

次世代信号情報処理シリーズ 7

Next SIP series

テンソルデータ解析の 基礎と応用

— テンソル表現, 縮約計算, —
— テンソル分解と低ランク近似 —

田中聡久 監修
横田達也 著

コロナ社

シリーズ刊行のことば

信号処理とは、音声、音響、画像、電波など、連続する数値や連続波形が意味を持つデータを加工する技術です。現代の ICT 社会・スマート社会は信号処理なしには成り立ちません。スマートフォンやタブレットなどの情報端末はコンピュータ技術と信号処理技術が見事に融合した例ですが、私たちがその存在を意識することがないほど、身の回りに浸透しています。さらには、応用数学や最適化、また統計学を基礎とする機械学習などのさまざまな分野と融合しながらさらに発展しつつあります。

もともと信号処理は回路理論から派生した電気電子工学の一分野でした。抵抗、コンデンサ、コイルを組み合わせると、特定の周波数成分を抑制できるアナログフィルタを構成できます。アナログフィルタ技術は電子回路と融合することで能動フィルタを生み出しました。そしてデジタル回路の発明とともに、フィルタもデジタル化されました。一度サンプリングすれば、任意のフィルタをソフトウェアで構成できるようになったのです。ここに「デジタル信号処理」が誕生しました。そして、高速フーリエ変換の発明によって、デジタル信号処理は加速度的に発展・普及することになったのです。

デジタル技術によって、信号処理は単なる電気電子工学の一分野ではなく、さまざまな工学・科学と融合する境界分野に成長し始めました。フィルタのソフトウェア化は、環境やデータに柔軟に適応できる適応フィルタを生み出しました。信号はバッファリングできるようになり、画像信号はバッチ処理が可能になりました。そして、線形代数や統計学を柔軟に応用することで、テレビやカメラに革命をもたらしました。もともと周波数解析を基とする音声処理技術は、ビッグデータをいち早く取り込み、人工知能の基盤技術となっています。電波伝送の一分野だった通信工学は、通信のデジタル化によって信号処理技術

なしには成り立たないうえ、現代のスマート社会を支えるインフラとなっています。このように、枚挙に暇がないほど、信号処理技術は社会における各方面での基盤となっているだけでなく、さまざまな周辺技術と柔軟に融合し新たなテクノロジーを生み出しつつあります。

また、現代テクノロジーのコアたる信号処理は、電気・電子・情報系における大学カリキュラムでは必要不可欠な科目となっています。しかしながら、大学における信号処理教育はデジタルフィルタの設計に留まり、高度に深化した現代信号処理からはほど遠い内容となっています。一方で、最新の信号処理技術、またその周辺技術を知るには、論文を読んだり、洋書にあたったりする必要があります。さらに、高度に抽象化した現代信号処理は、ときに高等数学をバックグラウンドにしており、技術者は難解な数学を学ぶ必要があります。以上のことが本分野へ参入する壁を高くしているといえましょう。

これがまさに、次世代信号情報処理シリーズ“Next SIP”を刊行するに至ったきっかけです。本シリーズは、従来の伝統的な信号処理の専門書と、先端技術に必要な専門知識の間のギャップを埋めることを目的とし、信号処理分野で先端を走る若手・中堅研究者を執筆陣に揃えています。本シリーズによって、より多くの学生・技術者に信号処理の面白みが伝わり、さらには日本から世界を変えるイノベーションが生まれる助けになれば望外の喜びです。

2019年6月

次世代信号情報処理シリーズ監修 田中聡久

ま え が き

本書はテンソル分解の入門書として書きました。テンソルの基礎，線形代数の基礎，主成分分析，テンソル分解の基礎，テンソル分解の応用までを滑らかにつなぐことを心がけました。テンソルネットワークでよく用いられるダイアグラム表記（**図 1**）も積極的に取り入れて解説しています。本書を理解するうえで必要な数学的知識は線形代数 + α のみです。線形代数への愛着と理解が深まるほど，テンソル分解への理解も深まるといえます。

