これなら解ける

電気数学

実験でアプローチ

工学博士・博士（理学）　髙木 茂行

博士（工学）　美井野 優

【共著】

コロナ社

序　　　文

電気電子工学科の教員として学生を指導しながら，いつも残念に思うことがある。電気電子工学に強い関心があり，学びたい専門分野も明確に決まっているにもかかわらず，数学が苦手なことで専門科目の理解が深まらないことだ。彼らは大学入学までのどこかのタイミングで，例えば太陽電池や PC，LED などの電気電子機器に出会い，この分野の発展性・可能性に強い期待を持ったはずだ。

期待する専門分野の勉強に胸を膨らませて大学に入学してきた学生に，**立ちはだかるのが数学だ**。電気は目に見えないので，その動きを捕らえて理解・可視化するには数学がとても重要である。しかし，高校ではそんなことは教えてくれない。虚数が交流回路の計算に使われ，交流に対するキャパシタ，インダクタの動作を理解するには微分や積分が必須だとは，夢にも思わない。さらに，高校の物理では，微分や積分を使わなくても済むようにカリキュラムが組まれているため，理系で受験に必要だからというぐらいの意識で数学を学ぶ学生もいるだろう。

大学に入学すると，すぐに微分積分や線形代数の授業がはじまる。大学の授業は高校の授業に比べれば難しく，大学レベルの問題がスラスラ解ける学生はそれほど多くはいない。これらの科目が終わると，数学と電気電子工学とを結ぶ授業として，電気数学の授業が行われる。電気数学が終わると，後にも先にも数学関連の授業は行われない。したがって

「電気数学は，電気電子工学を学ぶ学生にとって必要な数学能力を修得する最後の砦」

となる。

こうした状況にもかかわらず，電気数学がカバーする範囲は広く，微分や積分などの主要項目に 1 回，多くても 2 回の授業しか充当できない。時間的制約の中で，多くの学生に電気電子工学で必要な数学を理解してもらおうと，授業が終わるたびに振り返り，教え方やその内容についての試行錯誤を繰り返してきた。そして，特に①電気電子工学と数学の関係を理解してもらうこと，②数学を解く楽しみを感じてもらうこと，③電気電子工学で必要となる数学をできるだけ網羅して解説すること，の 3 点が重要だと考えた。

こうして，積み上げてきたノウハウをテキストにまとめたのが本書である。目的とした 3 項目については，つぎのような工夫を凝らした。

① **電気電子工学と数学の関係を理解**　両者の関係を理解するためには，実際の電気電子工学とそれを記述する数学を示すのが一番と考えた。そこで，数学で記述された現象と実際の実験結果とが一致する例をできるだけ紹介するようにした。具体的な例として，4 章では，指数関数のグラフと実際の減衰波形から時定数を理解できるようにしている。

② **数学を解く楽しみ**　数学の問題が解けるようになれば，数学への興味も湧き，勉強時間も

長くなり，一段と難しい問題にもチャレンジできるという正のループが働く。本書では，難しい証明や理論は可能な限り省き，問題を解く手法に重点を置いた。問題を解く手順，ノウハウ，注意することを「解き方」としてまとめた。解法の手順が長い 8，9 章の微分方程式では，その大まかな解法手順を最初に Step として示し，それぞれの Step での解き方を順次説明する方法で説明した。

③ **電気電子工学で必要な数学の網羅**　電気数学は幅広い分野を扱う。半年の授業の場合十分に対応できないため，大学によってはフェーザ，ラプラス変換，フーリエ級数，ベクトル解析を電気数学の授業から除き，関連する専門分野で教えるようにしている。しかしながら，たとえ半年でも授業を受けておけば，いざ必要になったときに，抵抗なく自分で学ぶことができる。そこで，これらの内容もテキストに加えた。

これまで電気数学を教えてきた試みを本テキストに盛り込んだ。このテキストを使って学習した学生が少しでも数学に興味を持ち，電気電子工学の専門科目を学ぶときの数学力に身に付けてくれることを切に望む。そして，大学院や社会人となって，目も覚めるような素晴らしい研究・開発成果を出してくれることを切に期待する。

なお，本書の執筆は以下のように 2 名で分担した。

高木茂行：5 章，6.4〜6.6 節，8〜12 章
　　　　　各章の導入部，実験で試す

美井野優：1〜4 章，6.1〜6.3 節，7，13 章
　　　　　章末問題略解，章末問題詳解

本書に掲載できなかった章末問題詳解はコロナ社の Web ページ（https://coronasha.co.jp/np/isbn/9784339009842）からダウンロードができるので答え合わせだけでなく解説を確認して自習に活用してほしい。

2022 年 6 月

著者を代表して　髙木 茂行

【講義を担当する先生方へ】

このテキストを使って授業する際のいくつかの活用方法として，選択する章を表にまとめました。

1 年間の履修では 1 年生の前期あるいは後期から，前半に 1〜7 章まで，後半に 8〜13 章までの授業方法が考えられます。

半年間での履修では，学生がある程度の数学や電気回路の専門知識を修得していることが望ましいと考えます。一つのパターンは電気電子系専門科目でよく使われる数学に特化する方法で，もう一つは微分・積分，線形代数を履修した後に数学科目の仕上げとして，全章を学ぶ方法があります。

本書の活用方法

履修時期	1 年間で履修する場合		半年間で履修する場合	
	前半 電気数学基礎	後半 電気数学応用	1 年後期以降 電気電子系数学に特化	1 年後期以降 電気電子系数学仕上げ
1 章	○			△
2 章	○		○	○
3 章	○			○
4 章	○			○
5 章	○		○	○
6 章	○		○	○
7 章	○		○	○
8 章		○	○	○
9 章		○	○	○
10 章		○	○	○
11 章		○	○	○
12 章		○	○	○
13 章		○	○	○

目　　　　次

1　行列（基本編：2×2 の行列）

2　行列（応用編：3×3 の行列）

3 三　角　関　数

4 指数と対数およびその関数

5　複　素　数

6　微 分・偏 微 分

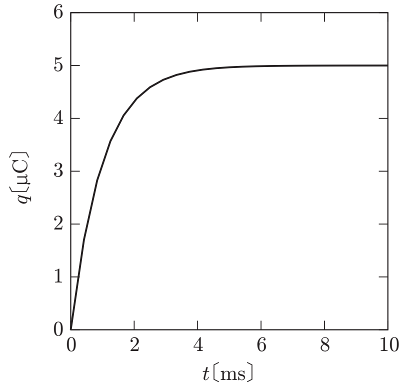
7　積　　分

8　1階の微分方程式

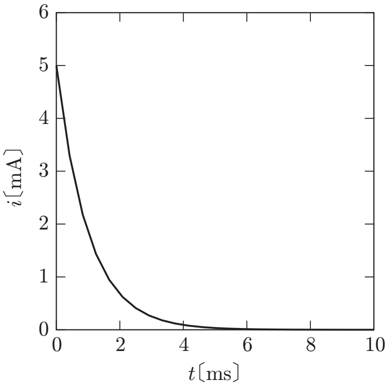
9　2階の微分方程式

10　ラプラス変換

13　ベ　ク　ト　ル



(a)　電荷の関数 $q(t)$



(b)　電流の関数 $i(t)$

図 4.6　電荷および電流の関数

以上の手順で，電荷量 q や電流 i の時間変化の様子を確認でき，回路の動作 (1)〜(4) が数理的に裏付けられる。

4.4.2　時　　定　　数

図 4.6 では，横軸の単位が ms（ミリ秒）になっている。つまり，この回路に電流が流れるのはものの数ミリ秒間のみ，ということである。この時間を決定づけている要素はいったい何なのだろうか。じつは，この時間は指数関数の指数部分である $-t/RC$ に大きく影響を受けている。RC の値が大きくなればなるほど，指数関数の時間に対する感度が悪くなり，結果として長い時間に渡って電流が流れることになる。逆に，RC の値が小さければ，指数関数の時間に対する感度が良くなり，短い時間でキャパシタに電荷が貯まりきり，ただちに電流が流れなくなる。RC のように，指数関数の時間に対する感度を決定づける要素を**時定数**（time constant）と呼び，τ などの文字を使って表す。τ を用いて電流の関数を書き直せば

