

ま え が き

デジタル信号処理は、コンピュータに使われる CPU やマイクロプロセッサのようなデジタル数値演算回路を用いて信号の分析や加工を行うための技術であり、情報通信、制御、計測、音声・画像処理など、さまざまな分野における基礎技術として、重要な位置にある。筆者は数年前より工学部電気系学科でこの科目を2年生に向けて講義しており、本書はこの講義ノートをもとに、デジタル信号処理を初めて学ぶ理系大学の学部生、大学院生、高専生、社会人が入門書として使えるようにまとめたものである。

本書執筆にあたり、つぎの2点に注意した。第1点目として、解説にはできるだけ微積分を使わず、直感的な説明となるよう心がけた。デジタル信号処理はフーリエ変換やラプラス変換をベースとした学問分野であるため、微積分を多用するアナログ信号処理を解説のスタートとする教科書が多い。本来、デジタル信号処理の目的は、四則演算しか実行できないマイクロプロセッサなどで信号を処理することであり、たたみ込みやフーリエ変換など、さまざまな演算が四則演算のみで実装される。したがって、本書では微積分を用いるアナログ信号処理の解説は極力省き、可能な限り平易な数学だけを用いて各テーマを解説した。

第2点目として、本書では多くの例題、特に単純な計算問題を多数掲載した。これはデジタル信号処理に限らず数学系の科目は、反復計算によるトレーニングが重要であるからである。どんなに難解な理論でも、最初の章は単純な計算から始まる。この計算はあまりにも単純なため、学生にも、講師にも、教科書執筆者にもしばしばおろそかにされるが、この計算をこなす力はその後続く理論を理解するための基礎体力となるため、これを飛ばすとその先で必ずつまづく。また、最後まで理論を理解できたとしても、応用できる力が

備わらなければ意味がない。英文法をいくら勉強しても英語を話せるようにはならないが、短いフレーズでも何度も使っていくうちに新しいフレーズを生み出す力が備わり、活きた英語力が身に着くものである。これは数学でも同じである。

以上に加えて、本書では各章のテーマの理解を助けるため、またデジタル信号処理に興味を持っていただくために、章末にコラム（コーヒーブレイク）を設けた。これらを読むだけでもデジタル信号処理技術のポイントをつかむことが可能であると思う。

最後に、本書がこの分野の学習を始める方々のための入門書として、少しでもお役に立てば幸いに思う。執筆にあたり、すでに出版されている多くの良書を参考にさせていただいたので、巻末で感謝の気持ちを込めて一覧にした。また、本書執筆の機会を与えてくださったコロナ社の方々に深謝したい。

2013年8月

著 者

目 次

1. デジタル信号処理概論

1.1 デジタル信号処理とは	1
1.2 DSP のアーキテクチャ	4
1.3 デジタル信号処理のための数学	6
1.3.1 ラジアンと正弦波	6
1.3.2 複素数	8
1.3.3 オイラーの公式	10
1.3.4 複素正弦波	11
1.3.5 無限等比数列の和	12
1.3.6 正射影ベクトルと直交分解	12
《コーヒーブレイク》フラットランドと複素世界	15
章末問題	17

2. 信号とシステムの数学的表現

2.1 離散時間信号の数学的表現	18
2.2 離散時間システムの数学的表現	23
2.3 差分方程式	26
《コーヒーブレイク》風呂場とカラオケとケータイ	31
章末問題	32

3. インパルス応答とたたみ込み

3.1 インパルス応答	34
3.2 線形時不変システム	39
3.3 たたみ込み	42
《コーヒープレイク》 たたみ込みの“ひみつ”	47
章末問題	51

4. z 変換

4.1 z 変換の定義	53
4.2 z 変換の性質	60
4.3 逆 z 変換	64
4.3.1 基本的な逆 z 変換	65
4.3.2 部分分数展開法	67
《コーヒープレイク》 たたけばわかる	70
章末問題	72

5. 伝達関数

5.1 伝達関数の定義	73
5.2 縦続システムと並列システムの伝達関数	77
5.3 伝達関数を用いた出力信号の計算法	79
5.4 システムの安定性と極	84
5.4.1 システムの安定性	84
5.4.2 極配置と安定性	86

《コーヒープレイク》 エコーを消すシステム	88
章 末 問 題	91

6. 離散時間信号の周波数領域表現 I

～信号の成分分析・フーリエ変換の仕組み～

6.1 離散時間信号の直交分解	93
6.2 離散フーリエ変換	97
6.3 高速フーリエ変換	101
6.4 周波数解析	104
《コーヒープレイク》 4人の話を同時に聞く方法	107
章 末 問 題	109

7. 離散時間信号の周波数領域表現 II

～周波数スペクトラムの表現・加工・再生～

7.1 離散時間フーリエ変換	110
7.1.1 離散時間フーリエ変換の定義	110
7.1.2 振幅スペクトルのデシベル表現	114
7.1.3 位相スペクトルの図表現	116
7.2 離散時間フーリエ変換の性質	119
7.3 サンプリング定理	121
《コーヒープレイク》 インパルスは違法！	126
章 末 問 題	127

8. 離散時間システムの周波数領域表現

8.1 離散時間システムの周波数特性	128
8.2 伝達関数と周波数特性	133
8.3 フーリエ変換と周波数特性	135
8.4 デジタルフィルタ	140
8.4.1 デジタルフィルタの分類	140
8.4.2 低域通過フィルタ	142
《コーヒープレイク》共鳴と振幅特性	145
章末問題	146
引用・参考文献	147
章末問題略解	148
索引	157

1

デジタル信号処理概論

デジタル信号処理とはなにか、本章ではその特徴と応用分野について述べる。また、実際に信号処理を実行するデジタルシグナルプロセッサの特徴について解説する。さらに、デジタル信号処理に必要なとなる数学的な基本事項について確認する。

1.1 デジタル信号処理とは

空気の振動によって伝わる音（音波）は、マイクロフォンによって時間的に途切れのない連続した電気信号に変換される。携帯電話や無線 LAN の電波も、アンテナで受信された直後は時間的に途切れのない連続した信号である。自然界のさまざまな物理量、例えば気温や湿度、太陽の日射量、地震の振動なども、適切なセンサで観測することによって、すべて時間的に連続した信号として取り出すことができる。このようにして得られた時間的に連続な信号を連続時間信号（continuous-time signal）またはアナログ信号（analog signal）といい、この信号にさまざまな処理を施すことをアナログ信号処理という。これに対して、アナログ信号を一定の時間間隔で抽出して得られる信号を離散時間信号（discrete-time signal）といい、これに対して行う処理をデジタル信号処理（digital signal processing）という。

図 1.1 にデジタル信号処理の例を示す。入力されたアナログ信号はアナログ・デジタル変換器（analog to digital converter; ADC; A-D 変換器）で

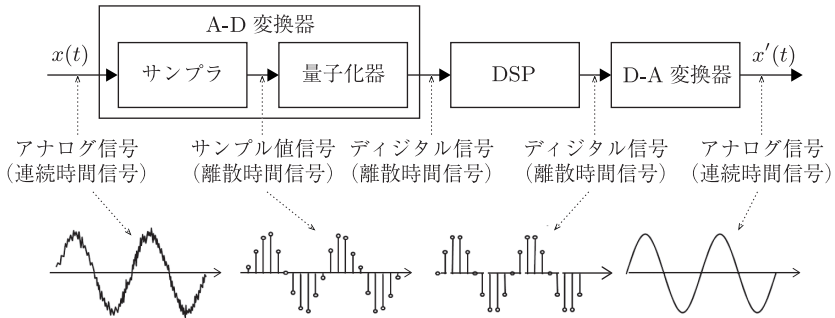


図 1.1 デジタル信号処理の例 (雑音除去)

離散時間信号に変換される。アナログ信号を一定の時間間隔 T で抽出することをサンプリング (sampling; 標本化), これを行う部分をサンプリング器 (sampler; 標本化器) という。また, これによって得られる離散時間信号をサンプル値信号 (sampled signal) と呼ぶ。 T はサンプリング周期 (sampling period), その逆数 $1/T$ はサンプリング周波数 (sampling frequency) という。

サンプル値信号の大きさは実数値 (数学的には, 小数点以下に無限の桁が存在する) であるが, 後段のシステムでは有限の桁しか扱えないため, 量子化 (quantization) によってサンプリングされた信号を有限の桁に打ち切る。これによって得られる離散時間信号をデジタル信号 (digital signal) という。得られたデジタル信号はデジタルシグナルプロセッサ (digital signal processor; DSP) によって処理され, デジタル・アナログ変換器 (digital to analog converter; DAC; D-A 変換器) を通してアナログ信号として出力される。

以上の各信号を信号の大きさおよび時間の観点から分類すると, 表 1.1 のようになる。

表 1.1 信号の分類

		信号の大きさ	
		連続値	離散値
時間	連続時間信号	アナログ信号	多値信号
	離散時間信号	サンプル値信号	デジタル信号

アナログ信号処理は、アナログ電子部品を複雑に組み合わせて構成されたアナログ回路によって実現される。このアナログ信号処理には以下のような問題点がある。

- 部品の精度が低く、高精度の計算が困難である
- 部品の温度変化や経年変化の影響が大きい
- 雑音の影響が大きい
- いったんある信号処理回路を製作すると、処理の変更が困難である
- 複雑な信号処理が困難である

一方、近年急速に発展した半導体集積回路技術によって実現された DSP は、コンピュータの CPU（中央処理演算装置）と同様、プログラムで記述された複雑な演算命令を高速に実行でき、デジタル信号に変換された信号を数値処理することで信号処理を実現している。このデジタル信号処理は、アナログ信号処理に比べてつぎのような利点がある。

- 高い精度の処理が可能である
- 部品の温度変化や経年変化の影響がほとんどない
- 雑音の影響がほとんどない
- 回路変更せず、プログラムの書き換えだけで処理内容の変更が可能である
- 複雑な信号処理が可能である

以上のようにデジタル信号処理はきわめて有用な技術であり、近年さまざまなアナログ信号処理システムがデジタル信号処理システムに置き換えられている[†]。

デジタル信号処理の応用分野は多岐にわたる。以下に代表的な応用例を示す。

[†] ただし、信号の周波数がきわめて高い場合、アナログ信号をデジタル信号に変換するために高いサンプリング周波数に対応した A-D 変換器が必要となり、かつ、これから得られる信号を短時間に処理できる DSP が必要となるため、システム全体が高価になり、また消費電力が増大する。このような場合はアナログ電子部品を使用した信号処理システムが有効であり、現在のさまざまなシステムでは、それぞれ使い分けがなされている。

4 1. デジタル信号処理概論

- 雑音除去・フィルタリング

マイクによって録音された音声信号には雑音が含まれている。この雑音成分を除去することを**雑音除去**という。一般に、信号の中で不要な成分を取り除き、必要な成分を抽出することを**フィルタリング (filtering)**という。

- 信号の特徴解析・認識

音声認識の分野では、音声信号に含まれる特徴を抽出し、これをもとに音素や単語などを認識することができる。重要な特徴だけを抽出して解析・認識することも、デジタル信号処理の応用分野の一つである。

- システムの同定

ある未知のシステムに特殊な信号を入力してその出力信号を観測することで、そのシステムがどのような特徴を有するかを知ることができる。これを**システム同定**という。システム同定は複雑な構造を持つシステムの特徴を知る上できわめて重要であり、電気通信分野だけでなく、さまざまな分野で広く利用されている。

- その他

時系列信号を扱うさまざまな分野で、デジタル信号処理技術が利用されている。例えば、電気通信分野では変調・復調技術、等価技術、誤り訂正技術、情報処理分野ではデータ圧縮、暗号化技術、音響信号処理、画像処理、株価変動予測、データマイニング、医療分野では超音波エコー、X線CT、核磁気共鳴画像法 (MRI)、計測分野では非破壊測定、地震計測、各種レーダ (地中探査・気象)、天体観測、気象予報などが挙げられる。

1.2 DSP のアーキテクチャ

前述のとおり、DSP はコンピュータの CPU と同じように、プログラムによってその動作が制御される。ただし、遅延のない信号処理を行うためには高速演

算が必要であり、さまざまな工夫が施されている。

一般的な CPU では、プログラム（命令）とデータは同一のメモリに格納されており、ある時刻にはいずれか一方しか読み出すことができない。一方、DSP ではプログラム（命令）とデータを異なるメモリに格納し、プログラムの読み出しとデータの読み書きを同時に行うことができる。これをハーバードアーキテクチャ（Harvard architecture）という。命令とデータの同時読み出しにより、処理時間を大幅に短縮できる。

デジタル信号処理では、二つのデータ系列 a_i, b_i ($i = 1, 2, \dots, N$) に対してつぎのような計算を行うことが多い。これを積和演算処理という。

$$y = \sum_{i=1}^N a_i b_i$$

CPU で積和演算を行う場合

- a_i と b_i をメモリから読み出す
- a_i と b_i の積を計算する ($x_i = a_i \times b_i$ とする)
- a_i と b_i の乗算結果 x_i を y に加える

の各処理を逐次行い、これを N 回繰り返す。処理が実行される様子を図 1.2 (a) に示す。図に示すように、計算にかかるステップ数は $3N$ となる。

DSP は、積和演算を高速に実行するための専用の積和演算装置を備えている。これはメモリ読み出し、乗算、加算を同時に行うことができ、ある時刻では

- a_i と b_i をメモリから読み出す (read)
- a_{i-1} と b_{i-1} の積を計算する (結果を x_{i-1} とする)
- a_{i-2} と b_{i-2} の乗算結果 x_{i-2} を y に加える

を同時に実行できる。このような処理をパイプライン処理という (図 1.2 (b))。これによって、積和演算にかかるステップ数は $N + 2$ となり、計算時間を大幅に短縮できる。

時刻	処理
1	read a_1, b_1
\vdots	\vdots
$3i - 2$	read a_i, b_i
$3i - 1$	$x_i = a_i \times b_i$
$3i$	$y = y + x_i$
\vdots	\vdots
$3N$	$y = y + x_N$

(a) 一般的な CPU

時刻	パイプライン処理		
1	read a_1, b_1	—	—
2	read a_2, b_2	$x_1 = a_1 \times b_1$	—
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
i	read a_i, b_i	$x_{i-1} = a_{i-1} \times b_{i-1}$	$y = y + x_{i-2}$
$i + 1$	read a_{i+1}, b_{i+1}	$x_i = a_i \times b_i$	$y = y + x_{i-1}$
$i + 2$	read a_{i+2}, b_{i+2}	$x_i = a_{i+1} \times b_{i+1}$	$y = y + x_i$
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
$N + 1$	—	$x_N = a_N \times b_N$	$y = y + x_{N-1}$
$N + 2$	—	—	$y = y + x_N$

(b) DSP

図 1.2 一般的な CPU と DSP の積和演算処理の比較

1.3 デジタル信号処理のための数学

本節では、デジタル信号処理を理解する上で必要となる数学的な基本事項、正弦波、複素数、無限等比数列、ベクトルの直交分解について確認する。

1.3.1 ラジアンと正弦波

ラジアン (radian; rad) は角度の単位である。半径 1 の円内に扇形を考えたとき、扇形の中心角をその扇形の弧長で表現したものをラジアンという。半径 1 の円の円周は 2π 、その 4 分の 1 の扇形の弧長は $\pi/2$ であるので、 360° は 2π [rad]、 90° は $\pi/2$ [rad] となる。

$$y [\text{rad}] = \frac{2\pi}{360} x [^\circ]$$

図 1.3 のような信号を正弦波といい

$$x(t) = A \sin(\omega t + \theta)$$

と書く。ここで t は時刻 [s], A は振幅, ω は角周波数 [rad/s], θ は初期位相 [rad] という。特に初期位相 θ が $\pi/2$ のとき

$$x(t) = A \sin(\omega t + \pi/2) = A \cos(\omega t)$$

となり, これを余弦波という。余弦波は正弦波の特別な場合と考えられるので, $\cos(\omega t)$ も区別なく正弦波ということがある。

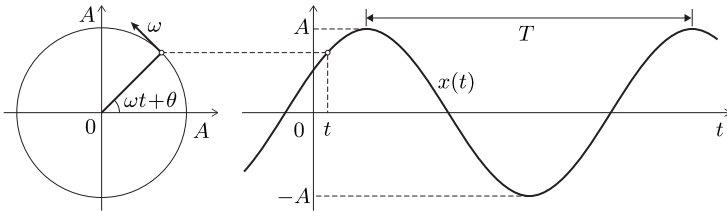


図 1.3 正弦波

正弦波は図 1.3 のように, 半径 A の円の円周上を反時計周りに回転する点を, 縦軸上に射影したときの軌跡であり, 角周波数 ω はこの点の回転速度 (1 秒間に進む角度), 初期位相 θ は時刻 0 における横軸とのなす角を意味する。また, この点が 1 周するのにかかる時間を周期 T [s] といい, 上記の角周波数の定義から

$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$

が成り立つ。

また, T 秒で 1 周するという事は, 1 秒間に $1/T$ 周することになる。1 秒間の回転数を周波数 f [Hz] という[†]。

[†] [Hz] は [回転/s] と同じ意味である。

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi}$$

デジタル信号処理では、 f は正とは限らず負の場合もある。ただ、この負の周波数を持つ正弦波は、円上を時計周りに回転する点の射影であり、例えば正弦波 $\sin(\omega t) = \sin(2\pi f t)$ に対して、 $\sin\{2\pi(-f)t\} = -\sin(2\pi f t)$ にすぎない。すなわち、正負が反転（位相が π シフト）するだけで、形状は変わらない。

ところで、図 1.4 に示すように、余弦波の周波数 f を徐々に小さくしていくと、極限 ($f = 0$) で信号は時間軸に水平なグラフとなる。これを直流信号 (direct current; DC) という。一方、 $|f| > 0$ の信号を交流信号 (alternate current; AC) という。以上から周波数が 0 の交流は直流であるといえる。

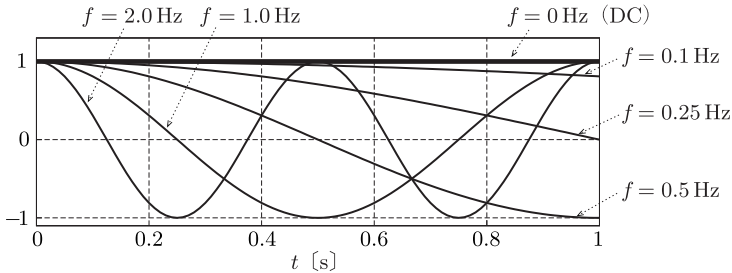


図 1.4 交流と直流

なお、正弦波に限らず信号の 2 乗すなわち $|x(t)|^2$ を、その信号の電力またはパワー^{†1}という。これは、電圧 $v(t)$ または電流 $i(t)$ の信号を R [Ω] の抵抗に通すと、この抵抗での消費電力は $p(t) = v(t)i(t) = |v(t)|^2/R = |i(t)|^2 R$ と計算でき、特に $R = 1 \Omega$ のとき $p(t) = |v(t)|^2 = |i(t)|^2$ となることに起因する。

1.3.2 複素数

$j^2 = -1$ を満たす $j = \sqrt{-1}$ を虚数単位 (imaginary unit)^{†2} といい、 a, b を実数として

^{†1} パワー (power) は「力」ではなく仕事率 ([J/s] または [W]) である。「力」は force [N] である。

^{†2} 通常は虚数単位に i を用いるが、電流を i で表すことから電気系の分野では j を用いる。

索引

<p>【あ】</p> <p>アナログ信号 1</p> <p>アナログ・デジタル 変換器 1</p> <p>安定 84</p> <p>【い】</p> <p>位相ベクトル 98, 111</p> <p>位相特性 129</p> <p>因果性システム 40</p> <p>インパルス応答 34</p> <p>【え】</p> <p>エイリアシング 125</p> <p>【お】</p> <p>オイラーの公式 10</p> <p>折り返し 125</p> <p>【か】</p> <p>解析信号 139</p> <p>回転因子 102</p> <p>角周波数 7</p> <p>加算器 23</p> <p>片側 z 変換 53</p> <p>過渡域 141</p> <p>【き】</p> <p>基底信号 94</p> <p>逆離散時間フーリエ変換 111</p> <p>逆離散フーリエ変換 97</p> <p>逆 z 変換 65</p> <p>共役複素数 9</p> <p>極 86</p>	<p>極座標表現 10</p> <p>虚数単位 8</p> <p>虚部 9</p> <p>【く】</p> <p>群遅延特性 139</p> <p>【け】</p> <p>係数乗算器 23</p> <p>【こ】</p> <p>高域通過フィルタ 140</p> <p>高速フーリエ変換 102</p> <p>交流信号 8</p> <p>【さ】</p> <p>雑音除去 4</p> <p>差分方程式 26</p> <p>サンブラ 2</p> <p>サンプリング 2</p> <p>サンプリング周期 2</p> <p>サンプリング周波数 2</p> <p>サンプリング定理 126</p> <p>サンプル値信号 2</p> <p>【し】</p> <p>時間シフト 60, 120</p> <p>時間領域たたみ込み 60, 120</p> <p>システム同定 4, 70</p> <p>実部 9</p> <p>時不変システム 40</p> <p>時不変性 39</p> <p>周期 7</p> <p>周期信号 97</p> <p>縦続システム 77</p>	<p>周波数 7</p> <p>周波数シフト 120</p> <p>周波数特性 129</p> <p>初期位相 7</p> <p>初期休止条件 35</p> <p>振幅 7</p> <p>振幅スペクトル 98, 111</p> <p>振幅特性 129</p> <p>【せ】</p> <p>正弦波 7</p> <p>正射影ベクトル 12</p> <p>積和演算処理 5</p> <p>全域通過フィルタ 156</p> <p>線形システム 39</p> <p>線形時不変システム 39</p> <p>線形性 39, 60, 119</p> <p>【そ】</p> <p>阻止域 140</p> <p>【た】</p> <p>帯域制限 125</p> <p>帯域制限信号 125</p> <p>帯域阻止フィルタ 140</p> <p>帯域通過フィルタ 140</p> <p>たたみ込み 44</p> <p>タップ 23</p> <p>タップ係数 23</p> <p>単位インパルス信号 18</p> <p>単位ステップ信号 22</p> <p>【ち】</p> <p>遅延子 23</p> <p>直線位相特性 139</p>
---	---	--

直線位相フィルタ	139	パワースペクトル	98, 111		
直流信号	8			【む】	
直交基底	14, 94	【ひ】			無限インパルス応答システム
直交座標表現	10	標本化	2		36
直交分解	14, 94	標本化器	2	【ゆ】	
		ヒルベルト変換器	139		有界
【つ】					有限インパルス応答システム
通過域	140	【ふ】			36
		フィードバックシステム	25	【よ】	
【て】		フィードフォワードシステム	25		余弦波
低域通過フィルタ	140	フィルタリング	4		7
デジタル・アナログ		複素共役	9	【ら】	
変換器	2	複素数	9		ラジアン
デジタルシグナル		複素正弦波	11		6
プロセッサ	2	複素平面	9	【り】	
デジタル信号	2	負の周波数	8		離散時間システム
デジタル信号処理	1	部分分数展開	67		23
デジタルフィルタ	140				離散時間信号
デシベル	115	【へ】			1
伝達関数	73	並列システム	78		離散時間フーリエ変換
					110
【は】		【ほ】			離散フーリエ変換
ハーバードアーキテクチャ	5	方形窓	105		97
パイプライン処理	5				両側 z 変換
バタフライ演算	103	【ま】			53
ハニング窓	105				量子化
ハミング窓	106	窓関数	105		2
				【れ】	
					零点
					86
					連続時間信号
					1

		DTFT	110	IDTFT	111
【A】		D-A 変換器	2	IIR	36
ADC	1	【F】		IIR フィルタ	141
A-D 変換器	1	FFT	102	【L】	
【B】		FIR	36	LPF	140
BPF	140	FIR フィルタ	141	【S】	
BSF	140	【H】		sinc 関数	143
【D】		HPF	140	【Z】	
DAC	2	【I】		z 変換	53
DFT	97	IDFT	97		
DSP	2				

— 著者略歴 —

1991年 大阪府立大学工学部電気工学科卒業
1993年 大阪府立大学大学院工学研究科博士前期課程修了（電気工学専攻）
1996年 大阪府立大学大学院工学研究科博士後期課程修了（電気工学専攻）
博士（工学）
1996年 大阪電気通信大学講師
2002年 大阪府立大学講師
2012年 大阪府立大学准教授
現在に至る

例解 デジタル信号処理入門

Introduction to Digital Signal Processing

© Masaya Ohta

2013年10月30日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 おお た まさ や
太 田 正 哉
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-00857-9 (柏原) (製本:愛千製本所) G

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします