

デジタル信号処理ライブラリー 4

高速アルゴリズムと 並列信号処理

工学博士 谷 萩 隆 嗣 編著

コ ロ ナ 社

編 者

谷 萩 隆 嗣 (千葉大学・工博)

共 著 者

谷 萩 隆 嗣 (千葉大学・工博)

1 章, 2 章,

3.1 節~3.3 節

李 磊 (山口大学・工博・理博)

3.3 節~3.5 節,

4 章

玉 置 久 (神戸大学・工博)

5 章

飯 國 洋 二 (大阪大学・工博)

6.1 節~6.4 節

酒 井 英 昭 (京都大学・工博)

6.5 節~6.7 節

清 水 聡 (沖電気工業(株)・博(工))

7 章

(所属は 2000 年 5 月現在)

刊行のこ と ば

最近のデジタル技術は驚異的な発展を続けており、従来はアナログ処理が行われていたもの、あるいはデジタル処理が不可能であったものでも、つぎつぎとデジタル処理されるようになってきた。それに伴い、多くの分野で、いっそう高度なデジタル技術の確立が求められてきている。

先般行われた、電気/電子/情報/通信分野における大規模なアンケート調査によれば、多くの企業および研究機関が「デジタル信号処理」を非常に重要視し、「必要性」ならびに「重要性」の項目でトップに挙げている。このことから、「デジタル信号処理」は、現在、社会的ニーズが最も高い学問分野の一つであると考えられる。

このような状況にかんがみ、「デジタル信号処理」を広範な立場からできるだけ統一的にまとめて、この分野に興味を持っている多くの方々に役立てて頂くことを目的として、「デジタル信号処理ライブラリー」を刊行する。

本ライブラリーは、以下の各巻で構成されている。

- 第1巻：デジタル信号処理と基礎理論
- 第2巻：デジタルフィルタと信号処理
- 第3巻：音声と画像のデジタル信号処理
- 第4巻：高速アルゴリズムと並列信号処理
- 第5巻：カルマンフィルタと適応信号処理
- 第6巻：ARMA システムとデジタル信号処理
- 第7巻：VLSI とデジタル信号処理
- 第8巻：情報通信とデジタル信号処理
- 第9巻：ニューラルネットワークとファジィ信号処理
- 第10巻：マルチメディアとデジタル信号処理

ii 刊 行 の こ と ば

これらの各巻のうち、第1巻から第3巻までは、大学の学部3、4年生でも十分理解できるような内容の「基礎編」である。また、第4巻から第6巻までは、内容を少しグレードアップした「発展編」であり、大学院修士課程の学生程度の学力を持つ者をおもな対象とする。さらに、第7巻から第10巻までは、大学や企業の研究者を始めとする、広範な社会人をおもな対象とした「応用編」であり、ある程度の基礎知識があれば、十分読みこなせる内容となっている。

したがって、本ライブラリーについては、読者の興味およびレベルに応じて多様な読み方が可能である。例えば、まったくの初歩からデジタル信号処理を学びたい場合には、「基礎編」から読み始めることが望ましい。一方、ある程度の基礎知識があれば、いきなり「発展編」あるいは「応用編」を読んでも、十分に読みこなすことができる。また、「基礎編」から読み始める場合でも、「基礎編」、「発展編」、「応用編」の順に読み進めるだけでなく、「基礎編」、「応用編」、「発展編」の順とすることも可能であるので、読者の興味に応じて読み進めて頂きたい。

幸い、本ライブラリーについては、各方面の第一線で活躍中の多くの方々に執筆して頂くことができたので、読者の期待にこたえられる内容になっていると確信している。

「デジタル信号処理」の分野は、理論および応用技術ともに急速な勢いで発展を続けているので、今後は、状況に応じて「デジタル信号処理ライブラリー」に新しい分野を追加し、本ライブラリーを、内容的にもさらに充実したものにしてゆくことを予定している。

最後に、本ライブラリーの刊行にあたって多大の御尽力を頂いた、コロナ社の方々に深く感謝の意を表する。

1996年1月

企画・編集責任者 谷萩 隆嗣

まえがき

リアルタイムで信号処理を行う場合や、大規模なシステムの信号処理を行う場合にはいろいろな工夫が必要となってくる。まず、個々の処理を高速化し、並列信号処理などの導入で全体を能率よく処理することによって、所期の目的を達成するように心がけることが重要である。

本書では、最初に、高速アルゴリズムについて考え、高速フーリエ変換 (FFT) や高速コサイン変換など、いくつかの代表的な直交変換アルゴリズムを詳しく述べる。つぎに、並列処理の概念を説明し、並列処理のための代表的なアルゴリズムを示す。最後に、アレイ信号処理について述べる。

第1章では、デジタル信号処理のための高速アルゴリズムの基礎として、種々の直交変換について詳しく説明する。最初に、直交関数系とフーリエ級数を述べ、つぎに実用上重要な離散フーリエ変換 (DFT) および離散コサイン変換 (DCT) を説明する。さらに、離散ハートレー変換、ウォルシュ・アダマール変換、カルーネン・レーブ変換などについて詳しく述べる。

第2章では、種々の高速フーリエ変換 (FFT) アルゴリズムを示す。まず、最も有名なCooley-Tukeyアルゴリズムについて述べ、基数2と基数4のFFTアルゴリズム、およびそれらを組み合わせたスプリットラディックスFFTアルゴリズムを紹介する。時間領域で扱う信号は多くの場合実数値であるので、つぎに実数値信号を対象としたいくつかの実数値FFTアルゴリズムを示す。さらに、Bruunアルゴリズムなどについて詳しく説明する。

第3章では、最初に離散コサイン変換 (DCT) を高速化した高速コサイン変換について述べる。つぎに、離散ハートレー変換の高速アルゴリズムである高速ハートレー変換を説明する。高速コサイン変換と同様に、高速ハートレー変換も実数演算だけで処理できるので、実数値信号に対して有効である。さら

に、高速ウォルシュ・アダマール変換、高速数論変換、高速多項式変換などを紹介する。

第4章では、デジタル信号処理のための並列アルゴリズムを考え、まず並列計算モデルについて説明する。つぎに、多次元FFTの並列計算アルゴリズムを紹介する。また、信号処理でよく現れるテプリッツ行列を係数行列とする連立1次方程式を取り上げ、その並列計算アルゴリズムを示す。

第5章では、大規模な組合せ最適化問題を効率よく解くための有力なアルゴリズムとして知られている遺伝的アルゴリズムについて述べる。特に、遺伝的アルゴリズムの概要および基礎理論について詳しく説明し、組合せ最適化問題への適用方法を述べる。信号処理においても、組合せ最適化問題に帰着される最適化問題に対しては、遺伝的アルゴリズムが有用となってくる。

第6章では、VLSIアーキテクチャに適した、大規模並列処理の可能なシストリックアルゴリズムについて詳しく述べる。シストリックアルゴリズムでは、シストリックアレイと呼ばれる1次元あるいは2次元に配置した演算器(PE)を利用して、それぞれのPE間で効率よく通信を行うことにより並列処理を実現している。信号処理で重要な畳込み演算や行列の積和演算、多項式の乗除算などの問題に対するシストリックアルゴリズムを紹介する。

第7章では、アレイ信号処理について述べる。電波や音波などの信号を送信あるいは受信するとき、素子をアレイ配置すれば効率よく信号処理を行うことができる。特に、アレイ信号処理によるパワースペクトルの推定方法について詳しく説明する。また、アレイ信号処理のいくつかの応用例を紹介する。

以上、本書で扱っている高速アルゴリズムおよび並列信号処理の考えは信号処理を効率よく行うためには必要不可欠である。特に、リアルタイムでの信号処理や大規模なシステムの信号処理は実際問題としても非常に重要であるので、本書を十分に活用して頂けるよう希望している。

2000年5月

編著者 谷萩 隆嗣

目次

Ⅰ. デジタル信号と直交変換

1.1 直交関数系	1
1.2 フーリエ級数	6
1.3 離散フーリエ変換	10
1.3.1 DFT の定義とその性質	10
1.3.2 2次元DFTとその性質	15
1.4 離散コサイン変換	19
1.4.1 DCT の定義とその性質	19
1.4.2 2次元DCTとその性質	21
1.5 離散ハートレー変換	23
1.5.1 ハートレー変換	23
1.5.2 DHT の定義とその性質	27
1.5.3 一般化DHTと2次元DHT	32
1.6 ウォルシュ・アダマール変換	35
1.6.1 ウォルシュ関数系	35
1.6.2 ウォルシュ変換	36
1.6.3 アダマール変換	38
1.6.4 ウォルシュ・アダマール変換	40
1.6.5 2次元ウォルシュ・アダマール変換	42
1.7 カルーネン・レーブ変換	43
1.7.1 カルーネン・レーブ変換	43

1.7.2	2次元カルーネン・レーブ変換	45
-------	----------------	----

2. 高速フーリエ変換アルゴリズム

2.1	Cooley-Tukey アルゴリズム	49
2.1.1	FFT の基本概念	49
2.1.2	時間間引き形 FFT アルゴリズム	54
2.1.3	周波数間引き形 FFT アルゴリズム	57
2.1.4	計算回数の比較	57
2.1.5	基数 4 の FFT アルゴリズム	60
2.1.6	スプリットラディックス FFT アルゴリズム	61
2.2	実数値 FFT アルゴリズム	65
2.2.1	CFFT と RFFT	65
2.2.2	CFFT を利用した RFFT(1)	66
2.2.3	CFFT を利用した RFFT(2)	67
2.2.4	時間間引き形 RFFT アルゴリズム	68
2.2.5	スプリットラディックス RFFT アルゴリズム	70
2.3	Bruun アルゴリズム	73
2.3.1	DFT のための FIR フィルタ	73
2.3.2	FIR フィルタの零点	75
2.3.3	高速アルゴリズム	76
2.3.4	実乗算回数の最小化	80
2.3.5	cos-DFT と sin-DFT	83
2.4	Rader-Brenner アルゴリズム	86
2.5	2次元 FFT アルゴリズム	89