第 1 章ではベクトル，行列，テンソルの簡単な導入と応用事例について広く浅くまとめました。

第 2 章ではテンソルの変形と計算について解説しました。テンソルのベクトル化，行列展開，折り畳みなどは通常（特に論文上では）簡単な紹介だけにして細かい定義をうやむやにってしまう操作ですが，本書ではこれらを不足なく定義することを試みています（そのため説明がくどいと感じるかもしれません）。テンソルの計算に関しては，基本的な四則演算，特殊な行列積，テンソル積，テンソルネットワークなどについて解説しています。

第 3 章前半は線形代数の簡潔なハイライトになっています。内積，外積，ノルム，列空間，直交化，射影，固有値分解，特異値分解，行列ランクなどの内容を一通り学び直すことができます。エッカート・ヤングの定理の証明，ベキ乗法や縮退処理を用いた特異値分解のアルゴリズムについて紹介している点が特色です。第 3 章後半ではこれらの応用として主成分分析を解説します。

第 4 章ではテンソルのランク 1 分解，CP 分解，Tucker 分解，テンソルトレイン分解に絞って解説をしました。他のテンソル分解モデルについては代表的なものを紹介する程度にしています。理論が追えたとしても実際にプログラムを作ろうとすると手が止まってしまう（または思ったとおりに動かない），と

いうことはよくあると思います。これは抽象的には理解していても、細かい部分の具体的な理解が足りていないことの表れです。自分でプログラムが書ける（そしてきちんと動く）、というのは少なくとも処理の流れは具体的に、かつ正確に理解できていることの証だと思っています。本書では MATLAB プログラムの例をたくさん載せています。手を動かしながら読んでいただき、具体的な理解につなげていただければと思います。

第5章ではテンソル分解を実際のデータ分析課題へ適用するための方法論について大風呂敷を広げて紹介しました。観測モデル、誤差関数、制約付きテンソル分解などの組合せで多様な問題設定が考えられることがわかりいただけるとと思います。任意の組合せに対応できるような万能なアルゴリズムは現状存在しませんが、テンソル分解の研究が進むに従ってデータ分析の道具としての使いやすさも年々よくなっていくと信じます。

数年前から筆者が研究室を主宰するようになったこともあり、学生が線形代数の復習をしつつテンソル分解の基礎を学べるような丁度よい本があると嬉しい（しかしなかなかよい本が見つからない）と思っていました。それならば自分で書くしかない、と思い始めていたところタイミングよく東京農工大学の田中聡久先生から本書執筆の話をしていただいたのはきわめて幸運なことでした。また、執筆にあたり田中先生からは本書の魅力が増すような多くのアドバイスをいただきました。心より御礼申し上げます。

山岸昌夫先生（法政大学）からは原稿に対して理論や数式の厳密性、説明不足な点の指摘など有益なコメントをたくさんいただきました。ありがとうございます。また、丁寧に編集してくださったコロナ社の皆様に感謝いたします。そして最後に、いつも筆者を支えてくれている家族のみんなに感謝の意を伝えたいと思います。

2024年4月

横田達也





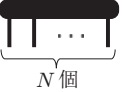




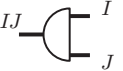





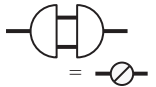
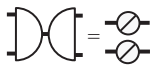

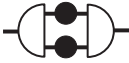
















 ベクトル	 行列	 3階テンソル	 4階テンソル	 N 個 N 階テンソル
 単位行列 (対角行列)	 直交性をもつ行列	 左直交な テンソル	 右直交な テンソル	 展開作用素 (折り畳み)
 行列の直交性	 テンソルの直交性	 ベクトルどうしの 外積	 ベクトルどうしの クロネッカー積	 行列の ベクトル展開
 展開/折り畳み 作用素の直交性	 展開/折り畳み 作用素の直交性	 行列どうしの 外積	 行列どうしの クロネッカー積	 テンソルの 行列展開
 QR 分解	 特異値分解	 テンソルどうしの 内積	 ベクトルの テンソル化	 ベクトルの 行列化
 行列のトレース	 行列積	 テンソルと 行列の積	 Tucker 分解	 階層的 Tucker 分解
 超対角テンソル	 CP 分解	 テンソル トレイン分解	 テンソル リング分解	 全結合テンソル ネットワーク分解