$$i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} \tag{4.38}$$

となる。いま，$t = 0$ のときの電流の値は E/R であるが，これを I_0 と書き換えてみよう。

$$i(t) = I_0 e^{-t/\tau} \tag{4.39}$$

この式の意味を少し説明したい。すでに図 4.6 (b) でも確認した通り，この回路の電流はスイッチがオンになると同時に $i(0) = I_0$ から指数関数的に減衰していき，十分な時間が経てば $i(t) = 0$ に落ち着く。その途中過程である $t = \tau$ においては，$i(\tau) = I_0 \cdot (1/e) = I_0 \cdot 0.367879\cdots$ となり，この値は τ の値にはよらず

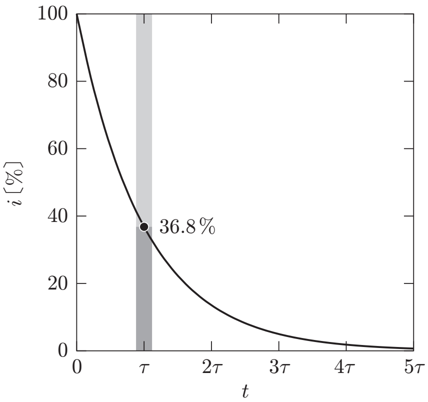


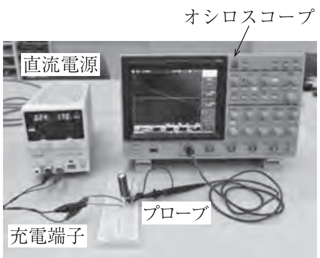
図 4.7　電流の減衰割合と時定数（$100\% = I_0$）

電流の初期値 I_0 によってのみ確定する。いい換えれば，電流 $i(t)$ が初期値 I_0 の 36.8% ほどのところにくる時刻 t が時定数となる（**図 4.7**）。

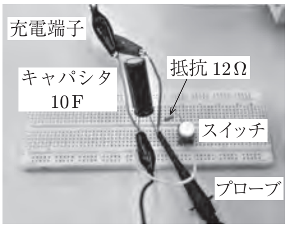
電気電子工学において，時定数は非常に重要な概念である。電子回路，電力工学，電気自動車まで，あらゆる分野で用いられ，その時間も非常に短いナノやマイクロのオーダから，数時間のオーダまで及んでいる。ぜひ，覚えておいてほしい。

4.5　実験で試す：時定数を調べる実験

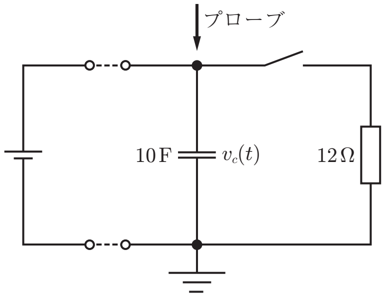
前節でキャパシタと抵抗の直列回路の時定数 τ は，キャパシタの容量 C と抵抗値 R の積になることを学んだ。これを実際の回路で確認してみる。**図 4.8** (a) は測定に用いた実験装置の写真，図 (b) は RC 直列回路の拡大写真，図 (c) がその回路図である。



(a)　実験装置



(b)　RC 直列回路



(c)　回路図

図 4.8　RC 直列回路の時定数

図 (a) で RC 直列回路のキャパシタの両端には充電端子を通して，直流電源が接続されており，キャパシタを充電する。このキャパシタの両端にはオシロスコープが接続されており，キャパシタの両端電圧 $v_C(t)$ を測定している。図 (b), (c) で，キャパシタの容量 C は 10 F で，抵抗 R は 12 Ω である。直流電源からの充電が終わると充電端子を外し，スイッチを押すと RC 直列回路が構成される。図 (c) では電源から切り離すことを点線で示している。これにより，図 4.5 の回路で，電源 E がなく，R と C が直列接続された回路となる。

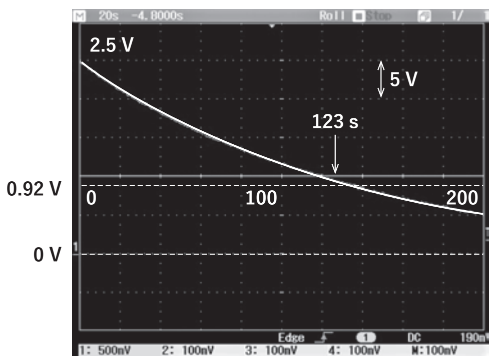


図 4.9　RC 直列回路における キャパシタ電圧の変化

キャパシタを 2.5 V に充電し，スイッチを入れて RC 直列回路を動作させた。**図 4.9** はこの時のキャパシタ C の電圧波形である。キャパシタの電圧は，前節で説明したように指数関数的に減少している。キャパシタ電圧が，$e^{-1} = 1/e = 0.368$ 倍（小数点以下 3 桁で四捨五入）となる

のは，$2.5\,\mathrm{V} \times 0.368 = 0.920\,\mathrm{V}$ である。図 4.9 で電圧が $0.920\,\mathrm{V}$ となり，時定数に相当する時間を読むと 123 秒となっている。

RC 直列回路で，$C = 10$〔F〕，$R = 12$〔Ω〕である。時定数 τ は，$\tau = RC = 12$〔Ω〕$\times 10$〔F〕$=$ 120〔s〕となる。実験結果では 123 秒となっており，ほぼ一致している。実験結果が 3 秒長くなっているのは，キャパシタ C と抵抗 R の誤差，スイッチの抵抗が加わっているためと考えられる。この実験から，R と C の直列回路では時定数が R と C の積 RC となり，時定数だけ経過するとキャパシタ電圧は $e^{-1} = 1/e = 0.368$ 倍となることがわかる。

章　末　問　題

【1】（**指数の基本**）つぎのべき乗を計算せよ。

(1)　$2^6 \times 2^{-5}$　　(2)　$2^3 \times 5^3$　　(3)　$\left(2^2\right)^3$　　(4)　2^{2^3}

【2】（**対数の基本**）つぎの値を対数や四則演算子を用いずに表せ。

(1)　$\log_2 8 + \log_2 4$　　(2)　$\log_3 162 - \log_3 2$　　(3)　$\dfrac{1}{3}\log_{0.5} 64$

(4)　$\log_5 500 - 2\log_5 2 + \log_4 32 + \log_4 8$

【3】（**指数関数**）つぎの指数関数のグラフを描画せよ。

(1)　$f(x) = 3^x$　　(2)　$f(x) = 3^{-2x}$

【4】（**対数関数**）つぎの対数関数の定義域を示し，グラフを描画せよ。

(1)　$f(x) = \log_3 x$　　(2)　$f(x) = \log_3(-2x)$

【5】（**双曲線関数**）つぎの値をそれぞれ求めよ。ただし，$e = 2.72$ として実数で答えよ。

(1)　$\sinh(1)$　　(2)　$\cosh(1)$　　(3)　$\tanh(1)$

【6】（**双曲線関数の公式**）つぎの各問いに答えよ。

(1)　$\sinh^2(x)$ を指数関数で表せ。

(2)　$\cosh^2(x)$ を指数関数で表せ。

(3)　$\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ が x の値によらず一定となることを示せ。

これにより，x の変化率の 2 倍，y の変化率の 3 倍が u の変化率に影響することがわかる。

6.7 実験で試す：インダクタ電流波形の微分

6.7.1 インダクタ電流波形の微分と電圧波形

微分で記述される電気回路の動作を実験で確かめる。自己インダクタンスが L のインダクタでは，インダクタに流れる電流 i の変化が磁束の変化となり，誘起電圧 $v(t)$ の関係は以下となる。

$$v(t) = L\frac{di}{dt} \tag{6.40}$$

以下電圧と電流の関係について，式 (6.40) で微分計算した結果と，実験結果を比較する。電流波形が，$t = 0$ で $i = 0$ となる最も単純な正弦波は 3 章の定義 3.5 から次式で表される。

$$i(t) = A\sin(2\pi ft) \tag{6.41}$$

ここで，A は電流の振幅，f は周波数である。式 (6.41) を式 (6.40) に代入し，次式が得られる。

$$v(t) = L\frac{di}{dt} = \frac{d}{dt}A\sin(2\pi ft) = L\cdot A\cdot 2\pi fA\cos(2\pi ft) \tag{6.42}$$

後述の実験条件では，自己インダクタンス L を 1.3 mH（$= 1.3\times 10^{-3}$ H）とし，±50 mA，周波数 5 kHz の正弦波電流を流す。この条件を式 (6.41) に代入すると，電流は次式となる。

$$\begin{aligned} i(t) &= A\sin(2\pi f) = 50\times 10^{-3}\sin(2\times\pi\times 5\,000t) \\ &= 50\times 10^{-3}\sin(10\,000\pi t) \end{aligned} \tag{6.43}$$

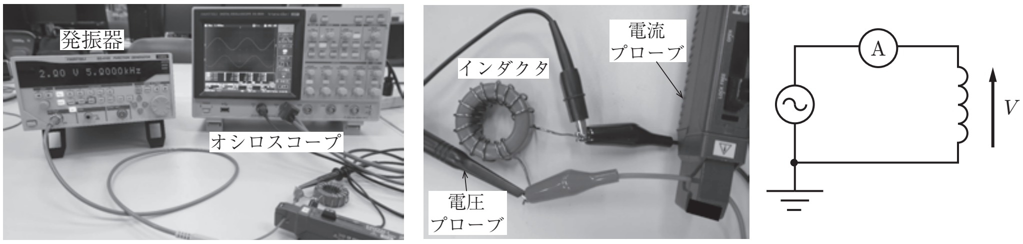
式 (6.40)，式 (6.42) から，インダクタに発生する電圧 $v(t)$ は式 (6.44) となる。

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{di}{dt} = 1.3\times 10^{-3}\frac{d}{dt}\left[50\times 10^{-3}\sin(10\,000\pi t)\right] \\ &= 1.3\times 10^{-3}\times 50\times 10^{-3}\times 10\,000\pi\cos(10\,000\pi t) \\ &= 204.2\times 10^{-2}\cos(10\,000\pi t) = 2.04\cos(2\pi\times 5\,000t) \\ &= 2.04\sin\left(2\pi\times 5\,000t + \frac{\pi}{2}\right) \qquad \text{（公式 3.6）} \end{aligned} \tag{6.44}$$

以上の計算結果から，電流は振幅が 50 mA で周波数が 5 000 Hz の sin 波形，電圧は振幅が 2.04 V で周波数 5 000 Hz で時間変化する cos 波形となる。

6.7.2 実験でインダクタの電流波形と電圧波形を求める

インダクタに電流を流したときの電圧が，式 (6.44) となることを実験により確かめる。具体的には，インダクタに正弦波の電流を流し，電圧と電流波形の関係を測定する。図 **6.6** (a) に示



(a)　実験装置　　(b)　インダクタとプローブ　　(c)　測定回路図

図 6.6　インダクタの微分

ように，正弦波電流を流すための発振器，自己インダクタンス 1.3 mH のインダクタ，オシロスコープを用意し，インダクタに発生する電圧波形を測定した。電流は振幅が 50 mV，周波数が 5 000 Hz の正弦波とした。図 (b) に示すようにインダクタに流れる電流を電流プローブ，インダクタの端子電圧を電圧プローブで測定した。図 (b) に対応する回路図が図 (c) である。

図 6.7 はオシロスコープで測定した結果で，上段が電流波形，下段が電圧波形である。電流はプラスとマイナスのピーク間の大きさ（Pk-Pk）が 100 mA で振幅は 50.0 mA，周波数 4.952 kHz である。電圧は Pk-Pk が 4.08 V で振幅は 2.04 V で，時間 0 での値は最大値の 2.04 V をとっており，時間変化を示す三角関数は cos である。したがって，6.7.1 項の計算で得られた「電流は振幅が 50 mA で周波数が 5 000 Hz の sin 波形，電圧は振幅が 2.04 V で周波数 5 000 Hz で時間変化する cos 波形となる」と一致している。

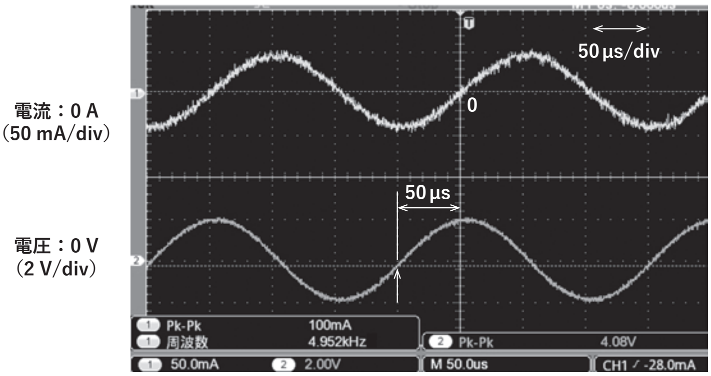


図 6.7　測定で得られた電流・電圧波形

また，オシロスコープでは横軸が時間で，左から右へと時間が流れている。図中の点線で示された電圧波形がマイナスからプラスに変わる時間は，電流波形がマイナスからプラスに変わる時間 0 に対して，約 50 µs 左側にある。周波数 5 000 Hz に対応する周期は 200 µs であるため，50 µs は波長全体の 1/4，すなわち 90° の位相に相当し，電圧の位相が電流に比べて 90° 進んでいることを示している。5 章の図 5.7 のフェーザ図で述べた「インダクタの電圧は電流より 90° 進む」ことと一致している。

索　　引

―― 著 者 略 歴 ――

高木　茂行（たかぎ　しげゆき）

1982年　名古屋大学工学部電気電子工学科卒業
1984年　名古屋大学大学院工学研究科修士課程修了（電気電子工学専攻）
1984年　株式会社東芝生産技術研究所勤務
1991年　名古屋大学大学院工学研究科博士課程修了（電気電子工学専攻）
　　　　工学博士
1997年　株式会社東芝生産技術センター勤務
2000年　技術士（電気電子部門）
2007年　株式会社 SED 勤務
2010年　株式会社東芝生産技術センター勤務
2011年　青山学院大学大学院博士課程修了（機能物質創成コース）
　　　　博士（理学）
2015年　東京工科大学教授
　　　　現在に至る

美井野　優（みいの　ゆう）

2014年　徳島大学工学部知能情報工学科卒業
2016年　徳島大学大学院先端技術科学教育部博士前期課程修了
2018年　徳島大学教養教育院非常勤講師
2019年　徳島大学大学院先端技術科学教育部博士後期課程修了
　　　　博士（工学）
2019年　東京工科大学助教
2022年　鳴門教育大学講師
　　　　現在に至る

これなら解ける　電気数学 ―実験でアプローチ―
Strategy for Mathematics in Circuit Experiments

2022 年 8 月26日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　　者	髙　　木　　茂　　行
	美　井　野　　　　優
発 行 者	株式会社　コ　ロ　ナ　社
	代 表 者　牛　来　真　也
印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社
製 本 所	有限会社　愛 千 製 本 所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発 行 所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ　https://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–00984–2　C3054　Printed in Japan　（松岡）