要点がわかる

電　磁　気　学

博士(工学)　石　井　　望　著

コロナ社

ま え が き

電磁気学は，電気系技術者にとって，その基礎となる科目と位置付けられる。しかしながら，その記述にベクトル解析などの数学が多用されるために，とかく敬遠されがちな科目である。このため，イメージ重視の教科書が数多く出版されている。物理的にどのような現象であるのかを理解するためには，まずイメージを描くことが重要であり，それが読者・学生の強い要望となっている。ところが，演習問題や現実の問題に直面すると，何も先に進めないのも事実である。教科書に記述されている内容を覚え，イメージを構築したつもりになったにもかかわらず，応用する際に必要となる手がかりを探せないようである。その手がかりを与えるのが，手段としての数学であると著者は考えている。式の導出の過程を系統的に丁寧に追うことにより，式の意味するところが理解できるようになる。演習を積み重ねることで，やがては自分で定式化ができるようになる。このため，本書では，あえて他の教科書より式を多用し，式で説明できる事柄は式を利用するという立場をとっている。

電磁気学には，数学と物理の橋渡しをするさまざまなテクニックが登場する。本書では，それらのテクニックを紹介し，式を独力でトレースできるように配慮している。さらに，与えられた手順どおりに計算を進めれば，多少計算が面倒かもしれないが，最終的に答えが出てくるようにも配慮している。特に，付録 C. に本書で利用する積分公式を載せたので，必要に応じて参照してほしい。また，手順や具体的な解答例だけではなく，それを一般化した結果も示してある。一般化することで，より高い視点から問題を考えることができ，つぎの展開を見通すことができるからである。

本書は，筆者が電磁気学の講義と演習を担当することになった 1999 年以来，講義終了後に実施してきた「Q&A の質問票」に寄せられた疑問，質問，感想を

基にまとめた講義ノートがベースとなっている。「過去のQ&Aから」は10年間にわたって蓄積したQ&Aデータの中から選んである。Q&Aデータの一部は本文にも取り込まれており，まさに本書は電磁気学を受講した学生との共同作業の成果といっても過言ではない。

紙面の都合で，勾配，発散，回転のベクトル微分演算子，線積分，面積分，体積分の扱い方，ガウスの発散定理，ストークスの定理などのベクトル解析に関して十分に記述できなかった。先に述べたように，ベクトル解析は電磁気学を記述するための数学的手段であり，その習得なしに電磁気学の理解を深めることは難しい。その意味で，電磁気学を学習する際には，ベクトル解析の教科書を一冊手元に置くことを勧めたい。本書と同じ趣旨で記述された教科書として，拙著「要点がわかるベクトル解析」（コロナ社）をあげておく。さらに，章末問題の解答についても巻末に略解を記載するにとどめた。解答例はコロナ社のホームページ http://www.coronasha.co.jp/ の本書関連ページからダウンロードできる。同ページから本書の書名をキーワード検索してほしい。

電磁気学は先生の数だけ教え方がある。学会でお会いする先生の言葉である。電磁気学の理論が確立してから1世紀以上経過したのにもかかわらず，その深遠さ故ということであろうか。ともあれ，著者の浅学非才により十分に記述できていないところが多々あると思われる。忌憚のないご意見やご批判をお寄せいただければ幸いである。

最後に，本書の執筆をお勧めいただいた新潟大学 山口芳雄教授に感謝申し上げます。また，執筆にあたり有益なご意見をいただいた新潟大学 山田寛喜教授に感謝申し上げます。本書の出版にあたって，お世話になったコロナ社に感謝の意を表します。誤字脱字のチェックなどに協力してくれた，研究室の大学院生，学部生に謝意を表します。

2009年3月

石井　望

目　　　次

1.　ベクトルと座標系

2.　クーロンの法則

3. ガウスの法則

4. 電　　　位

5. 導体・誘電体・静電容量

6. 電流と抵抗

7. 定常磁界

8.　電磁力・磁性体・インダクタンス

9.　時間変化する電磁界

10. 一様平面波の初歩

1 ベクトルと座標系

ベクトル量である電界および磁界を記述するためには，ベクトルならびに座標系に関する知識が必要である。本章では，ベクトルの内積および外積について復習するとともに，直角座標系，円筒座標系，球座標系について整理し，これらの座標系における線素・面素・体積素についてまとめる。

1.1 ベクトル

点電荷による電界はクーロンの法則で与えられる。高校の段階では，電界の大きさは数学的に記述されたが，その向きは言葉や図を使って表現されるにとどまっていた。本書では，電界を大きさと向きを合わせ持つベクトルとして数学的に扱う。すなわち，単位ベクトルをスカラー倍したり，ベクトルを成分表示したりする。

（1） **スカラーとベクトル**　長さ，質量，時間，温度，エネルギーなど，大きさを指定すれば決まる量を**スカラー**（scalar）という。これに対して，力，速度，加速度，電界，磁界など，大きさと向きを指定すれば決まる量を**ベクトル**（vector）といい，矢印付きの線分（有向線分）で表示する。

（2） **ベクトルの表記**　ベクトルは $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ のように太字で表記する。手書きの場合は，$\mathbb{A}$, $\mathbb{B}$, $\mathbb{C}$のように文字の一部を二重化して表記する。ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさは，絶対値記号を用いて $|\boldsymbol{A}|$ と表記する。また，混乱が生じない範囲で，A のように細字で表記しても構わない。

（3） **基本ベクトル**　直角座標系の場合，x, y, z 軸の正の方向を向いた大

きさ1のベクトルを**基本ベクトル**（base vector）といい，$\boldsymbol{a}_x, \boldsymbol{a}_y, \boldsymbol{a}_z$ で表す。

（4） ベクトルの成分表示　図**1.1**の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を表すベクトル $\boldsymbol{A}$ は

$$\boldsymbol{A} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{OR}} + \overrightarrow{\mathrm{OS}} = A_x \boldsymbol{a}_x + A_y \boldsymbol{a}_y + A_z \boldsymbol{a}_z \tag{1.1}$$

と表現できる。A_x, A_y, A_z をベクトル $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分という。ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさを成分 A_x, A_y, A_z で表すと

$$|\boldsymbol{A}| = \overline{\mathrm{OP}} = \sqrt{\overline{\mathrm{OQ}}^2 + \overline{\mathrm{OR}}^2 + \overline{\mathrm{OS}}^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \tag{1.2}$$

と与えられる。

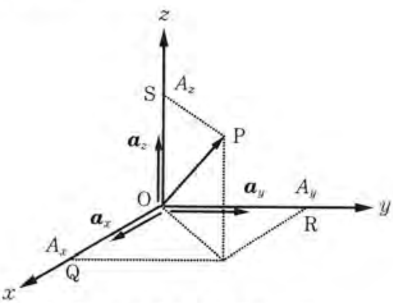

図**1.1**　ベクトルの成分表示

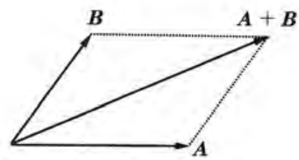

図**1.2**　ベクトルの和

（5） ベクトルの和　図的には，図**1.2**に示すように，平行四辺形の規則によって合成する。成分は，各成分を足し算することによって与えられる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} &= (A_x \boldsymbol{a}_x + A_y \boldsymbol{a}_y + A_z \boldsymbol{a}_z) + (B_x \boldsymbol{a}_x + B_y \boldsymbol{a}_y + B_z \boldsymbol{a}_z)\\ &= (A_x + B_x)\boldsymbol{a}_x + (A_y + B_y)\boldsymbol{a}_y + (A_z + B_z)\boldsymbol{a}_z\end{aligned} \tag{1.3}$$

（6） ベクトルのスカラー倍　図的には，図**1.3**に示すように，$k > 0$ のとき，大きさが $k|\boldsymbol{A}|$ で，$\boldsymbol{A}$ と同じ向きのベクトルとし，$k < 0$ のとき，大き

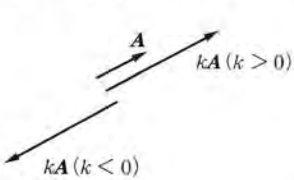

図**1.3**　ベクトルのスカラー倍

さが $|k||\boldsymbol{A}|$ で，$\boldsymbol{A}$ と反対向きのベクトルとする。成分は，各成分をスカラー倍することによって与えられる。

$$\begin{aligned} k\boldsymbol{A} &= k(A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z) \\ &= (kA_x)\boldsymbol{a}_x + (kA_y)\boldsymbol{a}_y + (kA_z)\boldsymbol{a}_z \end{aligned} \tag{1.4}$$

(7) **単位ベクトル**　大きさ 1 のベクトルを**単位ベクトル**（unit vector）という。向きは任意である。ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ向きの単位ベクトル $\boldsymbol{a}_A$ は

$$\boldsymbol{a}_A = \frac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|} \tag{1.5}$$

と与えられる。なお，基本ベクトルは座標軸の正の方向を向く単位ベクトルである。基本ベクトルと単位ベクトルを混用しないように注意されたい。

(8) **位置ベクトル**　点の位置を表すベクトルを**位置ベクトル**（position vector）という。**図 1.4** に示すように，点 $\mathrm{P}(x, y, z)$ の位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ は

$$\boldsymbol{r} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x\boldsymbol{a}_x + y\boldsymbol{a}_y + z\boldsymbol{a}_z \tag{1.6}$$

と与えられる。原点 O から点 P までの距離 r は $\boldsymbol{r}$ の大きさで与えられる。

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{1.7}$$

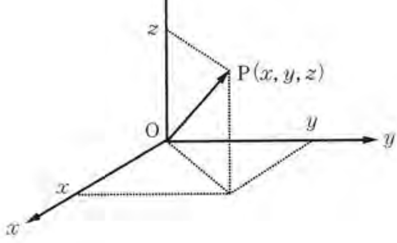

図 1.4　位置ベクトル

1.2 内積と外積

1.2.1 内　　　積

（1） 内積の定義　図 **1.5** に示すように，二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のはさむ角を θ とするとき，**内積**（dot product）をつぎのように定義する。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\theta \tag{1.8}$$

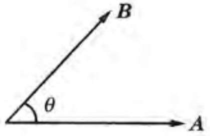

図 **1.5**　ベクトルの内積

（2） 内積の交換性　定義式 (1.8) からつぎの内積の交換性が成り立つ。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A} \tag{1.9}$$

（3） 基本ベクトル同士の内積　定義式 (1.8) から，基本ベクトル同士の内積は表 **1.1** のようにまとめられる。この表を利用すると，例えば，$\boldsymbol{a}_y\cdot$ の行と $\boldsymbol{a}_z$ の列が交わるセルから，$\boldsymbol{a}_y\cdot\boldsymbol{a}_z = 0$ となることがわかる。

表 **1.1**　直角座標系における基本ベクトル同士の内積

	$\boldsymbol{a}_x$	$\boldsymbol{a}_y$	$\boldsymbol{a}_z$
$\boldsymbol{a}_x\cdot$	1	0	0
$\boldsymbol{a}_y\cdot$	0	1	0
$\boldsymbol{a}_z\cdot$	0	0	1

（4） 内積の成分表示　基本ベクトル同士の内積の関係から，内積の成分表示は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z)\cdot(B_x\boldsymbol{a}_x + B_y\boldsymbol{a}_y + B_z\boldsymbol{a}_z)\\ &= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \end{aligned} \tag{1.10}$$

と与えられる。上式において $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}$ とおくと，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の大きさと内積の

関係が得られる。

$$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\boldsymbol{A}|^2 \tag{1.11}$$

（5）ベクトルの成分抽出　ベクトル $\boldsymbol{A}$ の単位ベクトル $\boldsymbol{a}_l$ の方向の成分 A_l は，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{a}_l$ の内積によって与えられる。**図 1.6** に示すように，$\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{a}_l$ のなす角を θ_l として

$$A_l = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_l = |\boldsymbol{A}||\boldsymbol{a}_l|\cos\theta_l = |\boldsymbol{A}|\cos\theta_l \tag{1.12}$$

の関係が成り立つ。ここで，$|\boldsymbol{a}_l| = 1$ であることを用いた。この関係を利用して，ベクトル $\boldsymbol{A}$ の x, y, z 成分への分解はつぎのように表現できる。

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A} &= A_x\boldsymbol{a}_x + A_y\boldsymbol{a}_y + A_z\boldsymbol{a}_z \\ &= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_x)\boldsymbol{a}_x + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_y)\boldsymbol{a}_y + (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{a}_z)\boldsymbol{a}_z\end{aligned} \tag{1.13}$$

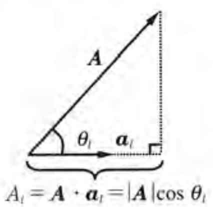

図 1.6　ベクトルの成分抽出

1.2.2 外　　積

（1）外積の定義　**図 1.7** に示すように，二つのベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ のはさむ角を θ とするとき，**外積**（cross product）をつぎのように定義する。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = (|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta)\boldsymbol{a}_n \tag{1.14}$$

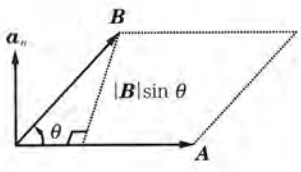

図 1.7　ベクトルの外積

索　　引

【す】

【せ】

【そ】

【た】

【ち】

【て】

【と】

【な】

【に】

【の】

【は】

【ひ】

【ふ】

【へ】

【ほ】

—— 著 者 略 歴 ——

1989年　北海道大学工学部電子工学科卒業
1991年　北海道大学大学院工学研究科修士課程修了（電子工学専攻）
1991年　北海道大学助手
1996年　博士（工学）（北海道大学）
1998年　新潟大学助教授
2007年　新潟大学准教授
　　　　現在に至る

要点がわかる電磁気学

Elementary Electromagnetism

2009 年 4 月 30 日　初版第 1 刷発行
2018 年 12 月 30 日　初版第 4 刷発行

検印省略

著　者　石（いし）　井（い）　望（のぞむ）
発行者　株式会社　コロナ社
　　　　代表者　牛来真也
印刷所　三美印刷株式会社
製本所　有限会社　愛千製本所

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話（03）3941–3131（代）
ホームページ　http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–00806–7　C3054　Printed in Japan　（岩崎）