図 1 ダイアグラム表記の一覧

目 次

1. 情報のテンソル表現

1.1	ベクトル, 行列, テンソルの基礎	1
1.1.1	ベクトル	1
1.1.2	行列	3
1.1.3	3階テンソル	6
1.1.4	N 階テンソル	7
1.1.5	テンソルのイメージ	7
1.1.6	テンソルのモード	8
1.1.7	テンソルのダイアグラム表記	9
1.1.8	プログラムの例	10
1.2	テンソル表現の事例紹介	11
1.2.1	画像処理	11
1.2.2	音響信号処理	13
1.2.3	生体信号処理	14
1.2.4	無線通信	15
1.2.5	バイオインフォマティクス (生命情報処理)	15
1.2.6	自然言語処理	15
1.2.7	関係データ (グラフ)	16
1.2.8	推薦システム	17
1.2.9	交通データ	17
1.2.10	確率質量関数	18
1.2.11	回帰係数	18

1.2.12 線形写像	19
章末問題	19

2. テンソルの変形と計算

2.1 基礎知識	20
2.1.1 数式の記法について	20
2.1.2 テンソルの要素	21
2.1.3 ファイバ	22
2.1.4 スライス	23
2.1.5 部分テンソル	25
2.1.6 プログラムの例	25
2.2 テンソルの変形	26
2.2.1 転置 (モード置換)	26
2.2.2 ベクトル展開	28
2.2.3 行列展開	31
2.2.4 折り畳み (テンソル化)	32
2.2.5 変形の線形性	34
2.2.6 変形のダイアグラム表記	34
2.2.7 プログラムの例	35
2.3 テンソルの計算	37
2.3.1 和, 差, スカラー倍	37
2.3.2 要素ごとの積と商	38
2.3.3 内積	40
2.3.4 フロベニウスノルム	40
2.3.5 外積	41
2.3.6 行列積	43
2.3.7 クロネッカー積	44

2.3.8	カトリ・ラオ積	48
2.3.9	テンソルと行列の積 (モード積, 縮約)	50
2.3.10	テンソル積	54
2.3.11	テンソルネットワークと計算量	56
2.3.12	プログラムの例	58
章 末 問 題		60

3. 線形代数と主成分分析

3.1	線形代数ハイライト	61
3.1.1	列空間と左ゼロ空間	61
3.1.2	直交行列と直交化	63
3.1.3	列空間への射影	69
3.1.4	固有値分解	71
3.1.5	正定値行列	73
3.1.6	逆行列	74
3.1.7	特異値分解	75
3.1.8	行列ノルム	77
3.1.9	特異値分解と固有値分解の関係	78
3.1.10	行列のランク	79
3.1.11	行列の低ランク近似	81
3.1.12	エッカート・ヤングの定理の証明	81
3.1.13	行列の最良ランク 1 近似と縮退処理	85
3.1.14	べき乗法による最小ランク 1 近似	86
3.1.15	特異値分解の原始的アルゴリズム	89
3.2	主成分分析	90
3.2.1	次元削減としての主成分分析	91
3.2.2	最適化問題の整理と分散最大化の特徴付け	93

3.2.3	部分空間の最適化	98
3.2.4	主成分分析の手順 (まとめ)	99
3.2.5	固有値, 固有ベクトルの意味と寄与率	100
3.2.6	主成分分析の適用例	101
章末問題		103

4. テンソル分解

4.1	ランク 1 テンソル	104
4.1.1	ランク 1 テンソルの定義と性質	104
4.1.2	ランク 1 分解によるテンソルの表現	105
4.1.3	ランク 1 分解の一意性	106
4.1.4	テンソルのランク 1 近似	107
4.1.5	べき乗法と交互最小二乗法	109
4.1.6	プログラムの例	110
4.2	CP 分解	113
4.2.1	CP 分解と CP ランク	113
4.2.2	CP 分解の一意性	115
4.2.3	CP 分解に基づくテンソルの低ランク近似	118
4.2.4	交互最小二乗アルゴリズムによる CP 分解	119
4.2.5	階層的交互最小二乗アルゴリズムによる CP 分解	121
4.2.6	プログラムの例	124
4.2.7	CP 分解の特徴	127
4.3	Tucker 分解	133
4.3.1	Tucker 分解と Tucker ランク	133
4.3.2	Tucker 分解の任意性	136
4.3.3	高階特異値分解 (HOSVD)	137

4.3.4	交互最小二乗アルゴリズムによる Tucker 分解 (直交制約なし)	140
4.3.5	HOOI アルゴリズムによる Tucker 分解 (直交制約あり)	141
4.3.6	プログラムの例	145
4.3.7	Tucker 分解の特徴	146
4.4	テンソルトレイン分解	152
4.4.1	テンソルトレイン (TT) 分解	152
4.4.2	k 行列展開と TT ランク	155
4.4.3	特異値分解を用いた TT 分解 (TT-SVD)	156
4.4.4	TT-SVD による低ランク近似	158
4.4.5	直交化された TT 分解	159
4.4.6	TT 分解のための交互最小二乗アルゴリズム	163
4.4.7	プログラムの例	169
4.5	その他のテンソル分解モデル	174
4.5.1	ブロックターム分解	174
4.5.2	階層的 Tucker 分解	175
4.5.3	テンソルリング分解	176
4.5.4	全結合テンソルネットワーク分解	176
4.5.5	同時テンソル分解	177
4.5.6	対称テンソル分解	178
	章末問題	178

5. テンソルデータ解析

5.1	テンソルデータの線形観測モデルと逆問題	180
5.1.1	線形観測モデル	181
5.1.2	観測モデルに基づくデータ分析課題の分類	182
5.2	テンソルデータ解析の方法論	187

5.2.1	観測モデルに基づく線形方程式の不良設定性	187
5.2.2	ノルム最小化による再構成	188
5.2.3	テンソルデータ解析問題の定式化	189
5.2.4	誤差関数の種類	192
5.2.5	ペナルティ関数の種類	200
5.3	最適化の準備	216
5.3.1	交互方向乗数法	216
5.3.2	上界最小化 (MM) アルゴリズム	218
5.3.3	近接写像	219
5.4	欠損値を含むテンソルデータの分析	221
5.4.1	核ノルムに基づく低ランク行列補完	222
5.4.2	テンソル分解に基づく低ランクテンソル補完	225
5.4.3	テンソル補完の応用事例	227
5.5	スパース成分を含むテンソルデータの分析	228
5.5.1	ロバスト主成分分析	228
5.5.2	ロバストテンソル分解	229
5.5.3	ロバストテンソル分解の応用事例	231
	章末問題	232
	引用・参考文献	233
	章末問題解答	242
	索引	246

MATLAB は MathWorks, Inc. の登録商標です。本書では、MATLAB およびその他の製品名に ™, ® マークは明記していません。

本章では、情報をテンソル[†]で表現する、ということについて考えようと思います。情報が意味するものは、音声、脳波、画像、自然言語など多種多様です。これらのデータはさまざまな形式で保存されていますが、テンソルを使って表現すると、それに対してさまざまなテンソルデータ解析の手法を適用できるようになります。何でもかんでもテンソル表現すればよいということはありませんが、テンソルデータ解析の理論やアルゴリズムへの理解を深めれば、現在あなたの手元にあるデータとマッチするかどうか判断ができるかもしれません。または、深く考えずにまずは試してみて、後から結果を考察するのも面白いかもしれません。

1.1 ベクトル、行列、テンソルの基礎

1.1.1 ベクトル

$I > 0$ を任意の正の整数とすると、 I 個のスカラー値 $\{a_1, a_2, \dots, a_I\}$ を一方向に並べたもの

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_I \end{bmatrix} \quad (1.1)$$

[†] 本書では多次元配列のことを単に「テンソル」と呼びます。

を**ベクトル** (vector), I 次元ベクトル, 長さ I のベクトルなどと呼びます。慣例として式 (1.1) のように縦方向に並べることが多いですが, この場合は特に**列ベクトル** (column vector) または縦ベクトルと呼びます。一方で, 横方向に並べた場合には**行ベクトル** (row vector) または横ベクトルと呼びます。本書では, 両者を区別するために列ベクトルを \mathbf{a} で表し, 行ベクトルは転置記号 \cdot^T を用いて \mathbf{a}^T のように表します。

特別な表記が使われるベクトル, 名前の付いたベクトルがいくつかあります。まず, 全要素の値が 0 のベクトルは

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.2)$$

のように表記され, **ゼロベクトル** (zero vector) と呼ばれます。

また, 全要素の値が 1 のベクトルは

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

のように表記されます。特別な名前は付いていないと思いますが, そのまま**全要素が 1 のベクトル** (vector of ones, all-ones vector) と説明されることが多いです。

ベクトルの各要素をそれぞれ**ユークリッド空間** (Euclidean space) の座標値だと考え, ベクトルを I 次元ユークリッド空間 \mathbb{R}^I 上の点 \mathbf{a} として捉えたり, あるいは原点から点 \mathbf{a} への矢印として捉えたりすることが多くあります。このときの矢印の「長さ」はベクトルの**ユークリッドノルム** (Euclidean norm) と呼ばれます (細かい定義は第 2 章で行います)。ユークリッドノルムが 1 となるようなベクトルは**単位ベクトル** (unit vector) と呼ばれます。 \mathbb{R}^I 上の単位ベクトルをすべて集めた集合は半径 1 の球面となります。一般にこれは**超球面**

(hypersphere, n -sphere^{†1}) と呼ばれます。

ベクトルにおいて一つの要素だけ値が1で、その他の要素の値がすべて0のベクトルは**ワンホットベクトル** (one-hot vector) と呼ばれます。例えば、3次元のワンホットベクトルを列挙すると

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

のようになります。ワンホットベクトルのユークリッドノルムは1なので、これらは同時に単位ベクトルでもあります^{†2}。ワンホットベクトルは自然言語における単語の表現やパターン認識におけるカテゴリ (クラス, ラベル) の表現によく用いられます。

1.1.2 行 列

$I, J > 0$ を任意の正の整数とすると、 J 個の I 次元ベクトル $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_J\}$ を一方向に並べたもの

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \cdots & \mathbf{a}_J \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1J} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2J} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{I1} & A_{I2} & \cdots & A_{IJ} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{a}}_1^\top \\ \tilde{\mathbf{a}}_2^\top \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{a}}_I^\top \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (1.5)$$

を**行列** (matrix), (I, J) -行列, サイズ (I, J) の行列などと呼びます。式 (1.5) を見ると、行列 \mathbf{A} は I 個の行ベクトル $\{\tilde{\mathbf{a}}_1^\top, \tilde{\mathbf{a}}_2^\top, \dots, \tilde{\mathbf{a}}_I^\top\}$ を並べたものでもありますがわかります。 $I = J$ のとき、つまり行列の縦と横の長さが等しいときには、この行列を特に**正方行列** (square matrix) と呼びます。 $I > J$ のとき、行列は縦に長いのでそのまま**縦長行列** (tall matrix) と呼びます。 $I < J$ のとき、

^{†1} \mathbb{R}^I 上の超球面の次元は $I - 1$ であり $(I - 1)$ -sphere となります。

^{†2} つまり超球面に含まれます。

行列は横に長いまま**横長行列** (wide matrix) と呼びます。おまけですが $I \gg J$ のように、縦と横の長さが極端に違う場合には Tall-and-Skinny 行列のような特別な呼び方がされていて、ある分野では効率計算のための研究対象とされています。サイズ $(I, 1)$ の行列は I 次元ベクトルともいえます。数式上ではこれらを区別しないことがほとんどだと思いますが、プログラミング言語によっては両者を区別するものと、区別しないものがあるため注意が必要です[†]。

特別な行列をいくつか紹介したいと思います。まず、 (I, J) -行列のすべての要素が 0 のとき、これを

$$\mathbf{0} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

のように表記し、**ゼロ行列** (zero matrix) と呼びます。ゼロベクトルに対してもゼロ行列に対しても同じく $\mathbf{0}$ という表記が使われることが多いです。そうすると数式としては見やすく (簡単に) なりますが、その代わりサイズに関しては文脈に委ねることとなり違いがわかりづらいです。サイズをはっきり明記したい場合には $\mathbf{0}_{I \times 1}$ や $\mathbf{0}_{I \times J}$ のような表記法もあり、ケースバイケースで使い分けます。

