

要点がわかる
電 磁 気 学

博士(工学) 石 井 望 著

コ ロ ナ 社

ま え が き

電磁気学は、電気系技術者にとって、その基礎となる科目と位置付けられる。しかしながら、その記述にベクトル解析などの数学が多用されるために、とかく敬遠されがちな科目である。このため、イメージ重視の教科書が数多く出版されている。物理的にどのような現象であるのかを理解するためには、まずイメージを描くことが重要であり、それが読者・学生の強い要望となっている。ところが、演習問題や現実の問題に直面すると、何も先に進めないのも事実である。教科書に記述されている内容を覚え、イメージを構築したつもりになっただけにもかかわらず、応用する際に必要となる手がかりを探せないようである。その手がかりを与えるのが、手段としての数学であると著者は考えている。式の導出の過程を系統的に丁寧に追うことにより、式の意味するところが理解できるようになる。演習を積み重ねることで、やがては自分で定式化ができるようになる。このため、本書では、あえて他の教科書より式を多用し、式で説明できる事柄は式を利用するという立場をとっている。

電磁気学には、数学と物理の橋渡しをするさまざまなテクニックが登場する。本書では、それらのテクニックを紹介し、式を独力でトレースできるように配慮している。さらに、与えられた手順どおりに計算を進めれば、多少計算が面倒かもしれないが、最終的に答えが出てくるようにも配慮している。特に、付録 C. に本書で利用する積分公式を載せたので、必要に応じて参照してほしい。また、手順や具体的な解答例だけではなく、それを一般化した結果も示してある。一般化することで、より高い視点から問題を考えることができ、つぎの展開を見通すことができるからである。

本書は、筆者が電磁気学の講義と演習を担当することになった 1999 年以來、講義終了後に実施してきた「Q&A の質問票」に寄せられた疑問、質問、感想を

基にまとめた講義ノートがベースとなっている。「過去の Q&A から」は 10 年間にわたって蓄積した Q&A データの中から選んである。Q&A データの一部は本文にも取り込まれており、まさに本書は電磁気学を受講した学生との共同作業の成果といっても過言ではない。

紙面の都合で、^{こう}勾配、発散、回転のベクトル微分演算子、線積分、面積分、体積分の扱い方、ガウスの発散定理、ストークスの定理などのベクトル解析に関して十分に記述できなかった。先に述べたように、ベクトル解析は電磁気学を記述するための数学的手段であり、その習得なしに電磁気学の理解を深めることは難しい。その意味で、電磁気学を学習する際には、ベクトル解析の教科書を一冊手元に置くことを勧めたい。本書と同じ趣旨で記述された教科書として、拙著「要点がわかるベクトル解析」(コロナ社)をあげておく。さらに、章末問題の解答についても巻末に略解を記載するにとどめた。解答例はコロナ社のホームページ <http://www.coronasha.co.jp/> の本書関連ページからダウンロードできる。同ページから本書の書名をキーワード検索してほしい。

電磁気学は先生の数だけ教え方がある。学会でお会いする先生の言葉である。電磁気学の理論が確立してから 1 世紀以上経過したのにもかかわらず、その深遠さ故ということであろうか。ともあれ、著者の浅学非才により十分に記述できていないところが多々あると思われる。忌憚のないご意見やご批判をお寄せいただければ幸いである。

最後に、本書の執筆をお勧めいただいた新潟大学 山口芳雄教授に感謝申し上げます。また、執筆にあたり有益なご意見をいただいた新潟大学 山田寛喜教授に感謝申し上げます。本書の出版にあたって、お世話になったコロナ社に感謝の意を表します。誤字脱字のチェックなどに協力してくれた、研究室の大学院生、学部生に謝意を表します。

2009 年 3 月

石井 望

目 次

1. ベクトルと座標系

1.1	ベクトル	1
1.2	内積と外積	4
1.2.1	内積	4
1.2.2	外積	5
1.3	代表的な座標系	7
1.3.1	円筒座標系 (ρ, ϕ, z)	8
1.3.2	球座標系 (r, θ, ϕ)	9
1.4	線素・面素・体積素	13
1.4.1	線素	13
1.4.2	面素	15
1.4.3	体積素	16
	章末問題	17

2. クーロンの法則

2.1	電荷分布	18
2.1.1	電荷の定義	18
2.1.2	電荷分布とその数学的表現	19
2.2	クーロンの法則	21
2.3	電荷分布と電界	24

2.3.1 点電荷による電界の定義	24
2.3.2 連続的な電荷分布による電界	25
2.3.3 代表的な電荷分布による電界	27
章 末 問 題	34

3. ガウスの法則

3.1 電 束	35
3.2 ガウスの法則	37
3.3 ガウスの法則の適用	39
3.4 発散とガウスの発散定理	45
3.4.1 発 散	45
3.4.2 ガウスの発散定理	47
章 末 問 題	49

4. 電 位

4.1 電荷移動による仕事	51
4.2 電位差と電位	54
4.2.1 電 位 差	54
4.2.2 電 位	55
4.3 電位の重ね合わせ	58
4.3.1 点電荷による電位	58
4.3.2 連続的な電荷分布による電位	59
4.4 電位の勾配	63
4.5 ポアソンの方程式	69
章 末 問 題	70

5. 導体・誘電体・静電容量

5.1 導体の性質	72
5.2 境界条件：自由空間と導体の境界における電界	77
5.3 電気映像法	79
5.4 誘電体の性質	82
5.5 誘電体内部における電界	83
5.6 境界条件：誘電体境界における電界	85
5.7 静電容量	86
5.8 電氣的蓄積エネルギー	92
5.9 仮想変位と電界の及ぼす力	95
章末問題	96

6. 電流と抵抗

6.1 電流と電流密度	99
6.2 電流の連続性	101
6.3 オームの法則の微分形	103
章末問題	106

7. 定常磁界

7.1 ビオ・サバールの法則	107
7.1.1 アンペアの右ねじの法則	107
7.1.2 電流分布とその数学的表現	108
7.1.3 ビオ・サバールの法則とその数学的表現	109

7.1.4	ビオ・サバルの法則の積分形	111
7.2	アンペアの周回路の法則	116
7.2.1	鎖 交	116
7.2.2	アンペアの周回路の法則の導出	117
7.2.3	アンペアの周回路の法則の適用	118
7.3	回転とストークスの定理	125
7.3.1	回 転	125
7.3.2	ストークスの定理	128
7.4	磁界に関するガウスの法則	130
7.5	ベクトルポテンシャル	132
	章 末 問 題	135

8. 電磁力・磁性体・インダクタンス

8.1	運動電荷に作用する力	137
8.2	電流素片に作用する力	139
8.3	一様磁界中におけるループに作用する力とトルク	145
8.4	磁性体の性質	148
8.5	磁性体内部における磁界	151
8.6	境界条件：磁性体境界における磁界	153
8.7	インダクタンス	155
	章 末 問 題	160

9. 時間変化する電磁界

9.1	電磁誘導の法則	162
9.2	磁氣的蓄積エネルギー	168

9.3 仮想変位と磁界の及ぼす力	172
9.4 変位電流	174
9.5 マクスウェルの方程式	178
9.6 ポインティングベクトル	181
章末問題	182

10. 一様平面波の初歩

10.1 フェーザ表示と一様平面波	184
10.2 損失媒質中における一様平面波	190
章末問題	196

付 録	198
-----------	-----

A. ヘルムホルツの輸送定理	198
----------------------	-----

B. ベクトル公式	200
-----------------	-----

C. 積分公式	202
---------------	-----

参 考 文 献	203
---------------	-----

章末問題略解	204
--------------	-----

索 引	208
-----------	-----

ベクトルと座標系

ベクトル量である電界および磁界を記述するためには、ベクトルならびに座標系に関する知識が必要である。本章では、ベクトルの内積および外積について復習するとともに、直角座標系、円筒座標系、球座標系について整理し、これらの座標系における線素・面素・体積素についてまとめる。

1.1 ベクトル

点電荷による電界はクーロンの法則で与えられる。高校の段階では、電界の大きさは数学的に記述されたが、その向きは言葉や図を使って表現されるにとどまっていた。本書では、電界を大きさと向きを合わせ持つベクトルとして数学的に扱う。すなわち、単位ベクトルをスカラー倍したり、ベクトルを成分表示したりする。

(1) スカラーとベクトル 長さ、質量、時間、温度、エネルギーなど、大きさを指定すれば決まる量をスカラー (scalar) という。これに対して、力、速度、加速度、電界、磁界など、大きさと向きを指定すれば決まる量をベクトル (vector) といい、矢印付きの線分 (有向線分) で表示する。

(2) ベクトルの表記 ベクトルは $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ のように太字で表記する。手書きの場合は、 A, B, C のように文字の一部を二重化して表記する。ベクトル \mathbf{A} の大きさは、絶対値記号を用いて $|\mathbf{A}|$ と表記する。また、混乱が生じない範囲で、 A のように細字で表記しても構わない。

(3) 基本ベクトル 直角座標系の場合、 x, y, z 軸の正の方向を向いた大

2 1. ベクトルと座標系

長さ 1 のベクトルを基本ベクトル (base vector) といい, $\mathbf{a}_x, \mathbf{a}_y, \mathbf{a}_z$ で表す。

(4) ベクトルの成分表示 図 1.1 の \overrightarrow{OP} を表すベクトル \mathbf{A} は

$$\mathbf{A} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ} + \overrightarrow{OR} + \overrightarrow{OS} = A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \quad (1.1)$$

と表現できる。 A_x, A_y, A_z をベクトル \mathbf{A} の x, y, z 成分という。ベクトル \mathbf{A} の大きさを成分 A_x, A_y, A_z で表すと

$$|\mathbf{A}| = \overline{OP} = \sqrt{\overline{OQ}^2 + \overline{OR}^2 + \overline{OS}^2} = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (1.2)$$

と与えられる。

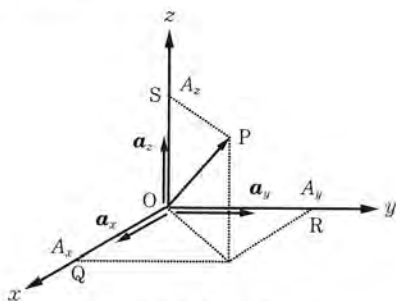


図 1.1 ベクトルの成分表示

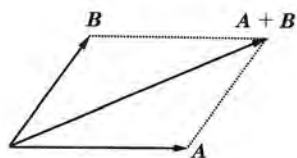


図 1.2 ベクトルの和

(5) ベクトルの和 図的には, 図 1.2 に示すように, 平行四辺形の規則によって合成する。成分は, 各成分を足し算することによって与えられる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} + \mathbf{B} &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) + (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= (A_x + B_x) \mathbf{a}_x + (A_y + B_y) \mathbf{a}_y + (A_z + B_z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.3)$$

(6) ベクトルのスカラー倍 図的には, 図 1.3 に示すように, $k > 0$ のとき, 大きさが $k|\mathbf{A}|$ で, \mathbf{A} と同じ向き of ベクトルとし, $k < 0$ のとき, 大き

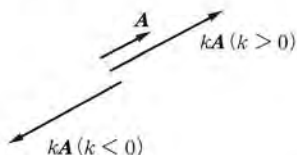


図 1.3 ベクトルのスカラー倍

さが $|k||\mathbf{A}|$ で、 \mathbf{A} と反対向きのベクトルとする。成分は、各成分をスカラー倍することによって与えられる。

$$\begin{aligned} k\mathbf{A} &= k(A_x\mathbf{a}_x + A_y\mathbf{a}_y + A_z\mathbf{a}_z) \\ &= (kA_x)\mathbf{a}_x + (kA_y)\mathbf{a}_y + (kA_z)\mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.4)$$

(7) 単位ベクトル 大きさを1のベクトルを単位ベクトル (unit vector) という。向きは任意である。ベクトル \mathbf{A} と同じ向きの単位ベクトル \mathbf{a}_A は

$$\mathbf{a}_A = \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \quad (1.5)$$

と与えられる。なお、基本ベクトルは座標軸の正の方向を向く単位ベクトルである。基本ベクトルと単位ベクトルを混用しないように注意されたい。

(8) 位置ベクトル 点の位置を表すベクトルを位置ベクトル (position vector) という。図 1.4 に示すように、点 $P(x, y, z)$ の位置ベクトル \mathbf{r} は

$$\mathbf{r} = \overrightarrow{OP} = x\mathbf{a}_x + y\mathbf{a}_y + z\mathbf{a}_z \quad (1.6)$$

と与えられる。原点 O から点 P までの距離 r は \mathbf{r} の大きさと与えられる。

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (1.7)$$

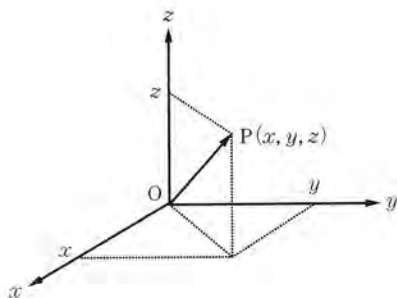


図 1.4 位置ベクトル

1.2 内積と外積

1.2.1 内積

(1) 内積の定義 図 1.5 に示すように、二つのベクトル A と B のはさむ角を θ とするとき、内積 (dot product) をつぎのように定義する。

$$A \cdot B = |A||B| \cos \theta \quad (1.8)$$

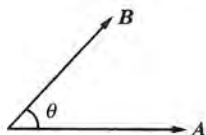


図 1.5 ベクトルの内積

(2) 内積の交換性 定義式 (1.8) からつぎの内積の交換性が成り立つ。

$$A \cdot B = B \cdot A \quad (1.9)$$

(3) 基本ベクトル同士の内積 定義式 (1.8) から、基本ベクトル同士の内積は表 1.1 のようにまとめられる。この表を利用すると、例えば、 $\mathbf{a}_y \cdot$ の行と \mathbf{a}_z の列が交わるセルから、 $\mathbf{a}_y \cdot \mathbf{a}_z = 0$ となることがわかる。

表 1.1 直角座標系における
基本ベクトル同士の内積

	\mathbf{a}_x	\mathbf{a}_y	\mathbf{a}_z
$\mathbf{a}_x \cdot$	1	0	0
$\mathbf{a}_y \cdot$	0	1	0
$\mathbf{a}_z \cdot$	0	0	1

(4) 内積の成分表示 基本ベクトル同士の内積の関係から、内積の成分表示は

$$\begin{aligned} A \cdot B &= (A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z) \cdot (B_x \mathbf{a}_x + B_y \mathbf{a}_y + B_z \mathbf{a}_z) \\ &= A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z \end{aligned} \quad (1.10)$$

と与えられる。上式において $B = A$ とおくと、ベクトル A の大きさと内積の

関係が得られる。

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} = A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 = |\mathbf{A}|^2 \quad (1.11)$$

(5) ベクトルの成分抽出 ベクトル \mathbf{A} の単位ベクトル \mathbf{a}_l の方向の成分 A_l は、 \mathbf{A} と \mathbf{a}_l の内積によって与えられる。図 1.6 に示すように、 \mathbf{A} と \mathbf{a}_l のなす角を θ_l として

$$A_l = \mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_l = |\mathbf{A}| |\mathbf{a}_l| \cos \theta_l = |\mathbf{A}| \cos \theta_l \quad (1.12)$$

の関係が成り立つ。ここで、 $|\mathbf{a}_l| = 1$ であることを用いた。この関係を利用して、ベクトル \mathbf{A} の x, y, z 成分への分解はつぎのように表現できる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= A_x \mathbf{a}_x + A_y \mathbf{a}_y + A_z \mathbf{a}_z \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_x) \mathbf{a}_x + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_y) \mathbf{a}_y + (\mathbf{A} \cdot \mathbf{a}_z) \mathbf{a}_z \end{aligned} \quad (1.13)$$

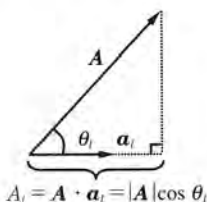


図 1.6 ベクトルの成分抽出

1.2.2 外積

(1) 外積の定義 図 1.7 に示すように、二つのベクトル \mathbf{A} と \mathbf{B} のはさむ角を θ とするとき、外積 (cross product) をつぎのように定義する。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (|\mathbf{A}| |\mathbf{B}| \sin \theta) \mathbf{a}_n \quad (1.14)$$

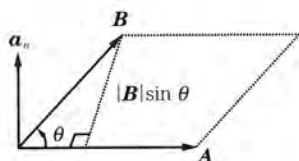


図 1.7 ベクトルの外積

索 引

【あ】

アンペアの周回路の法則
 117, 151
 —の微分形 128

アンペアの右ねじの法則 108

アンペア・マクスウェルの
 法則 175

【い】

位相速度 192

位相定数 191

位置ベクトル 3

一様な電荷分布 21

一様平面波 188

イメージ法 79

印加電流密度 179

インダクタンス 155

【え】

影像電荷 79

エネルギー密度
 磁界の— 170
 静電界の— 94

エルステッド 107

円筒座標系 8

【お】

オームの法則 104
 —の微分形 104

【か】

外 積 5
 —の成分表示 6
 —の反交換性 6

回 転 126

ガウスの発散定理 48

ガウスの法則 39, 83
 磁界に関する— 131
 —の微分形 47

重ね合わせの原理(線形性) 23
 (磁界に関する)— 111

電位に関する— 59
 (電界に関する)— 25

仮想仕事の原理 95, 172

仮想変位 95, 172

緩和時間 105

【き】

奇関数 28

基本ベクトル 2, 8

キャパシタ 86

球座標系 9

境界条件 77, 85, 153, 180

極座標変換 32

キルヒホッフ
 —の電圧則 102
 —の電流則 102

【く】

偶関数 28

偶力モーメント 145

クーロン
 —の定理 75, 77
 —の法則 22

クーロンゲージ 134

【け】

減衰定数 191

【こ】

構成関係 178

勾 配 63

固有インピーダンス 193

コンデンサ 86

【さ】

鎖 交 116

鎖交磁束 156

作用・反作用の法則 142
 (電界の)— 22

【し】

磁 化 150

磁 界 107

磁化率 152

時間平均ポインティング
 ベクトル 185

磁気遮蔽効果 121

磁氣的蓄積エネルギー 168

磁気モーメント 147

仕 事 51, 106

自己インダクタンス 157

自己誘導 168

磁性体 149

磁 束 130

磁束密度 130

遮蔽効果 43

自由空間 18

自由電荷 73

ジュールの法則 106

磁力線 107

【す】

スカラー 1
スカラー三重積 6
ストークスの定理 128

【せ】

静的 18
静電界 18, 73
静電遮蔽 76
静電誘導 73
静電容量 86
絶縁体 72, 82
接地 55
線積分 52
線素 13
線電荷分布 20
線電荷密度 20
線電流分布 108

【そ】

双極子モーメント 65, 82
相互インダクタンス 157
相互誘導 168
束縛電荷 82
束縛電流 151
ソレノイド 114

【た】

体積素 16
体積電荷分布 20
体積電荷密度 20
体積電流分布 109
単位ベクトル 3

【ち】

遅波効果 193
直角座標系 7

【て】

抵抗 104
定常電流 102
デカルト座標系 7

電位 55
——の基準 55
電位差 54
電荷 19
電界 24
電荷分布 19
電荷保存則 101
電気映像法 79
電気双極子 65
電氣的蓄積エネルギー 93
電気分極率 84
電気力線 36
電束 36
電束密度 36
点電荷 20
点電荷分布 20
伝搬定数 190
電流 99
電流素片 109, 110
電流分布 108
電流密度 99
電力 106
電力密度 182

【と】

同軸ケーブル 42, 94, 98, 119, 130, 171, 182
透磁率 130, 152
導体 72
等電位面 56
導電電流 101
導電率 104
トルク 145
トロイダルコイル 123, 158, 161

【な】

内積 4
——の交換性 4
——の成分表示 4

【に】

二重積分の変数変換公式 32

【の】

ノイマンの公式 157

【は】

波数 187
波数ベクトル 187
波長 192
波長短縮効果 193
発散 46
波動インピーダンス 192

【ひ】

ビオ・サバールの法則 110
比透磁率 152
比誘電率 84
表皮厚 194
表皮効果 195

【ふ】

ファラデーの電磁誘導の法則 162
フェーザ表示 184
複素ポインティングベクトル 186
フレミングの左手の法則 140
分極 82

【へ】

平行平板コンデンサ 87
ベクトル 1
ベクトル三重積 7
ベクトルヘルムホルツ方程式 187, 190
ベクトルポテンシャル 133
ヘルムホルツコイル 136
ヘルムホルツの輸送定理 163, 198

変位電流 175
変位電流密度 175

【ほ】

ポアソンの方程式 69

ポインティング定理 181
 ポインティングベクトル 182
 ホール効果 138

【ま】

マクスウェル
 —の回転方程式 178
 —の方程式 178

【め】

面積ベクトル 147
 面素 15
 面電荷分布 20
 面電荷密度 20

面電流分布
 面電流密度

【や】

ヤコビアン

【ゆ】

誘電体
 誘電分極
 誘電率
 自由空間の——
 誘導電荷

108

109

【ら】

ラプラシアン 69
 ラプラスの方程式 70

32

【り】

立体角 37

82

82

84

22

73

【れ】

連続の式 102
 レンツの法則 162

【ろ】

ローレンツ力 137

— 著者略歴 —

1989年 北海道大学工学部電子工学科卒業
1991年 北海道大学大学院工学研究科修士課程修了(電子工学専攻)
1991年 北海道大学助手
1996年 博士(工学)(北海道大学)
1998年 新潟大学助教授
2007年 新潟大学准教授
現在に至る

要点がわかる電磁気学

Elementary Electromagnetism

© Nozomu Ishii 2009

2009年4月30日 初版第1刷発行

2018年12月30日 初版第4刷発行

検印省略

著者	いし い のぞむ 石 井 望
発行者	株式会社 コロナ社 代表者 牛来真也
印刷所	三美印刷株式会社
製本所	有限会社 愛千製本所

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

発行所 株式会社 コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.

Tokyo Japan

振替 00140-8-14844・電話(03)3941-3131(代)

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 978-4-339-00806-7 C3054 Printed in Japan

(岩崎)



JCOPY <出版者著作権管理機構 委託出版物>

本書の無断複製は著作権法上での例外を除き禁じられています。複製される場合は、そのつど事前に、出版者著作権管理機構(電話 03-5244-5088, FAX 03-5244-5089, e-mail: info@jcopy.or.jp)の許諾を得てください。

本書のコピー、スキャン、デジタル化等の無断複製・転載は著作権法上での例外を除き禁じられています。購入者以外の第三者による本書の電子データ化及び電子書籍化は、いかなる場合も認めていません。落丁・乱丁はお取替えいたします。