3. 信号処理のための高速アルゴリズム

3.1	高速コサイン変換アルゴリズム	91
-----	----------------	----

3.1.1	FFT を利用した高速コサイン変換アルゴリズム (1)	91
3.1.2	FFT を利用した高速コサイン変換アルゴリズム (2)	93
3.1.3	FFT を利用した高速コサイン変換アルゴリズム (3)	94
3.1.4	DST を利用した高速コサイン変換アルゴリズム	95
3.1.5	DHT を利用した高速コサイン変換アルゴリズム	97
3.1.6	再帰形高速コサイン変換アルゴリズム	98
3.1.7	2次元高速コサイン変換アルゴリズム	100
3.2	高速ハートレー変換アルゴリズム	111
3.2.1	時間間引き形 FHT アルゴリズム	111
3.2.2	周波数間引き形 FHT アルゴリズム	113
3.2.3	基数 4 の FHT アルゴリズム	114
3.2.4	スプリットラディックス FHT アルゴリズム	115
3.2.5	再帰形 FHT アルゴリズム	119
3.3	高速ウォルシュ・アダマール変換アルゴリズム	127
3.3.1	1次元 FWHT アルゴリズム	127
3.3.2	2次元 FWHT アルゴリズム	130
3.4	高速数論変換アルゴリズム	131
3.4.1	高速フーリエ変換と高速数論変換	131
3.4.2	数論の基礎	131
3.4.3	数論変換	135
3.5	高速多項式変換アルゴリズム	141
3.5.1	多項式変換	141
3.5.2	高速多項式変換アルゴリズム	144
3.5.3	巡回畳込み計算	146

4. 信号処理のための並列アルゴリズム

4.1	並列計算モデル	151
4.1.1	並列コンピュータとアルゴリズム設計	151
4.1.2	並列コンピュータの分類	152

4.1.3 並列アルゴリズムの評価基準	153
4.2 多次元 FFT の並列計算アルゴリズム	155
4.2.1 行・列法を利用した並列アルゴリズム	155
4.2.2 直接変換法を利用した並列アルゴリズム	157
4.3 特殊な方程式の並列計算アルゴリズム	163
4.3.1 Trench-Zohar の方法	163
4.3.2 Bareiss の方法	165

5. 遺伝的アルゴリズム

5.1 遺伝的アルゴリズムと最適化問題	169
5.1.1 遺 伝 と 進 化	169
5.1.2 最 適 化 問 題	171
5.2 遺伝的アルゴリズムの概要	173
5.2.1 遺伝的アルゴリズムの概念	174
5.2.2 遺伝的アルゴリズムの基本構成	175
5.2.3 単純遺伝的アルゴリズム	177
5.2.4 計 算 例	178
5.2.5 遺伝的アルゴリズムの特徴	180
5.3 遺伝的アルゴリズムの基礎理論	181
5.4 遺伝的アルゴリズムによる組合せ最適化	183
5.4.1 遺伝的アルゴリズムの適用手順	183
5.4.2 ナップサック問題への適用例	186
5.4.3 信号処理への適用	191

6. シストリックアルゴリズム

6.1 シストリックアレイの概要	192
6.2 1次元アレイと2次元アレイ	196

6.3 畳込み演算用シストリックアレイ	198
6.4 行列積和演算用シストリックアレイ	207
6.5 IIR フィルタのシストリックアレイ	213
6.6 多項式除算のシストリックアレイ	215
6.7 逐次最小2乗法のシストリックアレイ	217

7. アレイ信号処理

7.1 空間スペクトル	223
7.1.1 1次元アレイの指向性	223
7.1.2 フーリエ変換によるアレイ信号処理	225
7.1.3 線形予測によるアレイ信号処理	226
7.2 信号処理のためのアレイ配置	229
7.2.1 方形アレイを利用した信号処理	229
7.2.2 円形アレイを利用した信号処理	230
7.3 パワースペクトルの推定	231
7.3.1 ARモデルのスペクトル推定	231
7.3.2 空間スペクトルの非線形性	233
7.3.3 空間スペクトルの分解能	236
7.4 アレイ信号処理の応用例	238
7.4.1 受信信号の位相変換	238
7.4.2 送受アレイの組み合わせ	239
7.4.3 送信信号との組み合わせ	240
引用・参考文献	241
索引	250

1. デジタル信号と直交変換

デジタル信号処理では、多くの直交変換が利用されている。本章では、最初に直交変換の基礎として、直交関数系およびフーリエ級数について述べる。つぎに、代表的な直交変換として、離散フーリエ変換 (DFT)、離散コサイン変換 (DCT)、離散ハートレー変換 (DHT)、ウォルシュ・アダマール変換 (WHT)、カルーネン・レーブ変換 (KLT) について説明する。また、1次元信号だけでなく2次元信号の直交変換についても述べる。

