課程修了（数理解析専攻）
1988 年　京都大学助手
1992 年　奈良女子大学講師
2007 年　博士（情報科学）（奈良女子大学）
2008 年　奈良女子大学准教授
現在に至る

数理論理学 — 合理的エージェントへの応用に向けて —
Mathematical Logic for Rational Agents
© Toru Kato, Shiro Takata, Naoyuki Nide 2014

2014 年 10 月 30 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　加　藤　　暢
　　　　高　田　司　郎
　　　　新　出　尚　之
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所　三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ　ロ　ナ　社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978－4－339－02489－0　（柏原）　（製本：グリーン）
Printed in Japan

本書のコピー，スキャン，デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられております。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は，いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします