

まえがき

数学は工学系、特に電気電子系の学生にとって必要不可欠で、丁度大工さんにとっての大工道具のようなものである。すなわち、電気電子工学の知識や理論を修得するには数学を道具として使いこなせる力が必要である。このため、ほとんどの電気電子系学科では電気数学あるいはそれに相当する科目が専門基礎科目に用意されている。しかし、数学には、代数、幾何、ベクトル解析や微積分など多くの部門があり、どの部門も電気電子工学を学ぶのに関係しないものはないため、これまで出版されてきた電気（用）数学はかなり広範囲の内容を扱っているものが少なくない。また、電気数学ということで、電気電子工学との関連を重要視するあまり電気回路や電磁気学などの教科書に近くなり、数学的要素が少ないものも見受けられる。

本書は「道具としての数学」をコンセプトに、まず電気電子工学を学ぶのに必要な数学の基礎的事項（道具）を学習した後、それらが電気電子工学の理論や現象を理解するのにどのように使われるのかを具体例を挙げながら解説する。このため、本書で取り扱う数学は、一般の数学の教科書のように系統的な構成とはなっておらず、電気電子工学の専門科目を学ぶのに必要な項目をピックアップした構成となっている。

本書は全 11 章から構成されている。すなわち、多くの部門からなる数学から 11 項目を選択している。電気電子工学の学習に必要な数学についてはいろいろご意見があると思うが、この 11 項目は、著者が電子工学の講義や実験を経験してきて、現時点で最低限必要と考えるもので、しかもその内容は定理の証明などは省いてエッセンスのみの記述に留意している。また、応用例についても電気回路や電磁気学の基礎的かつ重要な事項を取り上げている。

以上のように、本書は電気電子工学の回路、電磁気学、信号処理の基礎的事

項を学ぶのに必要な数学の知識を身に付けることを目的とした「電気系学生のための基礎数学」である。別の表現をすれば、本書は電気数学の授業で用いられる道具であり、厳選された11の数学の道具が入っている基礎数学という道具箱である。本書により、学生が数学を道具として使いこなせるようになれば幸いである。

2015年1月

葛谷 幹夫

—— 本書で登場する公式・重要式 ——

本書で登場する各種の公式・重要式は、次式のように枠を付けて示した。

例 $x = \log_a N$ (1.2)

また、これらの公式・重要式をまとめ、コロナ社 Web サイトの本書書籍ページ (<http://www.coronasha.co.jp/np/isbn/9784339008722/>) から閲覧・ダウンロードできるようにした (コロナ社 Web サイトのトップページの書名検索からもアクセス可能)。こちらを印刷してつねに携帯し、専門科目の授業に活用していただきたい。

目 次

1. 対 数	
1.1 対 数 と は	1
1.2 対数の基本性質	2
1.3 底 の 変 換	3
1.4 仮 数 と 指 標	4
1.5 対数の応用例	6
1.5.1 デ シ ベ ル	6
1.5.2 絶 対 デ シ ベ ル	9
1.5.3 物 理 現 象	9
演 習 問 題	11
2. 三 角 関 数	
2.1 三角関数とは	13
2.2 三角関数の定義	14
2.3 弧度法 (ラジアン)	17
2.4 三角関数のグラフ	19
2.5 三角関数に関する性質	20
2.5.1 負(-)の角の三角関数	20
2.5.2 第1象限の角による表現	21
2.5.3 三角関数に関する公式	22
2.5.4 三角関数の合成	23
2.5.5 正弦定理と余弦定理	25

2.6 逆三角関数	25
2.7 三角関数の応用例	26
2.7.1 交流の瞬時値	26
2.7.2 三 相 交 流	28
演 習 問 題	29
3. 複 素 数	
3.1 複素数とは	31
3.2 複素数の表現	32
3.2.1 直交座標表示	32
3.2.2 三角関数表示	32
3.2.3 極座標表示	33
3.2.4 指数関数表示	33
3.2.5 表現のまとめ	34
3.3 共役複素数	35
3.4 複素数の応用例	36
3.4.1 正弦波交流	36
3.4.2 インピーダンス	37
3.4.3 複 素 電 力	39
演 習 問 題	40
4. ベ ク ト ル	
4.1 ベクトルとは	42
4.2 ベクトルの表現	42
4.2.1 ベクトルの成分	43