1.1 直交関数系

区間 $x \in (a, b)$ で定義された2乗可積分実数値関数列 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) を考え、 $\psi_m(x)$ と $\psi_n(x)$ の内積を (ψ_m, ψ_n) で表す。また、内積 (ψ_m, ψ_n) を式(1.1)で定義する。

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_a^b \psi_m(x) \psi_n(x) dx \quad (1.1)$$

一方、 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) が区間 $x \in (a, b)$ で定義された2乗可積分複素数値関数列の場合には、内積 (ψ_m, ψ_n) を式(1.2)で定義する。

$$(\psi_m, \psi_n) = \int_a^b \psi_m(x) \psi_n^*(x) dx \quad (1.2)$$

ただし、 $\psi_n^*(x)$ は $\psi_n(x)$ の複素共役を表し、式(1.2)の a と b は実数でも複素数でもよい。以下、特に断らない限り、実関数^{†1}すなわち定義域が実数の

^{†1} 注1.1を参照。

実数値関数を考える。

式(1.1)で $m \neq n$ のとき $(\psi_m, \psi_n) = 0$ が成立すれば、 $\psi_m(x)$ と $\psi_n(x)$ は区間 $x \in (a, b)$ 上で直交するという。このとき、関数列 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) は **直交関数系** (system of orthogonal functions) あるいは **直交系** (orthogonal system) と呼ばれている。さらに、 $(\psi_n, \psi_n) = 1$ が成立するとき、関数列 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) は **正規直交関数系** (system of orthonormal functions) あるいは **正規直交系** (orthonormal system) となる。

任意の関数 $f(x) \in L_2(a, b)$ に対して

$$c_n = (f, \psi_n) = \int_a^b f(x) \psi_n(x) dx, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.3)$$

としたとき、平均収束^{†1}の意味で

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \psi_n(x) \quad (1.4)$$

が成立すれば、正規直交系は**完備** (complete) あるいは**完全**であるという。

例えば、 $\{1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots\}$, $\{1, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots\}$, $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \dots\}$ は区間 $(-\pi, \pi)$ で直交関数系となっている。また、 $\{1/\sqrt{2\pi}, (1/\sqrt{\pi})\cos x, (1/\sqrt{\pi})\cos 2x, \dots\}$, $\{1/\sqrt{2\pi}, (1/\sqrt{\pi})\sin x, (1/\sqrt{\pi})\sin 2x, \dots\}$ は正規直交系である。特に、 $\{1/\sqrt{2\pi}, (1/\sqrt{\pi})\cos x, (1/\sqrt{\pi})\sin x, (1/\sqrt{\pi})\cos 2x, (1/\sqrt{\pi})\sin 2x, \dots\}$ は完備な正規直交系である。実際に利用されている直交関数系はすべて完備である。

つぎに、直交関数系が便利な理由を説明するために

$$f_k(x) = \sum_{n=0}^k c_n \psi_n(x) \quad (1.5)$$

とおき、 $f_k(x)$ で $f(x)$ を近似することを考えよう。式(1.5)の $f_k(x)$ で $f(x)$ が十分よく近似できている場合には、式(1.4)の代わりに式(1.5)を使用することができる。しかし、近似が十分でない場合には、式(1.5)の k をさらに大きくする必要がある。そこで、 k の代わりに $k+m$ として

^{†1} 注1.2を参照。

$$f_{k+m}(x) = \sum_{n=0}^{k+m} d_n \psi_n(x) \quad (1.6)$$

で $f(x)$ を近似することにする。

このとき、 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) が直交関数系であれば $d_n = c_n$ ($n=0, 1, \dots, k$) が成立する。したがって、新たに計算する必要があるのは係数 d_n ($n=k+1, k+2, \dots, k+m$) だけである。また、正規直交系では、式(1.3)の c_n を用いれば $d_n = c_n$ ($n=k+1, k+2, \dots, k+m$) から d_n が決定される。

しかし、 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) が直交関数系でなければ、係数 d_n ($n=0, 1, \dots, k+m$) をすべて最初から計算しなおさなくてはならない。しかも、式(1.3)のような簡単な式から係数 d_n ($n=0, 1, \dots, k+m$) を決定することはできない。このことから、関数列 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) の直交性が非常に重要であることがわかる。

そこで、区間 $x \in (a, b)$ で定義された 2 乗可積分実数値関数 $f(x) \in L_2(a, b)$ に対して、 f のノルムを

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)} \quad (1.7)$$

で定義し、関数列の直交化について考えてみることにしよう。

区間 $x \in (a, b)$ で 2 乗可積分かつ 1 次独立な関数列 $\{f_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) に対して、新しい関数列 $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) を次式で定義する。

$$\phi_n(x) = \frac{f_n(x) - g_n(x)}{\sqrt{(f_n - g_n, f_n - g_n)}}, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.8 a)$$

$$\phi_0(x) = \frac{f_0(x)}{\sqrt{(f_0, f_0)}} \quad (1.8 b)$$

$$g_n(x) = \sum_{m=0}^{n-1} (f_n, \phi_m) \phi_m(x), \quad n=1, 2, \dots \quad (1.9)$$

