

ま え が き

携帯音楽プレーヤ、DVD プレーヤ、デジタルカメラ、携帯電話、デジタル放送などのように身近な機器のほとんどがデジタル化されている。これらの機器では、アナログ信号処理の時代には実現不可能であった機能、サービス、利便性を利用することができる。JPEG, MPEG, または MP3 などでは、画・音質を大幅に劣化させることなく高い圧縮率を達成するために、信号の周波数解析、量子化、符号化を有機的に組み合わせている。信号の周波数解析は、高能率な符号化に不可欠な信号処理で、圧縮率向上に貢献している。画像情報は視覚モデルと量子化、音声情報は心理聴覚モデルと量子化によってそれぞれ削減される。

ところで、デジタル信号は数値列で表される。この数値列をアルゴリズムに基づく計算手順によって処理することを信号処理といい、上述したように現在使用されているデジタル機器は、基本的な信号処理の組合せによって実現されている。よって、信号処理の知識を習得するうえで基本処理とその特性を十分に理解することが大変有益なのである。

1999年に『C言語によるデジタル信号処理入門』を久保田一先生とともに発行し、プログラムの実行を促す箇所を随所に設けて習うより慣れろを基本にデジタル信号処理の入門書としての役割を担ってきた。しかし、機器のデジタル化が予想以上に急速に進み、デジタル信号処理が特別なものではなくなり、「デジタル」のほうが「アナログ」より身近な存在となった。また、「アナログ」と「デジタル」の垣根が事実上ほとんどなくなったことを考慮して『C言語によるはじめて学ぶ信号処理』として発行するに至ったしだいである。

内容としては、習うより慣れろを基本に最後まで読み通していただけることに力を注いだ『C言語によるデジタル信号処理入門』の精神は継承し、数学

的な理論解説にも重点を置いた。本書の構成は、久保田一先生と執筆した時点の骨格を踏襲している。

能率的に信号処理を深く理解するには、C言語のように技法が確立されているプログラミングを用いた動作確認が近道である。この学習方法は、プログラムの知識が豊富な場合には有効である。『C言語によるデジタル信号処理入門』と同様、本書の書名にもあるようにC言語のプログラミングによって、信号処理で重要な数式の時間的な流れ、処理の流れを明確にする。また、本書ではFFTやデジタルフィルタの設計などもでき、実用的な価値もある。本文を読みながら、その記述を、プログラムの実行で確認して頂きたい。

本書が信号処理の入門書として、学生諸君、エンジニアの方々のお役に立てれば幸いである。また、本書により信号処理に多くの人々が興味・関心を持ってくれることを切望している。

本書の出版にあたってご尽力いただいたコロナ社に心からお礼を申し上げる。
2013年2月

大石 邦夫

目 次

1. デジタル信号処理の概要と特徴

1.1 A-D 変換	1
1.2 標本化定理	3
1.2.1 標本化(サンプリング)	3
1.2.2 エイリアシング	5
1.2.3 アナログ信号の復元	7
1.3 量子化器の特性	12
1.4 デジタル信号処理	14
章末問題	15

2. デジタルフィルタの基礎

2.1 差分方程式	17
2.1.1 デジタルフィルタの構成要素	17
2.1.2 差分方程式による入出力信号の関係	19
2.2 デジタルフィルタのインパルス応答	20
2.2.1 C言語によるインパルス応答の計算	20
2.2.2 巡回形フィルタのインパルス応答	26
2.2.3 非巡回形フィルタのインパルス応答	29
2.2.4 IIR フィルタの安定性とインパルス応答	33
2.3 デジタルフィルタのステップ応答	34