4.2.2	ベクトルの相等	44
4.2.3	位置ベクトル	44
4.2.4	面積ベクトル	45
4.3	ベクトルの和と差	45
4.4	スカラーとベクトルの積	46
4.5	ベクトルとベクトルの積	47
4.5.1	スカラー積 (内積)	47
4.5.2	ベクトル積 (外積)	49
4.6	ベクトルの応用例	52
4.6.1	磁界と電流の間に働く力	52
4.6.2	磁界中を運動する荷電粒子に働く力	52
4.6.3	三電圧計法	54
	演習問題	55
5. 行列と行列式		
5.1	行列とは	58
5.2	行列の種類	58
5.3	行列の演算	62
5.3.1	行列の和と差	62
5.3.2	行列の積	63
5.4	行列式	64
5.4.1	行列式とは	64
5.4.2	行列式の性質	65
5.5	余因子	68
5.5.1	余因子とは	68
5.5.2	余因子展開	69
5.6	余因子行列	70
5.7	逆行列	71
5.8	行列の応用例	74

5.8.1	連立方程式 (クラメルの公式)	74
5.8.2	ブリッジ回路	78
5.8.3	二端子対回路	80
5.8.4	回転行列	82
	演習問題	83

6. 微分と積分

6.1	微分とは	85
6.2	導関数と微分法の定理	86
6.2.1	関数の導関数	86
6.2.2	微分法の定理	88
6.3	偏微分と全微分	90
6.4	微分の応用例	92
6.4.1	電気磁気量の表現	92
6.4.2	微分演算子	93
6.5	積分とは	97
6.6	不定積分と積分法の定理	98
6.6.1	不定積分の公式	99
6.6.2	不定積分の定理	100
6.7	積分の応用例	101
6.7.1	交流の平均値と実効値	101
6.7.2	交流の電力	102
	演習問題	104

7. 関数の展開と近似計算

7.1	関数展開の基本公式	106
7.2	関数の展開式	107
7.2.1	指数関数	107
7.2.2	対数関数	107
7.2.3	三角関数	108

7.2.4	オイラーの公式	110
7.2.5	二項定理	111
7.3	近似式と近似計算	112
7.3.1	近似式	112
7.3.2	近似計算	113
	演習問題	114

8. 微分方程式

8.1	微分方程式とは	115
8.2	微分方程式の解法	116
8.2.1	1階線形微分方程式	116
8.2.2	1階線形微分方程式の 応用例	118
8.2.3	2階線形微分方程式	121
8.2.4	2階線形微分方程式の 応用例	123
	演習問題	127

9. フーリエ級数

9.1	フーリエ級数とは	129
9.2	フーリエ級数の係数	130
9.3	複素フーリエ級数	133
9.4	フーリエ級数の応用例	136
9.4.1	ひずみ波のフーリエ級数	136
9.4.2	ひずみ波交流	140
9.5	フーリエ変換	143
	演習問題	146