このとき、関数列 $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) は正規直交系となる。これを **Schmidt の直交化** あるいは **Gram-Schmidt の直交化** という。正規直交系を利用して信号処理を行いたい場合には、このような直交化が有用となる。

式(1.8)の関数列 $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) が正規直交系となることは、以下のようにして確かめられる。

まず、関数列 $\{f_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) の 1 次独立性から、区間 $x \in (a, b)$ で

は $f_0(x) \neq 0$ であり, $\|f_0\| \neq 0$ となる。同様にして, $f_n(x)$ は $f_m(x)$ ($m=0, 1, \dots, n-1$) の 1 次結合では表せないので $\|f_n - g_n\| \neq 0$ である。したがって, $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) の分母が 0 となることはない。また, 明らかに $\|\phi_n\| = 1$ である。

いま, 直交性を示すために, 式(1.8)と式(1.9)を利用すれば

$$(f_1 - (f_1, \phi_0)\phi_0, \phi_0) = (f_1, \phi_0) - (f_1, \phi_0)(\phi_0, \phi_0) = 0 \quad (1.10)$$

から $(\phi_1, \phi_0) = 0$ が得られる。さらに

$$\begin{aligned} \left(f_2 - \sum_{m=0}^1 (f_2, \phi_m)\phi_m, \phi_k\right) &= (f_2, \phi_k) - \sum_{m=0}^1 (f_2, \phi_m)(\phi_m, \phi_k) \\ &= (f_2, \phi_k) - (f_2, \phi_k)(\phi_k, \phi_k) = 0, \quad k=0, 1 \end{aligned} \quad (1.11)$$

から $(\phi_2, \phi_0) = (\phi_2, \phi_1) = 0$ となる。ゆえに, $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, 2$) はたがいに直交する。

以下, 同様にして $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots, k-1$) がたがいに直交していれば, $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots, k-1$) と $\phi_k(x)$ も直交することが示される。

ゆえに, 関数列 $\{\phi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) は正規直交系である。

つぎに, 正規直交系 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) を利用して近似したときの展開係数について考えるために, r_n ($n=0, 1, \dots$) を適当に選んで

$$g_k(x) = \sum_{n=0}^k r_n \psi_n(x) \quad (1.12)$$

とおけば

$$\begin{aligned} (f - g_k, f - g_k) &= \left(f - \sum_{n=0}^k r_n \psi_n, f - \sum_{n=0}^k r_n \psi_n\right) \\ &= (f, f) - 2 \sum_{n=0}^k r_n c_n + \sum_{n=0}^k r_n^2 \\ &= (f, f) - \sum_{n=0}^k c_n^2 + \sum_{n=0}^k (r_n - c_n)^2 \end{aligned} \quad (1.13)$$

が成立する。ただし, c_n ($n=0, 1, \dots$) は式(1.3)で用いたものである。

したがって, $\|f - g_k\|^2 = (f - g_k, f - g_k)$ が最小となるのは $r_n = c_n$ ($n=0, 1, \dots, k$) のときであり

$$(f - g_k, f - g_k) = (f, f) - \sum_{n=0}^k c_n^2 \quad (1.14)$$

となる。また, $(f - g_k, f - g_k) \geq 0$ であるので, 任意の正の整数 k に対して

$$(f, f) \geq \sum_{n=0}^k c_n^2 \tag{1.15}$$

が得られるが、これは**ベッセル** (F. W. Bessel) の**不等式**と呼ばれている。
 特に、 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) が完備ならば、**パーセバル** (M. A. Parseval) の**等式**

$$(f, f) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2 \tag{1.16}$$

が成立する。

注 1.1 関数の取り得る値が実数のとき実数値関数 (real-valued function)、複素数のとき複素数値関数 (complex-valued function) という。また、実数値関数の定義域が実数であれば実関数 (real function)、複素数値関数の定義域が複素数であれば複素関数 (complex function) と呼ばれている。

注 1.2 区間 $x \in (a, b)$ で定義された 2 乗可積分実数値関数 $f(x) \in L_2(a, b)$ に対して、 f のノルムを $\|f\| = \sqrt{(f, f)}$ で定義したとき、 $\|f - f_k\|^2 \rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$) となれば、 $f_k(x)$ は $f(x)$ に平均収束するという。平均収束を $\text{l.i.m.}_{k \rightarrow \infty} f_k(x) = f(x)$ と書くことがあり、l.i.m は limit in the mean を表している。一般に

$$\int_a^b |f(x) - f_k(x)|^p dx \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \tag{1.17}$$

のとき、 $f_k(x)$ は $f(x)$ に p 次平均収束するという。

注 1.3 Schmidt の直交化は、 n 次元内積空間において正規直交基底を作り出す場合に利用することができる。いま、 \mathbf{v}_k ($k=1, 2, \dots, n$) が 1 次独立な n 次元ベクトルであるとき

$$\mathbf{w}_k = \frac{\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_k}{\sqrt{(\mathbf{v}_k - \mathbf{u}_k, \mathbf{v}_k - \mathbf{u}_k)}}, \quad k=2, 3, \dots, n \tag{1.18 a}$$

$$\mathbf{w}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\sqrt{(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1)}} \tag{1.18 b}$$

$$\mathbf{u}_k = \sum_{m=1}^{k-1} (\mathbf{v}_k, \mathbf{w}_m) \mathbf{w}_m, \quad k=2, 3, \dots, n \tag{1.19}$$

とすれば、 \mathbf{w}_k ($k=1, 2, \dots, n$) は n 次元内積空間の正規直交基底となる。ただし、 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) は n 次元ベクトル \mathbf{u} と \mathbf{v} の内積を表す。

この場合にも

$$(\mathbf{w}_k, \mathbf{w}_m) = \begin{cases} 1, & k=m \\ 0, & k \neq m \end{cases} \tag{1.20}$$

となることが容易に確かめられる。

1.2 フーリエ級数

関数列 $\{\psi_n(x)\}$ ($n=0, 1, \dots$) として三角関数系を選んだとき、 $-\pi < x < \pi$ における $f(x)$ の直交展開は

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.21)$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.22 \text{ a})$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx \, dx, \quad n=1, 2, \dots \quad (1.22 \text{ b})$$

と表される。ここで \sim は右辺の級数が $f(x)$ に対応していることを示しており、右辺が収束してその和が $f(x)$ に等しくなるとき、 \sim の代わりに $=$ を用いることができる^{†1}。そこで、 \sim の代わりに $=$ を用いることができるとすれば

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (1.23)$$

が成立する。

式(1.23)は $f(x)$ の**フーリエ級数** (Fourier series) と呼ばれている。また、式(1.22)の係数 a_n と b_n をそれぞれ $f(x)$ の**フーリエ係数** (Fourier coefficient) という。

特に、 $f(x)$ が $-\pi < x < \pi$ で定義されているとき、 $f(x+2n\pi) = f(x)$, ($n = \pm 1, \pm 2, \dots$) とすれば、 $f(x)$ の定義域を $-\infty < x < \infty$ に拡大することができる。これをあらためて $f(x)$ と書くことにすると、 $f(x)$ は周期 2π の周期関数である。ただし、不連続点では $f(x) = \{f(x+0) + f(x-0)\}/2$ とする。

$f(x)$ が周期 2π の周期関数であるとき、 γ を任意の実数として

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi+\gamma}^{\pi+\gamma} f(x) \cos nx \, dx, \quad n=0, 1, \dots \quad (1.24 \text{ a})$$

^{†1} 収束性については注1.4を参照。

索

引

【あ】

アダマール関数	39
アダマール逆変換	39
アダマール行列	38, 40
アダマール変換	39
アレイ信号	225
アレイ信号処理	226, 239, 240
暗黙的並列性	180

【い】

位相差	223
1次元アレイ	193, 202, 223
1次元シストリックアレイ	196
1次元シストリックシステム	198
1次独立	3
1-パタフライ	62
一様交叉	190
一様収束	9, 10
一点交叉	190
遺伝	169
遺伝演算子	174, 177, 183
遺伝子	174
遺伝子型	170, 179, 191
遺伝子座	170, 174
遺伝子表現	177, 183
遺伝的アルゴリズム	171, 173

【う】

ウェーブフロントアレイ	
-------------	--

195

ウォルシュ・アダマール逆変換	41, 127
ウォルシュ・アダマール変換	41, 127
ウォルシュ関数	35, 127
ウォルシュ関数系	35
ウォルシュ逆変換	37
ウォルシュ行列	37
ウォルシュ変換	37

【え】

エリート戦略	188
演算器	192

【お】

オイラー関数	133
オイラーの定理	134
オーバヘッド	72, 195
折返しひずみ	226

【か】

解空間	171, 184
階数	133
可逆多項式変換	143, 144
確率過程	44
可能領域	171
カルーネン・レーブ変換	45
関数列	3, 6
関数列の直交化	3
完全	2
完全剰余類系	133
完備	2
完備な正規直交系	2, 9

【き】

基数2のFFTアルゴリズム	52, 54
基数4のFFTアルゴリズム	52, 53, 60
基底関数	13, 21, 41
ギブンス変換	218, 220
基本角周波数	8
基本空間	171
基本定理	182
基本バタフライ	62
逆変換核	24, 38, 39
行列積和演算	207
行・列法	18, 90, 111, 130, 155

【く】

空間周波数	226
空間スペクトル	225
組合せ最適化問題	183
クロックスキュー	195

【け】

結合型プロセッサ	153
決定変数ベクトル	174
原始単位根	133

【こ】

交叉	170, 175, 178, 184
交叉率	175
格子形フィルタ	227
合成積則	12, 13, 16, 25, 28
高速ウォルシュ・アダマ	

ール変換 127
 高速コサイン変換アルゴリズム 91
 高速数論変換アルゴリズム 131
 高速多項式逆変換アルゴリズム 145
 高速多項式変換アルゴリズム 145
 高速ハートレー変換アルゴリズム 111
 高速フーリエ逆変換 49
 高速フーリエ変換 49
 交番数 37
 混合基数形アルゴリズム 65
 コントロールフロー型コンピュータ 153

【さ】

再帰アルゴリズム 100, 110, 111, 119, 126
 再構成可能なシストリックアレイ 197
 最大エントロピー法 227
 最適化 171
 三角関数系 6, 9
 3/3 アルゴリズム 58, 60
 3次元アレイ 210
 3-パタフライ 62

【し】

時間間引き形アルゴリズム 52, 53
 時間間引き形 FHT アルゴリズム 112, 113, 123
 次元 182
 シーケンシー 37
 自己相関関数 44, 46, 231
 自己相関行列 232, 233, 236
 シストリックアレイ 192

—の構造 210
 自然選択説 169
 実関数 5
 実行ストリーム 152
 実数値 FFT 65
 実数値関数 5
 周期関数 6, 12, 17
 周期性 12, 16, 28
 従属ベクトル 202
 周波数分解能 236
 周波数間引き形アルゴリズム 52, 54
 周波数間引き形 FHT アルゴリズム 113, 118, 119
 周波数領域の畳込み 13, 17
 主根 133
 受信アレイ 239
 巡回畳込み 146
 巡回畳込み計算 12, 16, 28, 131
 巡回畳込み特性 131, 136, 142
 準最適解 172
 順序的 40
 剰余類環 131
 初期収束現象 181
 進化 169
 信号系列 10, 15, 22, 37

【す】

推移則 12, 16, 25, 28
 数論変換 131
 スキーマ 181
 スキーマ定理 181, 182
 スケーリング 24
 スパイラルシストリックアレイ 195
 スプリットラディックス FFT アルゴリズム 61
 スプリットラディックス RFFT 72

スプリットラディックス RFFT アルゴリズム 118
 スペクトル 225

【せ】

正規直交関数系 2
 正規直交基底 5
 正規直交系 2, 3, 43, 45
 正規直交変換 40
 整数計画問題 186
 切断集合再タイミング法 213
 セミシストリックアレイ 193
 線形性 12, 16, 24, 28
 線形予測 239
 線形予測分析 234
 線形離散時間システム 207
 染色体 170, 174
 線スペクトル 8
 選択 175, 177

【そ】

相関 13
 相関則 13, 17, 26, 29
 送信アレイ 239

【た】

対称性 28
 対立遺伝子 170, 174
 多項式変換 141
 多次元 DFT 155
 多次元 FFT 159
 畳込み演算 198, 207, 217
 畳込み計算 25
 単位根 133
 単位遅延演算子 73
 探索空間 184
 探索的手法 173
 単純交叉 190
 単純 GA 176

- 【ち】**
 逐次アルゴリズム 151, 154
 逐次改善法 172
 逐次型コンピュータ 151
 逐次最小2乗法 217
 中国人の剰余定理 135, 139, 147
 直積 157
 直交 2
 直交関数系 2
 直交系 2
 直交変換行列 156
- 【つ】**
 積木 183
 積木仮説 183
- 【て】**
 定位置演算 57, 60, 62, 69, 72
 定義長 182
 適応度 177, 179
 適応度比例選択 189
 データ依存グラフ 202, 210
 データストリーム 152
 データフロー型コンピュータ 153
 テブリッツ行列 163
 テブリッツ形連立1次方程式 163, 165
 デマンドフロー型コンピュータ 153
- 【と】**
 同時処理 152
 動的計画法 172
 突然変異 170, 175, 178, 183
 突然変異率 175
 トーナメント選択 190
- トランスバーサルフィルタ 74
 ドントケア記号 180, 181
- 【な】**
 内積空間 5
 ナップサック問題 186
- 【に】**
 2次元DCT 21, 47, 100
 2次元DFT 15
 2次元DHT 33
 2次元FCT 91
 2次元FFT 90
 2次元IDCT 100
 2次元IDFT 15
 2次元IDHT 33
 2次元IWHT 42, 130
 2次元KLT 47, 48
 2次元WHT 42, 130
 2次元アレイ 193
 2次元ウォルシュ・アダマール逆変換 42
 2次元ウォルシュ・アダマール変換 42, 130
 2次元カルーネン・レーブ変換 47
 2次元高速コサイン変換アルゴリズム 91
 2次元ストリックアレイ 196, 208
 2次元信号系列 103
 2次元ハートレー変換 32
 2次元パワースペクトル 229
 2次元フーリエ変換 32
 2次元離散ハートレー逆変換 33
 2次元離散ハートレー変換 33
 2次元離散フーリエ逆変換 15
 2次元離散フーリエ変換 15
- 変換 15
 2乗可積分実数値関数列 1, 3, 5
 2乗可積分複素数値関数列 1
- 【の】**
 ノルム 5
- 【は】**
 パイプライン化 201, 208, 214
 パイプライン処理 152, 193, 194
 パイプラインプロセッサ 153
 パーセバルの等式 5, 13, 17
 バタフライ 55
 バタフライ計算 55
 発見的手法 173, 190
 ハートレー逆変換 24
 ハートレー変換 23
 パワースペクトル 226, 233, 236
 反射係数 227
 ハンドシェーク方式 195
- 【ひ】**
 非順序的 40
 ビット逆転 56, 57, 119, 123, 146, 162
 評価関数 171
 表現型 170, 174, 179, 183, 191
- 【ふ】**
 フィルタバンク 73
 フェルマ数 137, 138, 139
 フェルマ数変換 137, 139
 フェルマの定理 134
 フォンノイマン型コン

ピュータ 151
 フォンノイマン型マシン 192
 フォンノイマンボトル ネット 193
 複数点交叉 190
 複素関数 5
 複素数値 FFT 65
 複素数値関数 5
 部分的列挙法 173
 フーリエ級数 6, 9
 フーリエ係数 6
 フーリエ変換 9
 フローグラフ 68, 79, 128
 プログラマブル 198
 プロトコル 195
 分枝限定法 172

【へ】

平均収束 2, 5, 9
 平面波 223
 並列アルゴリズム 151, 154
 並列コンピュータ 151
 並列度 152
 並列プロセッサ 153
 ベッセルの不等式 5
 ペナルティ 187

変換核 13, 19, 23, 38, 39, 102, 111
 変換行列 18
 変調 25

【ほ】

方形アレイ 229

【ま】

窓関数 15
 マルチプロセッサ 153

【む】

無相関 44, 46, 232
 無相関化 43, 45, 47

【め】

命令ストリーム 152

【も】

目的関数 171
 モンテカルロ法 172

【や】

山登り法 172

【ゆ】

有界変動 9

【よ】

欲張り法 173, 190
 予測係数 227
 予測誤差信号 227
 4/2 アルゴリズム 58, 59

【ら】

ランキング選択 189
 ランダム探索法 172

【り】

離散コサイン逆変換 19, 91
 離散コサイン変換 19, 91
 離散時間信号 11
 離散ハートレー逆変換 27, 112
 離散ハートレー変換 27, 97, 111
 離散フーリエ逆変換 11
 離散フーリエ変換 10, 225

【る】

ルーレット選択 189

【A】

AR 過程 232
 AR モデル 233

【B】

Bareiss の方法 165
 Bruun アルゴリズム 73

【C】

cas 26
 CFFT 65
 cms 26

Cooley-Tukey アルゴリズム 49, 54
 cos-DFT 73, 83

【D】

DCT 19, 91, 95
 DCT-I 19
 DCT-II 19, 91
 DCT-III 19
 DCT-IV 20
 DFT 10, 225
 —の性質 12
 DFT 行列 156

DFT フィルタ 73, 77, 80, 84
 DHT 27, 97, 111
 DHT-I 32
 DHT-II 32
 DHT-III 32
 DHT-IV 32
 DIF 53
 Dini の判定条件 10
 DIT 52
 DST 95

【F】		【K】		RDFТ	68
FCT	91	KLТ	45, 48	RFFT	68
FFT	49	Kronecker 積	157	【S】	
FHT	111	【M】		Sande-Tukey アルゴ リズム	54
FIR フィルタ	73, 74, 213	MEM	227, 239	Schmidt の直交化	3, 5
FNTT	131	MIMD	152	Schwarz の不等式	10
FPT	145	MIMD 型コンピュータ		SGA	177
FWHT	127		153	SIMD	152
【G】		MISD	152	SIMD 型コンピュータ	
GA	171, 173	mod	102		153
——の基本定理	181	modulo	102	sin-DFT	73, 83
Gram-Schmidt の直交化		MPEG	23	SISD	152
	3	【N】		SRFFT	61
【H】		NP 困難	172	【T】	
Hölder の不等式	10	NTT	131	Trench-Zohar の方法	
【I】		【P】			164
IDCT	19, 91	p 次平均収束	5, 9	【V】	
IDFT	11	PE	192, 194	VLSI	194
IDHT	27, 112	PN 系列	240	VLSI アーキテクチャ	192
IFFT	49	PN 符号	240	【W】	
IFPT	145	【Q】		WFTA	72
IIR フィルタ	213	QR 分解	217	WHT	41
IWHT	41	【R】		Winograd フーリエ変換 アルゴリズム	72
【J】		Rader-Brenner アルゴ リズム	86		
Jordan の判定条件	9				
JPEG	23				

—— 編著者略歴 ——

1966年 東京工業大学理工学部電子工学科卒業
1971年 東京工業大学大学院理工学研究科
電子工学専攻（博士課程）修了，工学博士
1971年 千葉大学講師
1974年 千葉大学助教授
1984年 千葉大学教授
現在に至る

高速アルゴリズムと並列信号処理

Fast Algorithms and Parallel Signal Processing

© Takashi Yahagi 2000

2000年7月26日 初版第1刷発行

検印省略

編著者 や 谷 萩 隆 嗣
東京都文京区千駄木5-19-10

発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来辰巳

印刷所 新日本印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 4-339-01124-X (川田) (製本：染野製本所)

Printed in Japan



無断複写・転載を禁ずる

落丁・乱丁本はお取替えいたします