2.4 たたみ込み演算	37
章 末 問 題	43

3. デジタルフィルタの特性

3.1 パソコンによる振幅と位相の計算	45
3.2 z 変換	48
3.2.1 z 変換の定義	48
3.2.2 z 変換の性質	51
3.2.3 逆 z 変換の定義	53
3.3 デジタルフィルタの伝達関数と安定性	56
3.3.1 インパルス応答と伝達関数	56
3.3.2 伝達関数の極と零点	57
3.3.3 インパルス応答と極の位置関係	58
3.3.4 1次 IIR フィルタの安定性の確認	60
3.4 周波数特性	63
3.4.1 振幅特性と位相特性	63
3.4.2 周波数特性によるデジタルフィルタの分類	67
3.4.3 C 言語による周波数特性の表示	69
3.4.4 低域通過フィルタから各種フィルタへ	76
章 末 問 題	78

4. 高速フーリエ変換とスペクトル分析

4.1 離散フーリエ変換と離散逆フーリエ変換	79
4.1.1 離散フーリエ変換の定義	79
4.1.2 直交変換	80

4.1.3	変換行列を用いた DFT	81
4.1.4	DFT の 性 質	84
4.1.5	離散逆フーリエ変換の定義	87
4.1.6	変換行列を用いた IDFT	88
4.1.7	C 言語による DFT と IDFT のプログラミング	89
4.2	高速フーリエ変換と高速逆フーリエ変換	97
4.2.1	FFT の 導 入	97
4.2.2	バタフライ演算と FFT アルゴリズム	102
4.2.3	FFT アルゴリズムの複素加・乗算回数	104
4.2.4	ビ ッ ト 反 転	105
4.2.5	高速逆フーリエ変換	107
4.2.6	C 言語による FFT と IFFT のプログラミング	107
4.3	窓関数とスペクトル分析	116
	章 末 問 題	122

5. デジタルフィルタの設計

5.1	IIR フィルタの設計	124
5.1.1	アナログフィルタの設計	125
5.1.2	バタワース特性	125
5.1.3	チェビシェフ特性	131
5.1.4	アナログフィルタの周波数変換	142
5.1.5	双 1 次 変 換 法	143
5.1.6	$s - z$ 変 換	146
5.1.7	IIR フィルタの設計手順	150
5.1.8	双 1 次変換の適用例	150
5.2	FIR フィルタの設計	153

5.2.1	直線位相特性	154
5.2.2	直線位相 FIR フィルタの設計	155
5.2.3	直線位相 FIR の設計例	158
5.2.4	窓関数法	165
5.2.5	窓関数法による設計例	165
5.3	デジタルフィルタの構成	167
5.3.1	IIR フィルタの構成	167
5.3.2	FIR フィルタの構成	170
	章末問題	171
	引用・参考文献	173
	索引	174

1

ディジタル信号処理の概要と特徴

ディジタル信号はどのような信号で、どのような過程を経てアナログ信号から変換されるのであろうか。逆に、元のアナログ信号はどのような過程を経てディジタル信号から再現できるのであろうか。また、ディジタル信号処理はどのような特徴をもっているのであろうか。ここでは、ディジタル信号処理を学ぶにあたり必要な基礎知識、アナログ信号とディジタル信号を結ぶ変換方法、記号の定義などについて説明する。

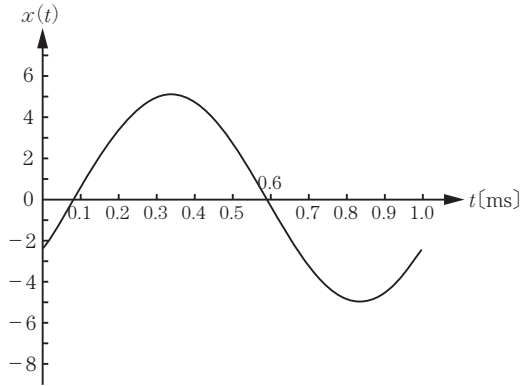
1.1 A-D 変換

アナログ信号 (analog signal) とは、時間軸と振幅軸がともに連続な信号である。アナログ信号の一例とし図 1.1(a) に振幅 5、周波数 1kHz、初期位相 $-\pi/6$ の正弦波を示す。アナログ信号は、① 標本化、② 量子化によってディジタル信号 (digital signal) に変換される。