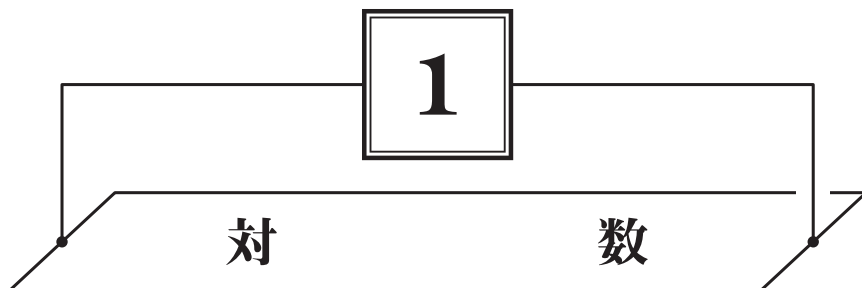
10. ラプラス変換

10.1	ラプラス変換とは	148
------	----------	-----

10.2	ラプラス変換による 回路解析	149
10.3	ラプラス変換と対関数	152
10.3.1	基本関数のラプラス変換	152
10.3.2	ラプラス対関数	155
10.4	ラプラス変換に関する定理	156
10.5	ラプラス逆変換	160
10.5.1	部分分数展開	160
10.5.2	留数演算	161
10.6	ラプラス変換の応用例	162
10.6.1	回路の伝達関数	162
10.6.2	回路の過渡現象	164
10.7	z 変換	166
	演習問題	169

11. 双曲線関数

11.1	双曲線関数とは	171
11.2	双曲線関数のグラフ	172
11.3	双曲線関数の公式	173
11.4	双曲線関数の応用例	177
11.4.1	分布定数回路	177
11.4.2	架空電線	181
	演習問題	183
	演習問題解答	184
	索引	198



対数とはある数を指数関数で表したときの指数のことで、例えば100は 10^2 であるから対数で表すと2となる。この例のように指数関数のベースに10を用いる対数を常用対数といい、10の代わりに $e (= 2.718\ 281\cdots)$ を用いる対数を自然対数という。日常的には10進法を用いるため常用対数が広く使用されるが、数学における微積分や自然界におけるさまざまな現象を扱う場合には自然対数が用いられる。本章では、対数の基本性質および常用対数と自然対数の基礎的事項について説明した後、対数の応用例としてデシベルやサーミスタの温度特性などについて説明する。

1.1 対数とは

対数 (logarithm) は数の表現法の一つで、大きな数や小さな数、あるいは広範囲の数を扱う場合に便利である。

いま、数 N を次式のように指数形式で表現する。

$$N = a^x \quad (a > 0, \neq 1) \quad (1.1)$$

ここで、 a の値が決まると数 N に対してただ一つの x が定まる。この x の値を

$$x = \log_a N \quad (1.2)$$

と書き、 a を**底**とする N の対数という。また、このときの N を**真数**といい、つねに $N > 0$ である。底 a は1以外の正の数であれば自由に選べるが、一般によく用いられるのは、10と $e (= 2.718\ 281\cdots)$ である。

10 を底とする対数は**常用対数**, e を底とする対数は**自然対数**と呼ばれる。

$$\text{常用対数: } \log_{10} N \quad (= \log N) \quad (1.3)$$

$$\text{自然対数: } \log_e N \quad (= \ln N) \quad (1.4)$$

通常扱う数は 10 進数のため, 一般に底を 10 とする常用対数が用いられるが, 電気電子工学をはじめとする工学の分野で扱う微分や積分, あるいは微分方程式などで現れる対数は, e を底とする自然対数が用いられる。

また, 括弧中に示したように, 常用対数は底 10 を書かずに単に $\log N$, これと区別するために自然対数を $\ln N$ とする表記法も用いられる。本書でも底を書かない場合は, この表記法に従う。

1.2 対数の基本性質

まず, $a^0 = 1, a^1 = a$ より, 1 の対数は 0, 真数が底と同じ対数は 1 となる。

$$\textcircled{1} \quad \log_a 1 = 0 \quad (1.5)$$

$$\textcircled{2} \quad \log_a a = 1 \quad (1.6)$$

つぎに, 積と商の対数はそれぞれの対数の和と差になる。

$$\textcircled{3} \quad \log_a(MN) = \log_a M + \log_a N \quad (1.7)$$

$$\textcircled{4} \quad \log_a(M/N) = \log_a M - \log_a N \quad (1.8)$$

この関係式を簡単に証明すると, $M = a^x, N = a^y$ とおくと, $x = \log_a M, y = \log_a N$ となる。

$$MN = a^x \cdot a^y = a^{x+y} \quad (1.9)$$

$$M/N = a^x/a^y = a^{x-y} \quad (1.10)$$

式(1.9)と式(1.10)において, 両辺の対数を取れば

$$\therefore \log_a(MN) = x + y = \log_a M + \log_a N$$

$$\therefore \log_a(M/N) = x - y = \log_a M - \log_a N$$

さらに, べき乗や累乗根の対数は以下の関係が成立する。

$$\begin{aligned} \textcircled{5} \quad \log_a M^p &= \log_a \underbrace{(M \cdot M \cdots M)}_{p \text{ 個}} \\ &= \log_a M + \log_a M + \cdots + \log_a M = p \log_a M \quad (1.11) \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad \log_a \sqrt[p]{M} = \log_a M^{\frac{1}{p}} = \frac{1}{p} \log_a M \quad (1.12)$$

1.3 底 の 変 換

いま, $N = a^x$ ($x = \log_a N$) について, b を底として両辺の対数をとると

$$\begin{aligned} \log_b N &= \log_b a^x \\ &= x \log_b a \quad (x = \log_a N) \\ &= \log_a N \cdot \log_b a \quad (1.13) \end{aligned}$$

式(1.13)を書き直すと

$$\log_a N = \frac{\log_b N}{\log_b a} \quad (1.14)$$

となる。ここで, $\log_b a$ は定数となるため, 式(1.14)を用いれば N の対数の底を a から b に変換できる。

自然対数を常用対数に変換, あるいはその逆の変換を行うには, 式(1.14)で, $a = e$, $b = 10$ とすると

$$\log_e N = \frac{\log_{10} N}{\log_{10} e} \quad (1.15)$$

となり, 以下の変換式が得られる。

• 常用対数を自然対数に変換する場合

$$\log_{10} N = \log_{10} e \cdot \log_e N \doteq 0.434 \log_e N \quad (1.16)$$

• 自然対数を常用対数に変換する場合

$$\log_e N = \frac{1}{\log_{10} e} \log_{10} N \doteq 2.302 \log_{10} N \quad (1.17)$$

1.4 仮数と指標

ある数 N は、1 以上で 10 より小さい数 a と整数 b を用いて、次式のように 10 のべき乗の形で表現できる。

$$N = a \times 10^b \quad (1 \leq a < 10, b \text{ は整数}) \quad (1.18)$$

例えば、153.4 と 0.0245 の数字は以下のようになる。

$$\begin{aligned} 153.4 &= 1.534 \times 10^2 & a &= 1.534, b = 2 \\ 0.0245 &= 2.45 \times 10^{-2} & a &= 2.45, b = -2 \end{aligned}$$

いま、式(1.18)の両辺の常用対数をとると

$$\log_{10} N = \log_{10}(a \times 10^b) = \log_{10} a + \log_{10} 10^b$$

ここで、 $\log_{10} 10^b = b \log_{10} 10 = b$ より

$$\therefore \log_{10} N = \log_{10} a + b \quad (1.19)$$

式(1.19)で、 $\log_{10} a$ を**仮数**、 b を**指標**という。

例えば、3, 30, 300 という数字の対数は

$$\begin{aligned} \log_{10} 3 &\doteq 0.477 \\ \log_{10} 30 &\doteq 1.473 = 0.477 + 1 \\ \log_{10} 300 &\doteq 2.473 = 0.477 + 2 \end{aligned}$$

となり、いずれも同じ仮数となる。指標は一桁すなわち 10 倍ごとに 1 増える。

また、0.3, 0.03 の対数は以下のようになる。

$$\begin{aligned} \log_{10} 0.3 &\doteq 0.477 - 1 \\ \log_{10} 0.03 &\doteq 0.477 - 2 \end{aligned}$$