また、行列のすべての要素が 1 のとき、これを

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.7)$$

のように表記します。この行列に特別な名前はないと思います。そのまま**全要素が 1 の行列** (matrix of ones, all-ones matrix) と説明されます。ゼロ行列と同様、サイズをはっきり明記したい場合には $\mathbf{1}_{I \times 1}$ や $\mathbf{1}_{I \times J}$ のような表記法も

[†] 例えば、 $(I, 1)$ -行列と I 次元ベクトルの加減算ができなかったり、 (I, J) -行列と J 次元ベクトルの乗算ができなかったりします。

あります。

正方行列 \mathbf{A} が, $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ を満たすとき, この行列を**対称行列** (symmetric matrix) と呼びます。これは全要素について $A(i, j) = A(j, i)$ が成り立っていることを意味します。対称行列の例として

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

などを挙げるすることができます。行列が対称であるかどうかは非対角要素の値によって決まります。

対称行列の中でも非対角要素がすべて 0 の行列を特に**対角行列** (diagonal matrix) と呼びます。実は, 式 (1.8) の左から 2 番目は対角行列です。

対角行列の中でも, 対角要素がすべて 1 の行列を

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1.9)$$

と表記し, これを**単位行列** (identity matrix) と呼びます。単位行列 \mathbf{I} の (i, j) 番目の要素[†]は δ_{ij} (クロネッカーのデルタ) です。また, 単位行列の各列 (および各行) はワンホットベクトルです。見やすさを重視して, 任意のサイズの単位行列を単に \mathbf{I} と表記することが多いですが, ときには行列のサイズを意識して単位行列を表記したいこともあると思います。そのような場合にはサイズ $D \times D$ の単位行列を \mathbf{I}_D のように表記します。

行列の要素のうち一つだけが 1 で, その他がすべて 0 のとき, これを**行列単位** (matrix unit) と呼びます。例えば, サイズ 2×2 の行列単位を列挙すると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

[†] (i, j) 番目の要素とは i 行目および j 列目の要素を指します。

索引

【あ】		ガウシアン	185	グラフ正則化付き非負	
アダマール積	38	核ノルム	78	行列分解	208
圧縮	129	確率質量関数	18	グラフラプラシアン行列	207
圧縮センシング	186	画像	11	グラム・シュミットの	
圧縮比	129	画像処理	13	直交化	66
アップサンプリング	185	画像ボケ	185	グループスパース正則化	204
アトム	212	カトリ・ラオ積	48	クロネッカー積	44
【い】		関係データ	16	【け】	
		完全なテンソル	184	計画行列	182
		ガンマ分布	198	計量	193
【い】		【き】		欠損値	184
一般化 KL ダイバー		機械学習	18	【こ】	
ジェンス	196	木構造をもつテンソル		コアテンソル	133
因子行列	113, 134	ネットワーク	175	高階テンソル	7
因子ベクトル	105	逆行列	74	高階特異値分解	137
陰的正則化	215	逆問題	180	交互最小二乗	120
インペインティング	184	行	23	交互最小二乗法	109
【え】		行ベクトル	2	交互方向乗数法	216
エコノミー SVD	77	行列	3	交通データ	17
エッカート・ヤングの		行列積	43	後方スイープ	164
定理	81	行列単位	5	誤差項	190
エンコーダ	93	行列展開	31	コスト関数	93
【お】		行列ノルム	77	ごま塩ノイズ	231
重み付き二乗誤差	193	行列ランク	6	固有値	72
折り畳み	32	寄与率	101	固有値分解	72
音響信号	13	切り捨て特異値分解	81	固有ベクトル	72
音声信号	13	切り捨て HOSVD	139	【さ】	
【か】		近接勾配法	219	最小二乗法	119
回帰分析	18	近接写像	217, 219	最小ノルム解	187
階数	6	【く】		サイズ	8
外積	41	クラスカルランク	117	最大誤差	196
階層的交互最小二乗	122	グラフ正則化	208		

最大事後確率 190
 最大損失 196
 サイノグラム 186
 最良ランク K 近似 81

【し】

自己符号化器 92, 215
 指示関数 192
 辞書 212
 二乗和 205
 辞書学習 213
 事前確率 191
 自然言語処理 15
 事前知識 131, 181, 189
 射影 69, 184
 射影行列 70
 シャッテンノルム 78
 シューア積 38
 十分条件 117
 縮退 80
 縮退処理 86
 縮約 35
 主成分分析 90
 巡回行列 209
 上界最小化 218
 上限値 112
 初期値依存性 132
 信号事前知識 189
 深層生成モデル 92

【す】

推薦システム 17
 随伴作用素 182
 スパース性 204
 スパース符号 212
 スパース符号化 212
 スパースランドモデル 212
 スペクトラルノルム 77
 スライス 23

【せ】

正規化 67
 正規直交化 65

正則化項 190
 正則行列 74
 生体信号 14
 正定値行列 73
 正方行列 3
 制約項 190
 接続行列 207
 絶対誤差 195
 絶対値和 205
 ゼロ行列 4
 ゼロベクトル 2
 線形写像 19
 線形和 62
 全結合テンソルネット

ワーク 177
 全直交 139
 全直交性 139
 尖度 211
 全モード積 52
 全要素が1の行列 4
 全要素が1のベクトル 2

【そ】

像 62
 早期終了 215
 ソフトしきい値処理 219
 ソフトプラス関数 200

【た】

対角行列 5
 対称行列 5, 208
 対称テンソル分解 178
 対称 CP 分解 178
 ダウンサンプリング 185
 多重線形テンソルランク 135
 畳込み 184
 畳込み非負行列分解 211
 縦長行列 3
 多様体 214
 多様体学習 208, 215
 多様体正則化 208
 単位行列 5
 単位ベクトル 2

【ち】

値域 62
 遅延埋め込み 13
 置換行列 116
 チコノフ正則化 203
 知識グラフ 16
 知識ベース 16
 チューブ 23
 超解像 185
 超球面 2
 超対角テンソル 114
 直交 63
 直交化 65
 直交行列 64
 直交性 201
 直交補空間 64

【て】

低ランク行列補完 222
 低ランク近似 81, 119
 低ランク構造 11
 デコーダ 92
 デコンボリユーション 185
 データ忠実項 190
 テプリッツ行列 209
 テンソル 6
 —の再構成 130
 テンソル化 32
 テンソル回帰 18
 テンソル積 54
 テンソルダイアグラム 9
 テンソルトレイン分解 152
 テンソルネットワーク 56
 テンソルネットワーク
 分解 152
 テンソル補完 184
 テンソルランク 114
 テンソルリング分解 176
 転置 26

【と】

統計学 18

同時テンソル分解	177	左ゼロ空間	63	ベナルティ項	190
特異行列	74	左直交	160	ベルヌーイ分布	199
特異値	76	左特異行列	76	ベンローズのグラフ記法	9
特異値しきい値処理	221	左特異ベクトル	76	【ほ】	
特異値収縮	221	必要条件	117	補 間	184
特異値分解	76	非負行列	201	ボケカーネル	185
独立成分分析	211	非負行列分解	201	ボケ除去	185
凸 包	205	非負性	201	補助関数	218
トレスノルム	78	非負テンソル	201	補助関数法	218
トレードオフ	130	非負テンソル分解	201	ボンド	10
【な】		標本分散共分散行列	97	ボンド次元	153
内 積	40	標本平均ベクトル	94	【ま】	
長 さ	8	【ふ】		マハラノビス距離	194
【に】		ファイバ	22	間引く処理	185
二乗誤差	193	復 号	129, 214	【み】	
二値行列	202	復号器	214	未完テンソル	183
二値行列分解	202	符 号	214	右直交	159
二値テンソル	202	符号化	129, 214	右特異行列	76
二値テンソル分解	202	符号化器	215	右特異ベクトル	76
ニューラルネットワーク	214	負のエントロピー	211	【む】	
【の】		部分行列	25	ムーア・ベンローズの	
ノイズ事前知識	189	部分空間	64	擬似逆行列	46
ノイズ除去	183	部分最適化問題	119	無線通信	15
【は】		部分テンソル	25	【も】	
バイオインフォマティクス	15	部分トレイン	154	目的関数	92
バイキュービック	185	ブラインドデコンボリューション	185	モード	8
ハイパーパラメータ	120	不良設定問題	131, 188	モード置換	26
バイリニア	185	フルランク	80	モードランク	135
外れ値	228	フル SVD	76	【ゆ】	
罰則係数	217	ブレグマンダイバー		尤 度	191
ハンケル行列	210	ジェンス	200	ユークリッド空間	2
番 号	21	ブロックスパース正則化	204	ユークリッドノルム	2
反巡回行列	210	ブロックターム分解	174	【よ】	
半スweep	164	フロベニウスノルム	78	要 素	21
半正定値行列	73	【へ】		——ごとの商	39
【ひ】		ヘイズの定理	191	——ごとの積	38
非ガウス性	211	べき乗法	73, 86		
		ベクトル	2		
		——で張られる空間	62		
		ベクトル展開	28		

横長行列	4	ランク 1 テンソル	42, 104	列空間	62
		ランチョス	185	列ベクトル	2
【ら】		【り】		【ろ】	
ラグランジュ関数	98	リッジ回帰	189	ロジスティックシグモイド関数	199
ラグランジュ乗数	217	量子化ノイズ	196	ロジスティック損失	198
ラグランジュ未定乗数	98	リンク関数	199	ロバスト主成分分析	228
ラグランジュ未定乗数法	98	隣接行列	207	ローパスフィルタ	185
ラプラシアン固有マップ	208	【る】		【わ】	
ランク	6	累積寄与率	101	ワンホットベクトル	3
ランク落ち	80	【れ】			
ランク分解	114	列	23		
ランク R 行列	80				
ランク R 近似	119				
ランク 1 行列	41				

【A】		【K】		【Q】	
ADMM	216	k 行列展開	155	QR 分解	69
ALS	109, 120	k 空間	186	QV	205
【B】		k -ランク	117	【S】	
Boolean 行列分解	202	【L】		SN 比	129
【C】		ℓ_0 ノルム	212	SNN	224
Coupled テンソル分解	177	ℓ_1 損失	195	SVD	76
CP 分解	113	ℓ_2 損失	193	【T】	
CP ランク	114	ℓ_2 ノルム	40	TMprod 関数	58
【E】		【M】		TNN	224
EM	218	MAP	190	TT コア	152
exact な分解	106	MM	218	TT 積	154
【H】		MPS	152	TT ランク	153
HALS	122	【N】		TT-MALS	166
HOOI	144	n モード積	50	Tucker 分解	133
HOSVD	137	n ランク	135	Tucker ランク	135
【I】		NMF	201	Tucker2 分解	134
I ダイバージェンス	196	NTF	201	TV	205
i 番目の要素	21	【P】		TVall 関数	111
IS ダイバージェンス	197	PCA	90	【数字・ギリシャ文字】	
		PSF	185	3 階テンソル	6
				δ 切り捨て SVD	159

—— 監修者・著者略歴 ——

田中 聡久 (たなか としひさ)	横田 達也 (よこた たつや)
1997年 東京工業大学工学部電気・電子工学科卒業	2009年 東京工業大学工学部開発システム工学科卒業
2000年 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了	2011年 東京工業大学大学院理工学研究科修士課程修了
2002年 東京工業大学大学院理工学研究科修士後期課程修了, 博士 (工学)	2014年 東京工業大学大学院理工学研究科修士後期課程修了, 博士 (工学)
2002年 理化学研究所脳科学総合研究センター研究員	2014年 理化学研究所脳科学総合研究センター研究員
2004年 東京農工大学講師	2016年 名古屋工業大学助教
2006年 東京農工大学助教授	2021年 名古屋工業大学准教授
2007年 東京農工大学准教授	現在に至る
2018年 東京農工大学教授	
現在に至る	

テンソルデータ解析の基礎と応用

—テンソル表現, 縮約計算, テンソル分解と低ランク近似—

Fundamentals of Tensor Data Analysis and Its Applications

—Tensor Representations, Calculations of Tensors, Tensor Decompositions and Low-rank Approximations—

© Tatsuya Yokota 2024

2024年 6月28日 初版第1刷発行

検印省略

監修者 田中 聡久
著者 横田 達也
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 三美印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03)3941-3131(代)

ホームページ <https://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-01407-5 C3355 Printed in Japan

(齋藤)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構 (電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp) の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。