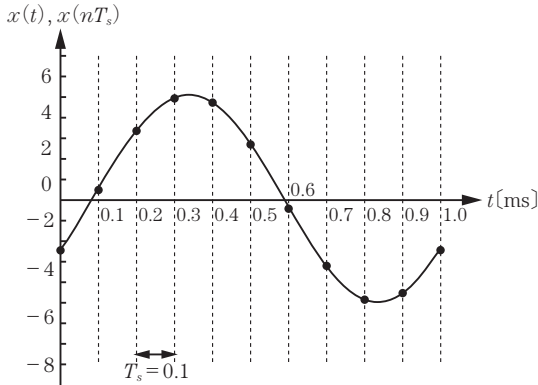
アナログ信号 $x(t)$ から T_s 秒ごとに時刻 $t = nT_s$ の瞬間の振幅を取り出し、標本値列 (sampled signal) $\{x(nT_s); n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ を得る操作を標本化 (sampling) という。ただし、 n は整数である。 T_s を標本化周期 (sampling period) といい、標本化周波数 (sampling rate) f_s は

$$f_s = \frac{1}{T_s} \quad (1.1)$$

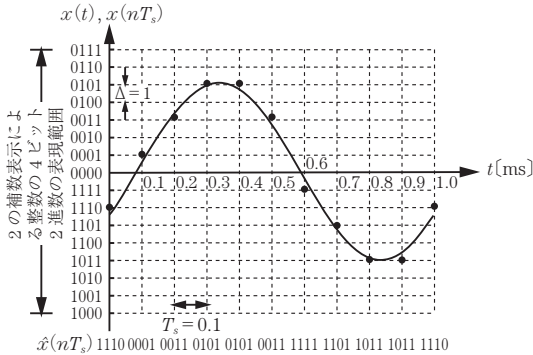
で与えられる。図 (a) の正弦波を標本化周期 $T_s = 0.1 \text{ ms}$ で標本化すると、図 (b) の標本値列を得る。標本値 $x(nT_s)$ を適当なビット数の 2 進数に変換する操



(a) アナログ信号 $x(t) = 5 \sin(2\pi 1000t - \pi/6)$



(b) 標本値列 $x(nT_s) = 5 \sin(\pi n/5 - \pi/6)$



(c) デジタル信号 $\hat{x}(nT_s)$

図 1.1 A-D変換

作を量子化 (quantization) または符号化 (coding) という。この値を $\hat{x}(nT_s)$ と書くことにすれば、量子化された標本値列 $\{\hat{x}(nT_s); n = \dots, -1, 0, 1, \dots\}$ をデジタル信号と呼んでいる。逆に、デジタル信号から標本値を求める操作を逆量子化と呼ぶ。図 (b) の標本値列を整数の **2** の補数表示 (two's complement representation) による 4 ビット 2 進数で量子化すると、図 1.1(c) のデジタル信号

$$\{1110\ 0001\ 0011\ 0101\ 0101\ 0011\ 1111\ 1101\ 1011\ 1110\ 1110\}$$

を得る。

有限語長の 2 進数で標本値を表現すると、元の標本値との間に違いが生じる。元の標本値と有限語長の 2 進数に変換されたデジタル量の差 $\varepsilon(nT_s) = x(nT_s) - \hat{x}(nT_s)$ は量子化誤差 (quantization error) と呼ばれ、实例として電話とコンパクトディスクの標本化周波数と量子化ビット数を表 1.1 を示す。

表 1.1 標本化周波数と量子化ビット数の例

	標本化周波数 f_s	信号の 周波数帯域	量子化 ビット数
電話	8 kHz	300 Hz ~ 3.4 kHz	8
コンパクトディスク	44.1 kHz	5 Hz ~ 20 kHz	16

本書では、標本値列を単に $x(nT_s)$ と表記することにし、離散時間信号 (discrete-time signal) と呼ぶことにする。デジタル信号についても同様に $\hat{x}(nT_s)$ と表記する。通常、標本化と量子化を合わせて **A-D 変換** (analog-to-digital conversion) と呼ぶ。A-D 変換と逆の操作が D-A 変換である。

1.2 標本化定理

1.2.1 標本化 (サンプリング)

図 1.2 に示した幅 a 、振幅 $1/a$ の単位面積の矩形波 $\delta_a(t)$ の極限

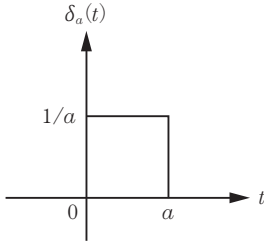


図 1.2 単位面積の矩形波 $\delta_a(t)$

$$\delta(t) = \lim_{a \rightarrow 0} \delta_a(t) \tag{1.2}$$

によって定義されるデルタ関数 (delta function) $\delta(t)$ を時間間隔 T_s で並べると単位パルス列 (unit pulse sequence)

$$p_{T_s}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT_s) \tag{1.3}$$

を得る。単位パルス列 $p_{T_s}(t)$ を用いると、図 1.3 のように、つぎの手順によってアナログ信号 $x(t)$ から T_s 秒ごとに標本値が得られる。

- 1) アナログ信号 $x(t)$ に単位パルス列 $p_{T_s}(t)$ を乗算して瞬間の振幅

$$\begin{aligned} x_s(t) &= x(t)p_{T_s}(t) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(t)\delta(t - nT_s) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_s)\delta(t - nT_s) \end{aligned} \tag{1.4}$$

を取り出す。

- 2) 瞬間の振幅 $x_s(t)$ を微小な時間区間 T_s で積分

$$x(nT_s) = \int_{nT_s}^{(n+1)T_s} x_s(\tau) d\tau \tag{1.5}$$

する。積分はホールド回路 (holder) によって実現される。

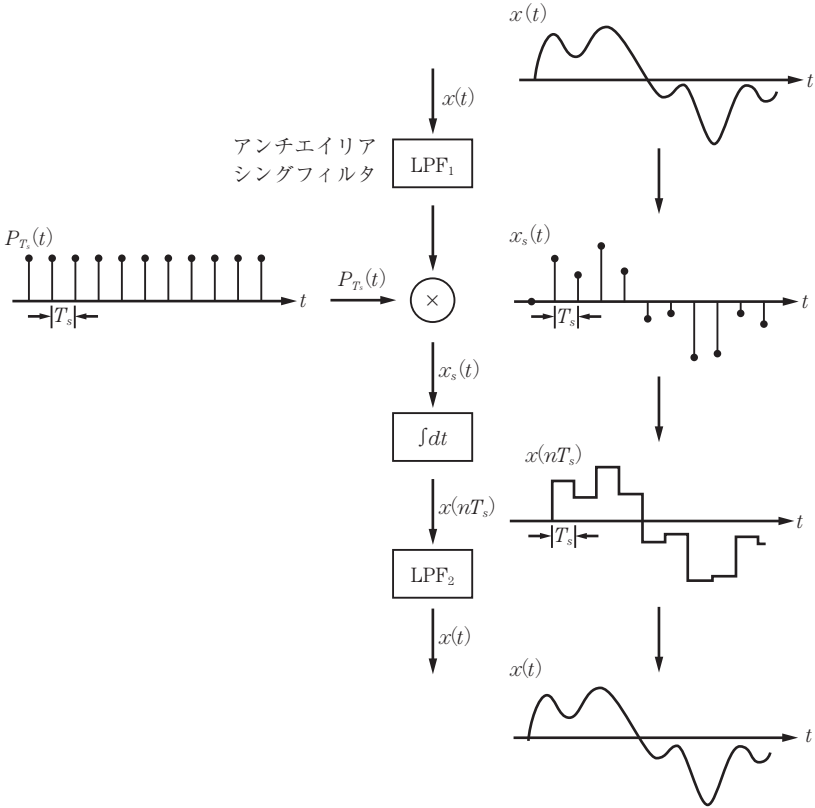


図 1.3 アナログ信号の標本化と復元

1.2.2 エイリアシング

振幅 1, 周波数 3 kHz, 7 kHz, 13 kHz の正弦波をそれぞれ標本化周期 $T_s = 0.1 \text{ ms}$ で標本化した標本値列を図 1.4 に示す。異なる周波数から得られる標本値列が等しく、標本値列から元の正弦波を一意に復元できないことがわかる。

標本化周波数 f_s を用いると、ナイキスト周波数 (Nyquist frequency) は

$$f_n = \frac{f_s}{2} \tag{1.6}$$

で定義され、 $x(nT_s)$ の周波数帯域の上限である。 $T_s = 0.1 \text{ ms}$ のとき、標本化周波数は $f_s = 10 \text{ kHz}$ 、ナイキスト周波数は $f_n = 5 \text{ kHz}$ になる。

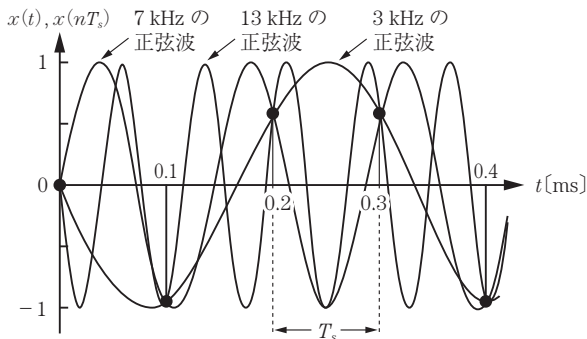


図 1.4 正弦波の標本化 ($T_s = 0.1\text{ms}$)

図 1.5 のように横軸 f_A に正弦波の周波数，縦軸 f_D に正弦波と標本化系列が一致する帯域 $0 \sim 5\text{kHz}$ の周波数をそれぞれ割り当てると， 7kHz ， 13kHz ， 17kHz ， \dots の正弦波は 3kHz の正弦波に等しいことがわかる。 f_n 以上の周波数 f_A の正弦波から得られた標本値列は， n を整数とすると

$$f_A = nf_s \pm f_D \quad (0 \leq f_D \leq f_n) \tag{1.7}$$

のように周波数帯域 $0 \sim f_n$ の周波数 f_D の正弦波から得られた標本値列と等しくなる。このような現象をエイリアシング (aliasing) という。元のアナログ信号を一意に復元するには，図 1.3 に示すように標本化の前に低域通過フィルタ (lowpass filter, LPF) LPF_1 を接続して f_n より高い周波数成分をアナログ信号 $x(t)$ から除去する必要がある。このフィルタをアンチエイリアシング

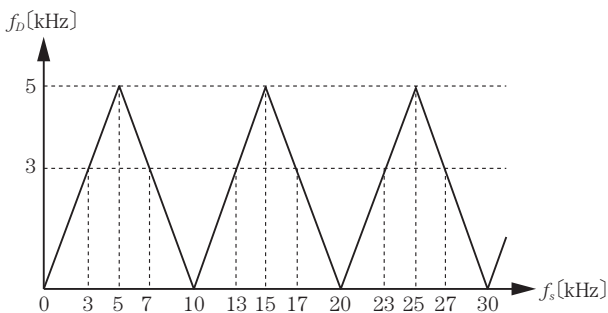


図 1.5 エイリアシング ($f_s = 10\text{kHz}$)

索引

	【あ】				
アナログ信号	1	減衰量表示	65	スペクトル漏れ	117
アンチエイリアシング フィルタ	6			【せ】	
安定条件	59	【こ】		正弦波	38
		高域通過フィルタ	68	遷移域	67
【い】		高速逆フーリエ変換	107	全域通過フィルタ	69
位相スペクトル	80	高速フーリエ変換	97	線形性	51
位相特性	64			【そ】	
因果性	20	【さ】		双曲線関数	131
インパルス応答	20	最大平坦特性	125	阻止域	67
インブレイス	104	差分方程式	19		
				【た】	
【え】		【し】		帯域阻止フィルタ	69
エイリアシング	6	時間間引き FFT		帯域通過フィルタ	68
		アルゴリズム	103	対称性	84
【お】		遮断周波数	67	第 k 次高調波周波数	80
折り返しひずみ	10	周期性	84	たたみ込み演算	37
		縦続形構成	169, 171	たたみ込み演算の z 変換	51
【か】		収束領域	49	単位インパルス関数	20
回転子	79	周波数特性	63	単位ステップ関数	34
加算器	18	周波数分解能	120	単位パルス列	4
過渡応答	36, 41	周波数変換	142		
		周波数間引き FFT		【ち】	
【き】		アルゴリズム	103	チェビシェフ多項式	131
基本周波数	80	巡回形フィルタ	27	チェビシェフ特性	131
逆フーリエ変換	7	循環推移	85	遅延器	18
逆 z 変換	53	循環たたみ込み	86	直接形構成	168, 170
極	58	乗算器	18	直線位相特性	154
		信号対雑音比	14	直交行列	81
【く】		振幅スペクトル	80	直交変換	81
群遅延特性	154	振幅特性	64		
				【つ】	
		【す】		通過域	67
		ステップ応答	34		

【て】	
低域通過フィルタ	6, 41, 68
デジタル信号	1
デジタル信号処理	14
定常応答	36, 43
デシベル	65
デルタ関数	4
伝達関数	56
【と】	
等リプル特性	134
【な】	
ナイキスト周波数	5
【に】	
2 の補数表示	3
【は】	
パーセバルの公式	85
バタフライ演算	103

バタワース特性	125
ハニング窓	117, 118
ハミング窓	117, 120, 165
【ひ】	
非巡回形フィルタ	30
ビット反転	105
標準形構成	168
標本化周期	1
標本化周波数	1
標本化定理	9
標本値列	1
【ふ】	
フーリエ変換	7
フェーザ表示	64
符号化	3
ブラックマン窓	117, 120
プリワーピング	145
【へ】	
並列形構成	169

【ほ】	
方形窓	86, 117
ホールド回路	4
【ま】	
窓関数	117, 165
窓関数法	165
【ら】	
ラプラス変換	128
【り】	
離散逆フーリエ変換	87
離散時間信号	3
離散フーリエ変換	79
利得表示	65
量子化	3
量子化誤差	3, 13
【れ】	
零 点	57

【A】	
A-D 変換	3
【D】	
DFT	79
DSP	14

【F】	
FFT	97
FFT アルゴリズム	103
【I】	
IDFT	87

【S】	
$s - z$ 変換	124
【Z】	
z 平面	48
z 変換	48

— 著者略歴 —

1985年 千葉工業大学工学部電気工学科卒業
1987年 東京農工大学大学院修士課程修了（電子工学専攻）
1990年 東京工業大学大学院博士課程修了（電子物理工学専攻）
工学博士
1990年 東京工科大学講師
1996年 東京工科大学助教授
2007年 東京工科大学准教授
現在に至る

C言語によるはじめて学ぶ信号処理

Introduction to Signal Processing with C Programming Language

© Kunio Oishi 2013

2013年4月15日 初版第1刷発行

★

検印省略

著者 おお いし くに お
大 石 邦 夫
発行者 株式会社 コロナ社
代表者 牛来真也
印刷所 三美印刷株式会社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社

CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-00847-0 (吉原) (製本:愛千製本所)

Printed in Japan



本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めておりません。

落丁・乱丁本はお取替えいたします