図 1.1(a) はこれらの数の関係を図示したもので、0.03, 0.3, 3, 30, 300 は対数軸上でたがいの間隔が 1 ($= \log 10$) で並んでいる。しかし、これらの数を図(b)のように通常の線形軸上で表示すると、300 に対してかなり小さい 0.03 や 0.3 の表示が困難になる。

このように、対数は広範囲の数を表示するのに便利で、この目的のために用

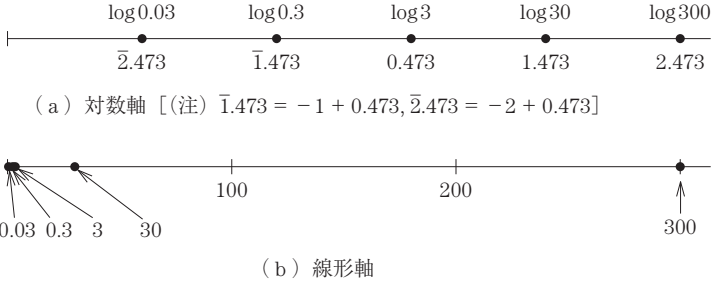


図 1.1 異なる軸上での数の表示

いられるのが対数グラフである。対数グラフは図 1.2 に示すように、軸が対数で目盛られている。通常の線形目盛と比較すると、対数目盛は大きい数の範囲を圧縮し、小さい数の範囲を拡大して表示していることがわかる。

なお、対数グラフには、図 1.3(a)に示すように、縦軸と横軸がともに対数

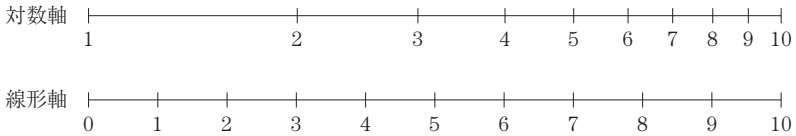


図 1.2 対数目盛と線形目盛

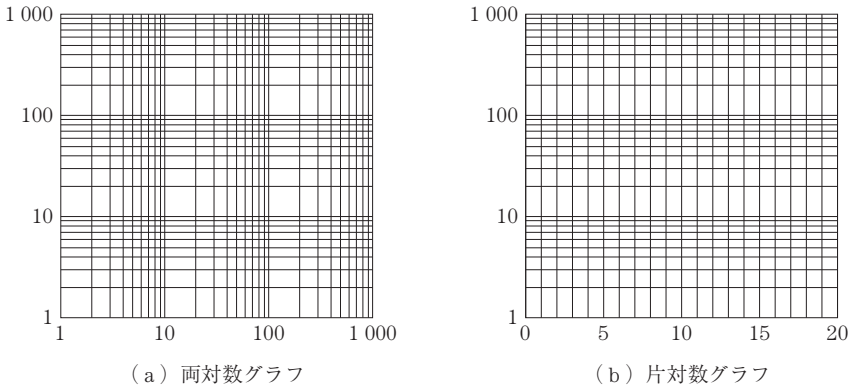


図 1.3 対数グラフ

目盛である両対数グラフと図(b)に示す片方の軸だけが対数目盛の片対数グラフがあり、用途によって使い分けられる。

1.5 対数の応用例

工学分野で扱う式や諸量には対数表現が多く用いられるが、ここでは電気電子工学分野の応用例を紹介する。

1.5.1 デシベル

デシベル (dB) は二つの量の比を表す単位で、次式で定義される。

$$10 \log \frac{A_2}{A_1} \text{ [dB]} \quad (1.20)$$

二つの量の比 A_2/A_1 とデシベルの関係を表 1.1 に示す。

表 1.1 二つの量の比とデシベルの関係

A_2/A_1	$\log (A_2/A_1)$	デシベル [dB]	A_2/A_1	$\log (A_2/A_1)$	デシベル [dB]
1	0	0	1	0	0
2	0.301	3.01	1/2	-0.301	-3.01
5	0.699	6.99	1/5	-0.699	-6.99
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
10	1	10	1/10	-1	-10
100	2	20	1/100	-2	-20
1 000	3	30	1/1 000	-3	-30
...

この表からわかるように、デシベルは $A_2/A_1 = 1$ のとき、すなわち二つの量 A_2 と A_1 が等しいとき 0 dB となる。そして、 A_2/A_1 が 1 より大きいとき正、小さいとき負の値となり、 A_2/A_1 が 10 倍あるいは 1/10 になるごとに 10 dB ずつ増減する。つまり、デシベルは対数を利用しているため、積は和、商は差として計算できる。これを増幅器と減衰器を例にとり、具体的に説明する。増

増幅器とは入力信号を大きくして出力する装置で、入力信号に対する出力信号の比を利得（ゲイン）という。減衰器は増幅器と逆に、入力信号を適切なレベルに減衰させる装置である。

いま、図 1.4(a)のように利得 10 倍と 100 倍の 2 台の増幅器を接続した場合、全体の利得は 1000 倍（ $= 10 \times 100$ ）となり、これをデシベルで計算すると 30 dB（ $= 10 \text{ dB} + 20 \text{ dB}$ ）となる。また、図(b)のように、利得 1000 倍の増幅器と利得 1/2 の減衰器を接続した場合、全体の利得は 500 倍（ $= 1000/2$ ）となり、デシベルで計算すると 27 dB（ $= 30 \text{ dB} - 3 \text{ dB}$ ）となる。

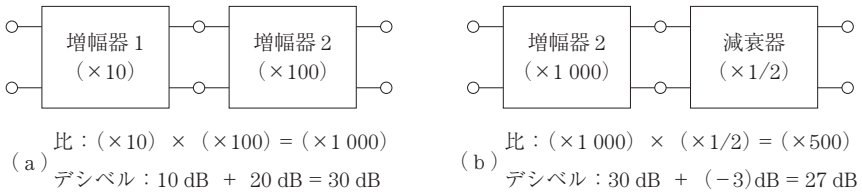


図 1.4 増幅器と減衰器の利得

ところで、図 1.5 に示す増幅器の利得は、一般に入力電力 P_i と出力電力 P_o の比を用いて次式で定義され、これを電力利得 G_p [dB] という。

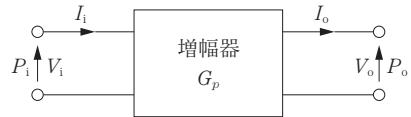


図 1.5 増幅器

$$G_p = 10 \log \frac{P_o}{P_i} \text{ [dB]} \quad (1.21)$$

ここで、入力抵抗 R_i と出力抵抗 R_o が等しいとき、 $P = V^2/R$ の関係より

$$10 \log \frac{P_o}{P_i} = 10 \log \left(\frac{V_o}{V_i} \right)^2 = 20 \log \frac{V_o}{V_i}$$

同様に $P = RI^2$ より次式となる。

$$10 \log \frac{P_o}{P_i} = 10 \log \left(\frac{I_o}{I_i} \right)^2 = 20 \log \frac{I_o}{I_i}$$

索引

【あ】	行	58
アドミタンス行列	81	行-行列
アナロジー	127	59
アンペアの右ねじの法則	95	行ベクトル
		59
【い】	共役複素数	35
位相	27, 39	行列
位相特性	164	58
位置ベクトル	44	行列式
移動平均法	168	64
インピーダンス	38	極座標表示
インピーダンス行列	80	33
		虚部
		31
【お】	【く】	
オイラーの公式	34, 111	クラメルの公式
		77
【か】	クロナッカーのデルタ	60
階数	115	
外積	47	【け】
回転	94	ゲイン特性
回転行列	82	164
回転ベクトル	33	懸垂線
ガウスの法則	93	183
ガウス平面	32	【こ】
角周波数	26	高調波
仮数	4	130
カテナリー	183	弧度法
過渡解	120	17
過渡状態	120	【さ】
		最終値定理
【き】	三角関数表示	32
基本角周波数	129	三角行列
基本波	130	61
逆行列	72	13
逆三角関数	25	【し】
逆双曲線関数	176	指数関数表示
		33
		自然対数
		2
		四端子行列
		81
		実効値
		102
		実部
		31
		時定数
		120
		指標
		4
		周波数スペクトル
		144
		自由ベクトル
		44
		主値
		26
		純虚数
		31
		小行列式
		68
		常用対数
		2
		初期値定理
		159
		真数
		1
		【す】
		推移定理
		157
		スカラー
		42
		スカラー積
		47
		スケール変換
		158
		【せ】
		正弦
		13
		正弦定理
		25
		正接
		13
		正方行列
		59
		積分
		97
		積分定数
		97
		絶対デシベル
		9
		全微分
		91
		【そ】
		双曲角
		172
		双曲正弦
		171
		双曲正接
		171
		双曲線関数
		171
		双曲余弦
		171
		相似定理
		158
		束縛ベクトル
		44
		【た】
		対角行列
		59
		対角成分
		59
		対称行列
		62
		対数
		1

たたみ込みの定理	158
単位円	15
単位行列	60
単位ステップ関数	152
単位法線ベクトル	45
【ち】	
遅延演算子	167
置換積分法	101
直交座標表示	32
【て】	
底	1
低域通過フィルタ	164, 168
定常解	120
定常状態	120
定積分	98
テイラー展開	106
デシベル	6
デルタ関数	153
電圧利得	8
電磁誘導の法則	92
伝達関数	163, 168
転置行列	61
伝搬定数	179
電流利得	8
電力の重ね合わせ	142
電力利得	7
【と】	
導関数	85
同相	27
特性インピーダンス	179
特性方程式	122
度数法	17
ド・モアブルの定理	34
トレース	60
【な】	
内積	47
ナブラ	93
【に】	
二項定理	111

【は】	
倍電圧発生回路	165
ハイブリッド行列	81
発散	93
【ひ】	
ひずみ波交流	136
皮相電力	40
微分	86
微分演算子	93
微分係数	86
微分方程式	115
【ふ】	
複素数	31
複素電力	39
複素フーリエ級数	134
複素平面	32
不定積分	97
部分積分法	100
フーリエ逆変換	144
フーリエ級数	129
フーリエ変換	144
フレミングの左手の法則	52
分布定数回路	177
【へ】	
平衡条件	80
ベクトル	42
ベクトル積	47
変数分離法	117
偏微分	90
【ほ】	
ポアソン方程式	96
方向余弦	44
補助方程式	121
ボード線図	164
【ま】	
マクスウェルの電磁界	
基礎方程式	96
マクローリン展開	106

【む】	
無効電力	39
【め】	
面積ベクトル	45
【ゆ】	
有効電力	39, 104
【よ】	
余因子	68
余因子行列	70
余因子展開	69
余弦	13
余弦定理	25
【ら】	
ラジアン	17
ラプラス演算子	96
ラプラス付関数	155
ラプラス変換	148
ラプラス方程式	97
【り】	
リアクタンス	38
力率	40, 104
留数	161
留数定理	161
【れ】	
零行列	61
零ベクトル	45
列	58
列-行列	59
列ベクトル	59
【ろ】	
ロピタルの定理	153
【欧文】	
h パラメータ	81
n 次の近似式	112
rms	102
z 変換	167

—— 著者略歴 ——

1975年 名古屋大学工学部電子工学科卒業
1980年 名古屋大学大学院工学研究科博士後期課程修了（電子工学専攻）
1983年 工学博士（名古屋大学）
1994年 中部大学教授
現在に至る

実用 電気系学生のための基礎数学

Fundamental Mathematics for Electrical and Electronic Engineering Students

© Mikio Kuzuya 2015

2015年 3月23日 初版第1刷発行



検印省略

著者 葛谷 幹夫
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844 ・ 電話 (03) 3941-3131 (代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-00872-2 (鈴木) (製本：愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします