確率モデルを用いた統計的信号処理

博士（情報科学）　片岡　駿　著

コロナ社

ま　え　が　き

本書は確率モデルを用いた信号処理手法に関する入門書であり，大学の教養課程や専門課程において基本的な微積分学や信号処理を学んだ学生を対象に確率モデルを用いた信号処理の基礎的な内容を解説したものである．確率モデルを用いた信号処理の方法は従来の信号処理教育とは別の形で扱われることが多く，学部の専門教育で学んだ基本的な信号処理の方法との関係性が曖昧なままになってしまうことが多い．本書は，確率モデルを用いた統計的な信号処理の方法をこれから学ぼうとする学生を対象として，従来の信号処理教育で学んだ内容から確率モデルを用いた統計的信号処理への橋渡しとなることを目指して執筆したものである．

本書は，10 章で構成している．

最初に，1 章で信号処理についてごく簡単に説明した後，2 章で離散時間信号を対象とした信号処理システムについて述べる．2 章の内容は通常の信号処理教育で扱われる内容である．3 章と 4 章では，統計的信号処理の基礎となる不規則信号の調査方法について扱う．標本平均や標本分散といったよく使用される基本的な調査手法について扱うとともに，可視化による調査の重要性を強調している．5 章と 6 章では，確率モデルの基本的な扱い方について解説する．まず，5 章では，確率分布の扱い方を述べるとともに，ガウス分布などの統計的信号処理の基礎となる重要な確率分布を紹介し，続く 6 章では，観測データを用いた確率モデルの調整方法である最尤推定の方法について解説する．2 章から 6 章までが信号処理で重要となる統計的方法の基礎である．

後半の 7 章以降は，これまでの内容をより応用的な内容に発展させていく．まず，7 章では，信号などの系列データの扱いの基礎となる自己回帰モデルについて解説する．自己回帰モデルは系列データを扱うための基本的な確率モデ

ルであるだけでなく，信号処理システムとも関係がある重要な確率モデルである．8 章では，これまでの内容を用いて，確率モデルの方法がどのように信号処理への応用方法について概説する．9 章と 10 章では，確率モデルを用いた統計的信号処理のやや発展的な内容について扱う．まず，9 章では，グラフィカルモデルという確率モデルの可視化方法と確率伝搬法というグラフ構造を利用した周辺分布の計算方法について解説する．そして，最後の 10 章では，線形動的システムという重要な状態空間モデルについて扱い，カルマンフィルタやカルマン平滑化といった統計的信号処理の重要な手法について解説する．

本書の執筆にあたって，多くの文献を参考にさせていただいた．巻末に関連図書としてその一部を挙げている．最後に，本書の執筆にあたってお世話になった関係者各位に心からの感謝を申し上げたい．また，本書を執筆する機会をくださったコロナ社に御礼を申し上げる．

2023 年 7 月

片岡　駿

目　　　　次

1.　信　号　処　理

2.　信号とシステム

3.　不規則信号の調査 1

4.　不規則信号の調査 2

5.　確　率　分　布

6.　最　尤　推　定

7.　自己回帰モデル

8.　確率モデルを用いた信号処理

9.　グラフィカルモデル

10.　線形動的システム

1 信号処理

1.1 信号と信号処理

われわれは日常生活において，多種多様な情報を意識的または無意識的に扱っている．例えば，自転車で移動しているときには意識的または無意識的に現在の速度を感じ取り，つぎの道を曲がるために速度の調整を行う．多くの人々が会話している騒がしい場所であっても，隣の会話相手の発言を正確に聞き取ることができる．では，われわれが日常的に行っているこのような行為をコンピュータ（計算機）に行わせるにはどのようにすればよいであろうか？ コンピュータが扱うことができるのは離散的な数値のみである．コンピュータがわれわれと同じように情報を扱うためには，われわれが意識的または無意識的に扱っている情報を数値として変換する必要がある．このような情報の変換はさまざまな計測センサを使うことで行うことができる．われわれは速度センサを使うことで自転車の速度を数値として表すことができ，マイクロフォンを使うことで周囲の音声を数値によって表すことができる．このような計測センサによる測定を繰り返すことで，われわれは特定の情報を変換した連続的または離散的な数値の系列を得ることができる．**信号** (signal) とは計測センサによって収集された数値の系列のことであり，連続的に変化する数値の系列のことを**連続時間信号** (continuous-time signal) といい，離散的に変化する数値の系列は**離散時間信号** (discrete-time signal) と呼ばれる．

しかしながら，単に計測センサで信号を収集するだけでは，われわれが日常

的に行っているこのような行為をコンピュータに行わせることはできない．計測センサで収集された信号にはノイズなどの本来の目的には不要な情報がたくさん含まれており，コンピュータにわれわれと同じような動作を行わせるためにはこれらの情報が邪魔になってしまうからである．この問題を解決する一つの方法は，収集した信号から不要な情報を取り除きコンピュータが正常に動作しやすい信号を作り出すことである．このように，与えられた信号を加工してわれわれの望む信号を作り出す操作は**信号処理** (signal processing) と呼ばれ，計測センサで収集された信号に適切な信号処理を施すことでコンピュータにさまざまな動作を行わせることが可能になる．

1.2　本書での表記について

本書では，確率モデルを用いた離散時間信号の扱い方について解説していく．離散時間信号とは

$$[\ 1.6,\ 2.6,\ 0.4,\ 1.4,\ 0.6,\ 2,\ 1.4,\ -0.2,\ 0.3,\ 0.7,\ 1.4\ ] \tag{1.1}$$

のような離散的な実数値の系列のことである．通常，離散時間信号という言葉は

$$[\ \ldots,\ 2.1,\ 2.7,\ 4.3,\ 6.9,\ 7.9,\ 7.3,\ 5.1,\ 6.2,\ 3,\ 3.9,\ \ldots] \tag{1.2}$$

のような無限長の離散時間信号を指す場合が多い．有限長の離散時間信号は無限長の信号の一部を切り抜いたものである．本書では，有限長の離散時間信号と無限長の離散時間信号を区別して，式 (1.1) のような有限長の信号を

$$\mathbf{x} = [\ 2.1,\ 1.1,\ -0.7,\ 1.5,\ 1.6\ ] \tag{1.3}$$

のように太字の立体で表記し，式 (1.2) のような無限長の信号を

$$\overline{\mathbf{x}} = [\ \ldots,\ 0.3,\ -1.7,\ -0.2,\ 1.1,\ 2.4,\ \ldots\ ] \tag{1.4}$$

のように上線付きの太字の立体で表記する．離散時間信号に含まれるそれぞれ

の数値のことを**信号値** (signal value) といい，各信号値の位置（計測時刻）のことを**時点**という．本書では，時点 n の信号値を x_n とする長さ N の有限長離散時間信号を $\mathbf{x} = [\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{N-1}]$ で表記し，時点 n の信号値を $\overline{\mathrm{x}}_n$ とする無限長離散時間信号を $\overline{\mathbf{x}} = [\ldots, \overline{\mathrm{x}}_n, \ldots]$ で表記する．通常は，信号の計測開始時刻を時点 $n = 0$ に設定する．

本書では，離散時間信号をベクトルのように扱い，離散時間信号 $\mathbf{x} = [\mathrm{x}_0, \ldots, \mathrm{x}_{N-1}], \mathbf{y} = [\mathrm{y}_0, \ldots, \mathrm{y}_{N-1}]$ と実数値 α に対して

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = [\mathrm{x}_0 + \mathrm{y}_0, \ldots, \mathrm{x}_{N-1} + \mathrm{y}_{N-1}] \tag{1.5}$$

および

$$\alpha\mathbf{x} = [\alpha\mathrm{x}_0, \ldots, \alpha\mathrm{x}_{N-1}] \tag{1.6}$$

の計算が行えるものとする．無限長の離散時間信号に対してもこの操作は同様であり，離散時間信号 $\overline{\mathbf{x}} = [\ldots, \overline{\mathrm{x}}_n, \ldots], \overline{\mathbf{y}} = [\ldots, \overline{\mathrm{y}}_n, \ldots]$ と実数値 α に対して

$$\overline{\mathbf{x}} + \overline{\mathbf{y}} = [\ldots, \overline{\mathrm{x}}_n + \overline{\mathrm{y}}_n, \ldots] \tag{1.7}$$

$$\alpha\overline{\mathbf{x}} = [\ldots, \alpha\overline{\mathrm{x}}_n, \ldots] \tag{1.8}$$

である．

確率モデルを用いた信号処理では，確率分布の変数（確率変数）とその変数がとりうる値（実現値）で変数を区別する場合が多い．本書では，信号の確率変数を $\boldsymbol{x}$ や x_n のような斜体で表記し，確率変数がとりうる具体的な信号を $\mathbf{x}$ や x_n のような立体とすることでこの二つの変数を区別している．その他，多少の例外はあるが，標本平均などの具体的な信号から計算される量には立体を使用し，確率モデルのパラメータなどには斜体を使用している．本書で用いるおもな記号を**表 1.1** にまとめる．

表 1.1　本書で用いるおもな記号

記号	使用対象
$\overline{\mathbf{x}}$	無限長の離散時間信号（$\overline{\mathbf{y}}, \overline{\mathbf{u}}$ などの記号も用いる）
$\mathbf{x}$	有限長の離散時間信号（$\mathbf{y}, \mathbf{z}$ などの記号も用いる）
$\overline{\mathrm{x}}_n$	信号 $\overline{\mathbf{x}}$ の時点 n での信号値
x_n	信号 $\mathbf{x}$ の時点 n での信号値
$\overline{\boldsymbol{\delta}}$	単位インパルス信号
$\overline{\mathbf{h}}$	インパルス応答
$\boldsymbol{x}$	信号 $\mathbf{x}$ の確率変数
x_n	信号値 x_n の確率変数
m	標本平均
v	標本分散
s	標本標準偏差
c_{xy}	信号 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の標本共分散
r_{xy}	信号 $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ の標本相関係数
μ	確率変数の平均，ガウス分布のパラメータ
σ^2	確率変数の分散
σ	確率変数の標準偏差，ガウス分布のパラメータ
σ_{xy}	確率変数 x, y の共分散
r_{xy}	確率変数 x, y の相関係数
$\boldsymbol{\theta}$	確率分布のパラメータをまとめたもの
$\boldsymbol{r}$	カテゴリカル分布のパラメータ
$\boldsymbol{\mu}$	二次元ガウス分布の平均ベクトル
Σ	二次元ガウス分布の共分散行列
c	自己回帰モデルのパラメータ
ϕ	自己回帰モデル，状態空間モデルのパラメータ

2 信号とシステム

2.1 確定信号と不規則信号

離散時間信号 $\overline{\mathbf{x}} = [\ldots, \overline{\mathrm{x}}_n, \ldots]$ を考える．このとき，時点 n での信号値 $\overline{\mathrm{x}}_n$ があらかじめ決まっており，その信号値が n の関数として表せるような信号のことを**確定信号** (deterministic signal) と呼ぶ．これに対して，時点 n での信号の値 $\overline{\mathrm{x}}_n$ が確定しておらず，その信号値が確率的に変化する信号のことを**不規則信号** (random signal) と呼ぶ．

確定信号と不規則信号の例をそれぞれ**図 2.1** と**図 2.2** に示す．図 2.1 は時点 n の信号値が $\overline{\mathrm{x}}_n = \sin(2\pi n/10)$ で表される確定信号であり，任意の時点 n での信号値 $\overline{\mathrm{x}}_n$ を予測することができる．一方，図 2.2 は $\overline{\mathrm{x}}_n$ の値が確率的に変化する不規則信号であり，時点 n での信号値 $\overline{\mathrm{x}}_n$ をあらかじめ知ることはできない．世の中の多くの信号は不規則信号である．しかしながら，確定信号を扱う

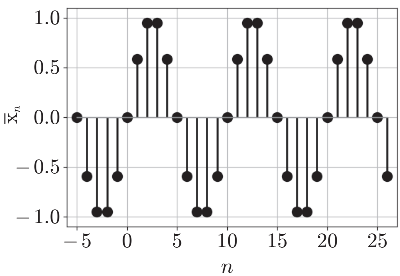

図 2.1 確定信号の例

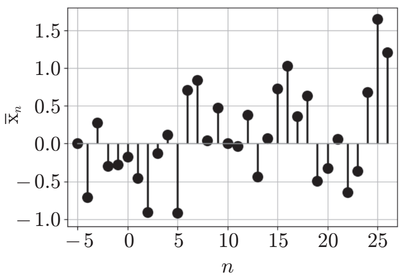

図 2.2 不規則信号の例

索　　　引

―― 著 者 略 歴 ――

2009年　東北大学工学部電気情報・物理工学科（情報工学コース）卒業
2011年　東北大学大学院情報科学研究科博士課程前期 2 年の課程修了（応用情報科学専攻）
2014年　東北大学大学院情報科学研究科博士課程後期 3 年の課程修了（応用情報科学専攻）
　　　　博士（情報科学）
2014年　日本学術振興会特別研究員 PD
2014年　東北大学大学院助教
2018年　小樽商科大学准教授
　　　　現在に至る

確率モデルを用いた統計的信号処理
Statistical Signal Processing Using Probability Models

2023 年 9 月 20 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　片岡（かたおか）　駿（しゅん）
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–00988–0　C3055　Printed in Japan　（大井）