

論理回路講義ノート

博士(工学) 工藤栄亮 著

コロナ社

まえがき

情報通信技術と訳される ICT という用語が普及し、携帯電話やタブレット端末などは身近なものとなった。情報通信技術者の活躍の場は広がり、論理回路はそのような技術者を目指す学生にとって基礎的な教養科目となっている。著者はこれまで、10年近くにわたり地方の私立大学の工学部において、論理回路を教えている。

大学入試の方法が多様化するとともに、18歳人口の減少もあり、大学入学者の学力も多様化してきている。なかにはノートをとる習慣が身につけていない学生もいる。論理回路に関する書籍は多数あり、カラー刷りの書や、平易な表現の書もあるものの、自ら進んで学習する習慣が身につけていない学生にとって、そのような書籍を1人で読みこなすのは容易ではない。

本書は工学部系の大学学部学生を対象として、前述のように多様な学生に対しても学習効果が得られるような教科書を目指している。本書の特徴は以下の3点である。

- ① 本文の記述中に空欄を設け、講義を聞きながら、その空欄を自ら埋めていく作業を読者に課している。手を動かすことにより知識の定着をはかるだけではなく、読者が本書に積極的に書き込みを入れることにより、読者にとってオリジナルなノートとなることを目指している。
- ② 論理回路を実際に実現するための回路素子などのアナログ電子回路に関する記述は思い切って省き、アナログ信号からデジタル信号への変換に関する最小限の記述にとどめた。こうしてアナログ電子回路をまだ学んでいない学生にもストレスなく読み進められるようにし、初学者にもわかりやすいように例題や演習問題の解答も丁寧な記述を心がけている。
- ③ (ICT技術者を目指す大学生をおもな対象としているので、)情報通信システムに実際に利用されている重要なグレイ符号、誤り制御用符号などの符号に関する記述を充実させている。

ICTシステムの利活用が進み、e-ラーニングや、e-ラーニングを事前学習に利用する反転授業が注目されてきている。事前学習として空欄を埋める作業を課して、反転授業の際に問題演習を行うことにより、本書はこのような学習システムに対しても、学習効果を上げることができるような教科書となることを目指している。

著者はもともと理学部の出身であり、実は論理回路の講義を受けたこともない。大学を卒

業し、社会人になってからはおもに移動無線通信の研究開発に携わってきた。著者は現在も移動無線通信とその応用技術に関連する研究をテーマにしている。授業では、教えている学生が将来著者の研究室に配属されたときに、このようなことは知っていてほしいと思っていることを積極的に取り入れて教えるように心がけている。論理回路を専門としてご活躍されている先生方からみれば門外漢の著者が書いた書籍であるので、厳密性に欠ける記述もあるかもしれないが、ご批判、ご指摘いただければ大変ありがたい。

なお、本書空欄ならびに【例題 3.5】、【例題 3.6】の解答は、コロナ社の本書書籍詳細ページ (<http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339009132/>) に掲載している。詳細は、p. 25 を参照いただきたい。

本書が将来の情報通信技術者の学習の一助になれば幸いである。

2018年7月

工藤栄亮

目 次

1. デジタル信号と2進数

1.1 アナログ信号とデジタル信号	1
1.2 2 進 数	4
1.2.1 数系の相互変換	4
1.2.2 2進数の演算	7
1.2.3 補 数	10
演 習 問 題	12

2. 符 号

2.1 BCD 符 号	13
2.2 グレイ符号	14
2.3 誤り制御用符号	18
2.3.1 パリティ検査符号	19
2.3.2 水平垂直パリティ検査符号	19
2.3.3 ハミング符号	20
演 習 問 題	25

3. 論 理 関 数

3.1 ブール代数の基本論理	26
3.2 ブール代数の演算公式	30
3.3 双 対 の 原 理	38
3.4 標 準 形	39
3.4.1 主加法標準形	39
3.4.2 主乘法標準形	40

3.4.3 標準形を求める方法	41
演習問題	44

4. 論理回路の設計

4.1 論理回路記号	45
4.2 論理式の合成	47
4.3 論理式の簡単化	54
4.3.1 カルノー図を用いる方法	54
4.3.2 クワイン・マクラスキの方法	60
4.3.3 乗法形の論理式の簡単化	64
演習問題	66

5. 組合せ論理回路

5.1 加算回路	67
5.2 減算回路	74
5.3 エンコーダとデコーダ	79
5.3.1 10進-BCDエンコーダとBCD-10進デコーダ	79
5.3.2 (7,4)ハミング符号のエンコーダとデコーダ	84
5.4 マルチプレクサとデマルチプレクサ	87
演習問題	88

6. フリップフロップ

6.1 RSフリップフロップ	89
6.2 JKフリップフロップ	92
6.3 Tフリップフロップ	96
6.4 Dフリップフロップ	97
演習問題	98

7. 順序論理回路

7.1 順序論理回路動作の表現法	100
7.2 順序論理回路の設計	103
7.3 さまざまな順序論理回路	111
7.3.1 リプルカウンタ	111
7.3.2 並列型カウンタ	112
7.3.3 レジスタ	113
演習問題	113
参考文献	115
演習問題解答	116
索引	130

1

デジタル信号と2進数

論理回路とは論理演算を実現する電子回路であり、0と1の2値で表されるデジタル信号を扱う回路である。一方、実世界に存在する情報の多くは、光、音などアナログ信号である。また、普段の生活で扱う数は10進数であり、0と1だけで表すことができる2進数とは異なっている。本章では、アナログ信号とデジタル信号の違いと変換方法について述べ、2進数についても述べる。

1.1 アナログ信号とデジタル信号

アナログ信号とは、連続的な信号として扱われる信号であり、**デジタル信号**とは、時間的にも値も離散的な信号として扱われる信号である。音、光など自然界に存在する情報の多くはアナログ信号である。携帯電話、テレビ放送などの通信システムでは、サービス開始当初はアナログ信号をアナログ変調して伝送していたが、現在ではアナログ信号をデジタル信号に変換してからデジタル変調を用いて伝送している。これは、デジタル信号はアナログ信号に対して、以下のような利点を有するからである。

- ① 雑音による影響を受けにくい。
- ② 記憶することが容易である。
- ③ 信号処理の方法の分割が容易で、単純な処理を組み合わせることにより複雑な信号処理も行うことができる。

音、光などのアナログ信号からデジタル信号に変換するためには、まず**標本化**し、連続的に変化するアナログ信号から標本値を取り出し、時間的に離散的な信号に変換する。図1.1に標本化の概念を示す。図1.1(a)の信号 $g(t)$ を時間間隔 T で標本化した信号が図1.1(b)である。

標本化を行う時間間隔 T を決定するには、**標本化定理**が用いられる。

2 1. デジタル信号と2進数

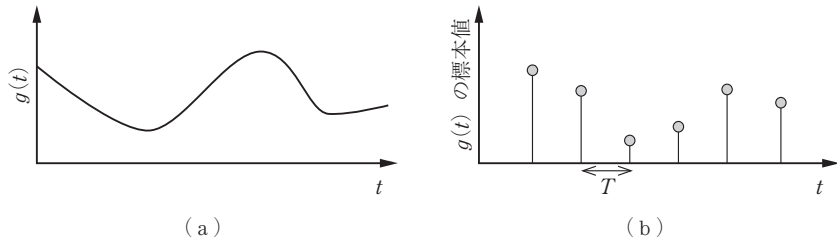


図 1.1 標本化

標本化定理

時間関数 $g(t)$ に含まれる周波数が f_m 以下の場合，時間間隔 $T < 1/(2f_m)$ ごとに $g(t)$ の値がわかれば， $g(t)$ は完全に決定できる。

標本化定理より，高い周波数成分を含んでいる信号ほど，標本化を行う時間間隔を短くしなければならないことがわかる。言い換えると，時間的な変動の仕方がゆるやかな信号ほど，標本化の時間間隔を^① できるとことを示している。

標本化したのちに**量子化**を行い，連続的な値を離散的な値に変換する。

量子化

用途に応じて必要な分解能を満足するような最小単位（量子化ステップサイズ）を定め，その整数倍によって信号の大きさを離散的に表現すること。

図 1.2 に量子化の概念を示す。図 1.2 (a) の信号を 4 値に量子化した信号が図 1.2 (b) である。

1 標本値を n ビットの符号に変換するとき， 2^n 個の値で表現できる。図 1.3 に $n=2$ の場合の量子化値と量子化ステップサイズの関係を示す。量子化される入力信号波形の最大値を A ，最小値を 0 とすれば，量子化ステップサイズ s は式 (1.1) で与えられる。

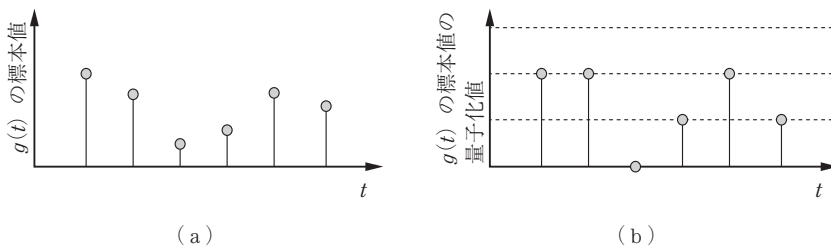


図 1.2 量子化

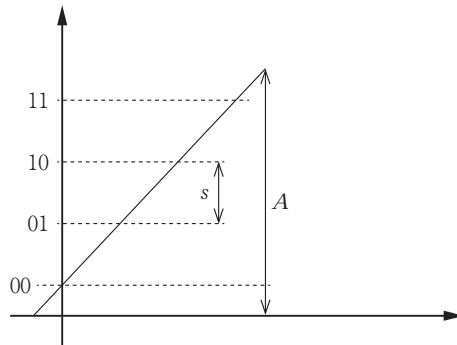


図 1.3 量子化値と量子化ステップサイズの関係

$$s = \boxed{\text{②}} \tag{1.1}$$

ところで、量子化を行うと、量子化される前の値と量子化された後の値の間にずれが生じる。このずれは雑音のようにふるまう。このずれの平均電力を**量子化平均雑音電力**と呼ぶ。量子化平均雑音電力は、量子化出力と入力信号との差の分散で表される。いま、簡単のため標準化器への入力信号 v の取り得る値が 0 から A の範囲で一様に分布すると仮定する。量子化出力と入力信号との差の分散 σ^2 は式 (1.2) で表される。

$$\sigma^2 = \frac{1}{s} \int_{-\frac{s}{2}}^{\frac{s}{2}} v^2 dv = \frac{s^2}{12} = \frac{A^2}{12} 2^{-2n} \tag{1.2}$$

σ^2 は、量子化平均雑音電力である。式 (1.2) より 1 標本値を表現するビット数（量子化ビット数） n を 1 増やすと、量子化平均雑音電力は $\boxed{\text{③}}$ になることがわかる。

【例題 1.1】

最大周波数 10 kHz の信号を再現できるように標本化するには、標本化を行う時間間隔を何秒以下にすればよいか。

解

求める標本化時間間隔を T とすると、標本化定理より次式が得られる。

$$T \leq \frac{1}{2f_m} = \frac{1}{2 \times 10 \times 10^3} = 5 \times 10^{-5} \text{[s]} = 50 \text{[}\mu\text{s]}$$

よって、50 μs 以下にすればよい。



2

符 号

実際にデジタル信号を伝送する際には、1ビットずつのバラバラの信号ではなく、グループ化して符号として扱うほうが扱いやすい。本章では、BCD符号、グレイ符号、さらに、誤り制御用符号の例として、パリティ検査符号およびハミング符号について学ぶ。

2.1 BCD 符号

実生活では10進数が広く使われている。**BCD符号 (binary coded decimal code)** は2進10進符号ともいい、10進数を2進数的に表現する符号である。4ビットの2進数により $2^4=16$ 個の数を表せるが、このうち、0~9に相当する10個の数のみを用い、残り①個の数を禁止することによって、10進数の1桁と4ビットの符号を1対1に対応させている。

【例題 2.1】

10進数541をBCD符号で表せ。

解

$$\begin{array}{ccc} \begin{array}{c} 5 \\ \hline 0101 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \\ \hline 0100 \end{array} & \begin{array}{c} 1 \\ \hline 0001 \end{array} \end{array}$$

よって、 $541_{(10)} = 010101000001_{(BCD)}$ となる。

【例題 2.2】

BCD符号10000111を10進数で表せ。

解

$$\begin{array}{r} \underbrace{1000}_{8} \quad \underbrace{0111}_{7} \\ \hline \end{array}$$

よって、 $10000111_{(BCD)} = 87_{(10)}$ となる。 ◆

BCD 符号では禁止している数があるので、このまま四則演算を行うと誤りが発生してしまうことに注意を要する。一例として $15_{(10)} + 16_{(10)} = 31_{(10)}$ を考える。 $15_{(10)} = 00010101_{(BCD)}$ 、 $16_{(10)} = 00010110_{(BCD)}$ であるので、このまま単純に加算すると次式のようになり、 $31_{(10)} =$

②

(BCD)

とは異なる結果になり誤ってしまう。

$$\begin{array}{r} 00010101 \\ + 00010110 \\ \hline 00101011 \end{array} \tag{2.1}$$

2.2 グレイ符号

携帯電話など種々の通信システムで用いられているデジタル変調方式の一つに、QPSK (quadrature phase shift keying) がある。PSK (phase shift keying) とは位相に情報を載せて伝送する変調方式であり、QPSK では 2 ビットの信号を四つの位相に対応させて伝送する。これらの四つの位相は、複素平面を用いて四つの信号点として表示することができる。図 2.1 に QPSK の信号点配置図を示す。図 2.1 (a) のように 2 進数を用いて信号点を配置すれば、00 の信号点で送信し、雑音などの影響により誤って隣接する信号点 11 に復号された

場合に、

①

 ビット誤ってしまう。ところが、**グレイ符号**を用いて図 2.1 (b) の

ように信号点を配置すれば、00 の信号点で送信し、雑音の影響により隣接している信号点 01 に誤っても 1 ビットしか誤らない。このように、グレイ符号は、隣接する符号間では

②

 ビットのみが $0 \rightarrow 1$ あるいは $1 \rightarrow 0$ と変化する符号であり、実際の通信システムでも利用されている重要な符号である。図 2.2 にグレイ符号を適用した多値 PSK の信号点配置図を示す。

図 2.3 にグレイ符号の作成法を示す。1 ビットのグレイ符号は 2 進数と同じである。2 ビットのグレイ符号をつくるには、MSB に 0 と 1 を 2 ビットずつ 0, 0, 1, 1 と並べ、1 ビットのグレイ符号を線対称となるように並べる。以下同様に n ビットのグレイ符号をつくるには、MSB に 0 と 1 を 2^{n-1} ビットずつ並べ、 $n-1$ ビットのグレイ符号を線対称となるように並べればよい。表 2.1 に 4 ビットの 2 進数とグレイ符号を示す。表 2.1 中の空欄を埋めて

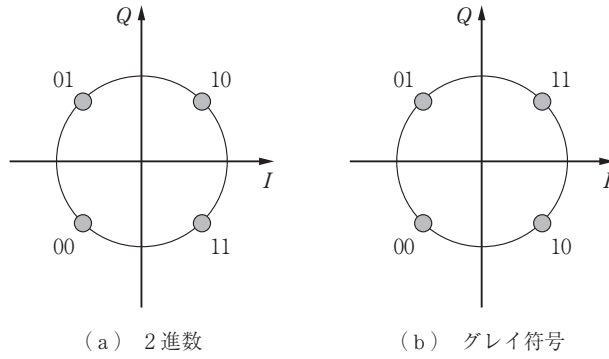


図 2.1 QPSK の信号点配置図

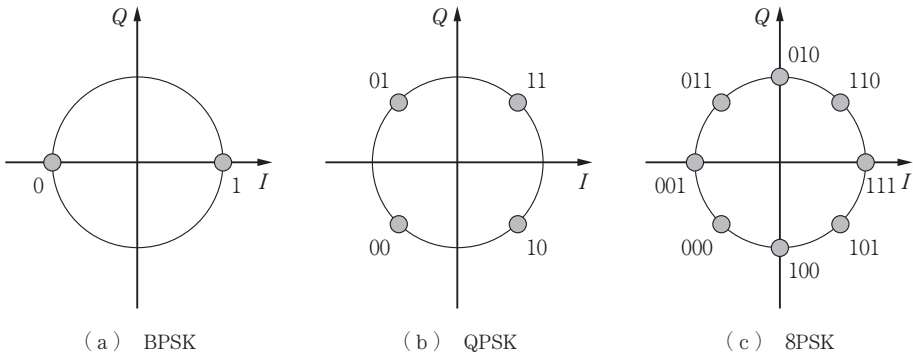


図 2.2 多値 PSK の信号点配置図

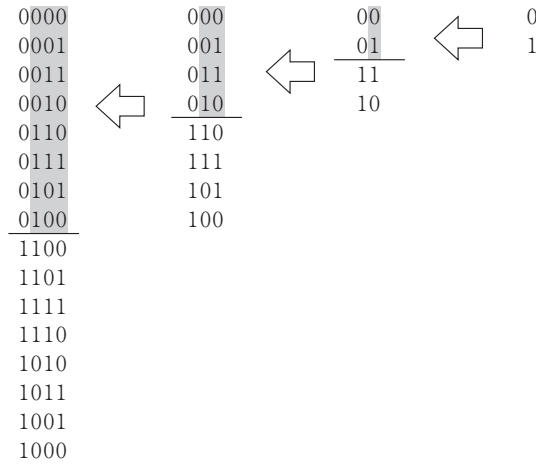


図 2.3 グレイ符号の作成法

索 引

<p>【あ】</p> <p>アナログ信号 1</p> <p>誤り 26</p> <p>誤りシンドローム 19</p> <p>誤り制御 18</p> <p>誤り制御用符号 13</p> <p>誤り訂正 18</p> <p>誤りパターン 22</p> <p>【え】</p> <p>エンコーダ 67, 79</p> <p>【お】</p> <p>応用方程式 101</p> <p>オーバーフロー 12</p> <p>【か】</p> <p>カウンタ 100</p> <p>加算回路 67</p> <p>片方向通信 18</p> <p>加法形 56</p> <p>加法標準形 40</p> <p>借り 8, 75</p> <p>カルノー図 54, 56</p> <p>【き】</p> <p>偽 26</p> <p>奇数パリティ検査符号 19</p> <p>キャリー 8, 67</p> <p>吸収則 31, 33</p> <p>【く】</p> <p>偶数パリティ検査符号 19</p> <p>組合せ論理回路 67, 68</p> <p>グレイ符号 13, 14, 54</p> <p>クロックパルス 94</p> <p>クワイン・マクラスキの方法 54, 60</p> <p>【け】</p> <p>桁上り 8, 67</p> <p>結合則 31</p>	<p>検査行列 22</p> <p>検査ビット 19</p> <p>減算回路 67</p> <p>【こ】</p> <p>交換則 31</p> <p>事柄 26</p> <p>【さ】</p> <p>最小項 40, 48, 61</p> <p>再送制御 18</p> <p>最大項 41, 50, 61</p> <p>雑音 1, 3, 14, 18</p> <p>【し】</p> <p>時点 90</p> <p>シフトレジスタ 100, 113</p> <p>周波数 2</p> <p>主加法標準形 39, 48, 50, 51</p> <p>主加法標準展開 40, 61</p> <p>主項 61</p> <p>主乘法標準形 39, 41, 50, 51</p> <p>主乘法標準展開 41</p> <p>出力端子 46</p> <p>出力変数 47</p> <p>順序論理回路 100</p> <p>乗算回路 67, 74</p> <p>状態 100</p> <p>状態遷移図 100</p> <p>状態遷移表 100</p> <p>冗長項 59, 81</p> <p>乗法形 64</p> <p>情報ビット 19</p> <p>乗法標準形 41</p> <p>除算回路 67, 74</p> <p>真 26</p> <p>信号点配置図 14</p> <p>真理値表 27</p> <p>【す】</p> <p>水平垂直パリティ検査符号 18, 19</p>	<p>【せ】</p> <p>生成行列 21</p> <p>積集合 29</p> <p>積和形 41, 56</p> <p>積和標準形 40</p> <p>セット 89</p> <p>全加算回路 68</p> <p>全減算回路 74, 76</p> <p>【そ】</p> <p>双対の原理 38</p> <p>双方向通信 18</p> <p>相補則 33</p> <p>【た】</p> <p>第一次圧縮 61</p> <p>第三次圧縮 61</p> <p>第二次圧縮 61</p> <p>正しい 26</p> <p>多値 PSK 14</p> <p>立上りエッジトリガ 94</p> <p>立下りエッジトリガ 94</p> <p>単一誤り訂正符号 19</p> <p>単一パリティ検査符号 19</p> <p>【ち】</p> <p>チャンネル選択信号 87</p> <p>【て】</p> <p>デジタル信号 1</p> <p>デコーダ 67, 79</p> <p>デマルチプレクサ 67, 87</p> <p>転置行列 23</p> <p>【と】</p> <p>ド・モルガンの定理 29, 35</p> <p>同期型フリップフロップ 94</p> <p>特性表 90</p> <p>特性方程式 90</p> <p>ドントケア項 59</p>
---	--	---

【に】
 二重否定 32
 入力端子 46
 入力変数 47

【は】
 排他的論理和 16, 28
 バッファ 45
 ハミング符号 13, 18, 20, 79, 84
 ハミング符号エンコーダ 85
 ハミング符号デコーダ 86
 パリティ検査 19
 パリティ検査符号 13, 18
 半加算回路 67
 半減算回路 75

【ひ】
 否定 28
 標本化 1
 標本化定理 1, 2
 標本値 1

【A】
 AND 論理 26
 ARQ 18
 automatic repeat request 18

【B】
 BCD-10 進デコーダ 81
 BCD 符号 13, 79
 binary coded decimal code 13

【D】
 D フリップフロップ 97, 109, 110

【E】
 E-OR 28

【F】
 FEC 18
 forward error correction 18

【J】
 JK フリップフロップ 92, 107, 110

【ふ】
 符号化率 20
 フリップフロップ 89
 ブール代数 26
 分解能 2
 分配則 31

【へ】
 並列型カウンタ 112
 べき等則 33
 ベン図 29

【ほ】
 補集合 29
 補数 10
 ポロー 8, 75

【ま】
 マルチプレクサ 67, 87

【め】
 命題 26

【L】
 least significant bit 5
 least significant digit 5
 LSB 5
 LSD 5

【M】
 most significant bit 5
 most significant digit 5
 MSB 5
 MSD 5

【N】
 NAND 28
 NOR 28
 NOT 論理 28

【O】
 OR 論理 27

【P】
 phase shift keying 14

【り】
 リセット 89
 リプルカウンタ 111
 量子化 2
 量子化ステップサイズ 2
 量子化平均雑音電力 3

【れ】
 レジスタ 113

【ろ】
 論理回路記号 45
 論理学 26
 論理関数 26
 論理積 26
 論理和 27

【わ】
 和集合 29
 和積形 42, 64
 和積標準形 41

PSK 14
【Q】
 QPSK 14
 quadrature phase shift keying 14

【R】
 RS フリップフロップ 89, 105

【T】
 T フリップフロップ 96, 103, 104, 106, 111

【数字】
 1 の補数 10
 2 進化 10 進符号 13
 2 進カウンタ 101
 2 進数 4
 2 値 26
 2 の補数 10
 10 進数 4
 10 進-BCD エンコーダ 79
 16 進数 4

— 著者略歴 —

1986年 東北大学理学部物理学科卒業
1988年 東北大学大学院理学研究科博士前期課程修了（物理学専攻）
1988年 日本電信電話株式会社勤務
2001年 博士（工学）（東北大学）
2001年 東北大学大学院助教
2007年 東北大学大学院准教授
2009年 東北工業大学教授
現在に至る

論理回路講義ノート
Notebook of Logical Circuit

© Eisuke Kudoh 2018

2018年9月20日 初版第1刷発行



検印省略

著者 工藤 栄亮
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来 真也
印刷所 萩原印刷株式会社
製本所 有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話 (03)3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-00913-2 C3055 Printed in Japan

(齋藤)



<出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構（電話 03-3513-6969, FAX 03-3513-6979, e-mail: info@jcopy.or.jp）の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。