はしがき

現代の科学・技術の発展のかなりが，コンピュータ技術およびその利用技術の発展と一体となって進んでいることに思い及べば，科学を学び，技術に携わる学生諸君にとっては，「数値解析」がもはや最も基礎的な必修科目になっていることに疑問をいだく人はいないであろう．本書は，そのような意味で大阪大学基礎工学部の4年次の機械・制御・情報・生物工学等の学科のカリキュラムに組み込まれた「数値解析」を，著者が数年来講義してきた講義録に基づいて書き下ろしたものである．講義では，数値解析の数学的教義を教えることよりも，自然科学や工学の問題をコンピュータで数値解析するための基本的技法を体系的に教えることに重点をおいた．書物にする際には，個々の数値技法を〖算法〗の形式でまとめるとともに，算法の有効性やその導出の基礎となる性質を〖定理〗の形式でまとめ，基本的なものには証明を与えた．ただし，いたずらに技法を羅列することは避け，互いに関連する算法はそれらが導かれる統一的な原理のもとに位置づけ，配列し，思想の一貫性にも注意を払った．たとえば，「繰返し法」のいろいろな技法は縮小写像の中で位置づけた．

本書で記述した技法のほとんどは，ぜい肉を取り，鍛えぬかれた，そしてある意味で評価の定まったアルゴリズムであり，有用性ばかりでなく，その中に形式美すら見てとることができるものである．科学・技術を志す学生諸君には，できあいのプログラムルーチンを単に利用するだけでなく，本質を理解した〖算法〗をみずからプログラムに組むことによって，計算機利用の技術を自分のものにするよう努力されることを望む．

著者は大学卒業後すぐにコンピュータの開発に従事したが，当時(昭和34～36年ごろ)，数値解析の適切な邦書が少なく，プログラム開発は手さぐりの有様であった．その後，他の分野に転じたが，最近になってディジタル信号処理

のアルゴリズムに興味をもつうち，数値解析に邂逅することとなり，この間の発展に瞠目している．勿論，いくつかの立派な入門書，専門書も発行されているが，その中に混じってあえて本書を刊行するのは，工学の側から生まれ，育まれた数値技法（たとえば，FFT，Levinson のアルゴリズム，擬似乱数，モンテカルロ法，有限要素法）を紹介し，従来の数値解析の体系との関連を明らかにすることの意義を見出したがためである．たとえば，本書の第6章はそのために設けたものである．なお，後編は，数値微分，数値積分，微分方程式と偏微分方程式の解法，有限要素法，技術計算の方法(2)，(3)に言及する予定である．

この本を書くことになったきっかけは，現筑波大学吉沢能政教授から「数値解析」の講義を引き継いだときまでさかのぼる．そのとき，有益な意見を賜わった吉沢教授，原稿作成の際いろいろと議論していただいた大阪大学門田良実助教授，そして，本書の刊行に際してお世話下さったコロナ社中俣寛氏，山口陽氏に感謝する次第である．

昭和56年3月

著者

目　　次

1 基礎事項

2 線形方程式の解法と逆行列

3　非線形方程式の解法

4 固有値と固有ベクトル

5 関数近似と補間法

6 技術計算の方法(1)

1

基 礎 事 項

本論で必要になる数値解析の基礎事項をまとめておく．ディジタル計算機では，数値は有限なけた数の浮動小数点で表示されるのが普通だが，その基礎的な取扱いを述べ，また，ベクトルと行列のノルムの定義とその性質をまとめる．次いで，誤差解析でしばしば用いられる微積分学における平均値の定理やテイラーの定理を述べ，最後に，繰返し計算法の本質が距離空間における縮小写像にあることを述べた後，不動点定理を一般的な形で証明しておく．

1.1 浮動小数点法

1.1.1 浮動小数点表示

計算機内部における数値の表示は2進方式であるが，我々が実際に扱う数値は10進数で表されるのが普通である．したがって，10進数は計算機に入力されるとき2進数に変換され，そのとき，丸めや打切りの誤差が生ずる．本書では，基本的には数値を**10進法**に基づいて表示するが，2進表示でも同様な議論が展開できることに注意しておく．

数の表示には，**固定小数点**（fixed-point）と**浮動小数点**（floating-point）の二つの方式がある．固定小数点で表される数xは，普通，

$$-1<x<1 \tag{1.1}$$

の範囲に限られる．したがって，固定小数点法で四則演算を行うときは，**スケ**

ーリング（scaling）につねに注意を払わなければならない．

浮動小数点では，取り扱える数の範囲はずっと広がり，スケーリングの煩わしさは解消される．浮動小数点法では，数値 a を次のように10進表示する．

$$a = \pm 10^q(.d_1d_2\cdots) \tag{1.2}$$

ここに q は整数，$d_1, d_2, \cdots$，は0から9までの数値をとれるが，特に $d_1 \neq 0$ とする．計算機内部では，有限けた数のために，

$$\mathrm{fl}(a) = \pm 10^q(.\delta_1\delta_2\cdots\delta_t), \quad \delta_1 \neq 0 \tag{1.3}$$

と表されたとする．ここに，q は a の**指数部**（exponent），$.\delta_1\delta_2\cdots\delta_t$ を**仮数部**（mantissa）という．

指数部の表示は，一般に，

$$-N_1 \leqq q \leqq N_2 \tag{1.4}$$

と制限される．計算途中である数 a を表すとき，$q > N_2$ となれば**オーバーフロー**（overflow），$q < -N$ となれば**アンダーフロー**（underflow）が起こったという．本書では，特に断らないかぎり，こういうことが起こらないように配慮されていると仮定する．式 (1.2) の数値 a を式 (1.3) で表示するとき，仮数部のけた数 t の有限性から，$a \neq \mathrm{fl}(a)$ となることがある．そのとき，

$$\delta_j = d_j, \quad j = 1, 2, \cdots, t \tag{1.5}$$

とする方法を**打切り**（chopping）といい，10進数と見て，

$$\delta_1\delta_2\cdots\delta_t = [d_1d_2\cdots d_t.d_{t+1} + 0.5]^+ \tag{1.6}$$

とすることを**丸める**（rounding），あるいは，**四捨五入**するという．ここに $[x]^+$ は x の整数部を表す．

1.1.2 四則演算の誤差

打ち切るかあるいは丸めるかして，数 a を t けたの浮動小数点で表示したとき，差

$$e = \mathrm{fl}(a) - a \tag{1.7}$$

を**打切り誤差**，あるいは，**丸め誤差**という．これらの誤差の限界は次のように与えられる．

〔定理 *1.1*〕

$$|\mathrm{fl}(a)-a| \leqq 5|a|10^{-t}p \tag{1.8}$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned} p=1:&\quad \text{丸めのとき} \\ p=2:&\quad \text{打切りのとき} \end{aligned}\right\} \tag{1.9}$$

$\boxed{\text{証明}}$ 式 (*1.2*) と式 (*1.3*) を比較すれば, 打切りのとき,

$$\begin{aligned} |\mathrm{fl}(a)-a| &= 10^{q-t}(.\,d_{t+1}d_{t+2}\cdots) \\ &= 10^{-t}\frac{(.\,d_{t+1}d_{t+2}\cdots)}{(.\,d_1d_2\cdots)}|a| \end{aligned}$$

となる. ここで, $0.\,d_{t+1}d_{t+2}\cdots \leqq 1$, $0.\,d_1d_2\cdots \geqq 0.1$ となることに注意すれば, 上の式は

$$|\mathrm{fl}(a)-a| \leqq 10^{1-t}|a| = 5|a|10^{-t}p$$

となり, 式 (*1.8*) が証明された. 丸めのときは,

$$\begin{aligned} |\mathrm{fl}(a)-a| &\leqq \frac{1}{2}10^{q-t} = \frac{1}{2}10^{q-t}\frac{|a|}{|a|} \\ &\leqq 5|a|10^{-t} \leqq 5|a|10^{-t}p \end{aligned}$$

となり, 同じく式 (*1.8*) が証明された.　$\boxed{\text{証明終}}$

この結果から, 四則演算に関する打切り誤差あるいは丸め誤差が, 次のように表されることがすぐわかる. ただし, $|\phi|<10$ あるいは $|\phi|<5$ である.

〔定理 *1.2*〕

$$\mathrm{fl}(a \pm b) = (a \pm b)(1+\phi\,10^{-t}) \tag{1.10 a}$$

$$\mathrm{fl}(ab) = ab(1+\phi\,10^{-t}) \tag{1.10 b}$$

$$\mathrm{fl}\left(\frac{a}{b}\right) = \frac{a}{b}(1+\phi\,10^{-t}) \tag{1.10 c}$$

1.1.3 倍長精度の方法

計算機内部における数の表示で, 仮数部を t けたで表すのが標準とされても, 精度の高い計算が要求され, t けたよりもっと長いけた数を必要とするときもある. ある計算機では, 標準の 2 倍のけた数で四則演算を行える命令機構をハードウェアとしてもつが, そうでない計算機では, けた数が $2t$ の四則演算をプログラミングで組み込む必要がある. いずれにしても, 標準のけた数よりも 2 倍のけた数で演算することを**倍長精度の演算** (double-precision arithmetic) という. ある場合には, 3 倍精度の演算を必要とすることがある.

1.2　ベクトルと行列

1.2.1　ベクトルのノルム

本書では，n 次元ベクトルを縦ベクトル形式で

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.11}$$

と表す．各座標 x_i がすべて実数のとき，$\boldsymbol{x}$ は実ベクトルといい，$\boldsymbol{x}\in R^n$ と書く．$\boldsymbol{x}$ が複素数から成るときは，複素ベクトルといい，$\boldsymbol{x}\in C^n$ と書く．ベクトルの**ユークリッドノルム**（Euclidean norm）を，$\boldsymbol{x}\in R^n$ のとき，

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x})^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n} x_i{}^2\right)^{1/2} \tag{1.12}$$

$x\in C^n$ のとき，

$$\|\boldsymbol{x}\|_2=(\boldsymbol{x}^*\boldsymbol{x})^{1/2}=\left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2\right)^{1/2} \tag{1.13}$$

と定義する．ここに，記号 T はベクトルや行列の**転置**（transpose）を表し，記号 * は転置と複素共役を同時にとることを表す．すなわち，

$$\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}=(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n),\quad \boldsymbol{x}^*=(\bar{x}_1,\ \bar{x}_2,\ \cdots,\ \bar{x}_n)$$

であり，$\bar{x}$ は x の共役複素数を表す．

一般に，$\boldsymbol{x}\in R^n$ あるいは $\boldsymbol{x}\in C^n$ に対して，条件

A_1）$\|\boldsymbol{x}\|\geqq 0$．　等号が成立するのは $\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ のときのみである．

A_2）スカラ α に対して，

$$\|\alpha\boldsymbol{x}\|=|\alpha|\cdot\|\boldsymbol{x}\| \tag{1.14}$$

A_3）$\|\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\|\leqq\|\boldsymbol{x}\|+\|\boldsymbol{y}\|$ 　(1.15)

を満足する R^n（あるいは C^n）$\to R^1$ の写像 $\|\boldsymbol{x}\|$ を $\boldsymbol{x}$ の**ノルム**（norm）という．ユークリッドノルムは明らかにこの三つの条件を満足している．なお，A_3）を**三角不等式**という．

本書では，ユークリッドノルムのほか，次のものも用いる．

i） $\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i|$ (1.16)

ii） $\|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{i=1,2,\cdots,n}|x_i|$ (1.17)

iii） $\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}$，ただし，$p\geqq 1$ (1.18)

これらのノルムはすべて，上記の公理系 A_1)～A_3) を満足している．逆に，条件 A_1)～A_3) を満足するノルム $\|\boldsymbol{x}\|=N(\boldsymbol{x})$ があったとき，それが満足すべきいくつかの性質があるが，その中で基本的なものをまとめておく．

〔**定理 *1.3***〕 任意のベクトルノルム $\|\boldsymbol{x}\|=N(\boldsymbol{x})$ は $x_1, x_2, \cdots, x_n$ の連続関数である．

証明 $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{\delta}=(\delta_1,\delta_2,\cdots,\delta_n)^{\mathrm{T}}$ を任意の n 次元ベクトルとすれば，条件 A_3) から

$$N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta})\leqq N(\boldsymbol{x})+N(\boldsymbol{\delta})$$

である．これより

$$N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta})-N(\boldsymbol{x})\leqq N(\boldsymbol{\delta}) \quad (1.19)$$

となる．他方，A_2) と A_3) から，

$$N(\boldsymbol{x})=N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta}-\boldsymbol{\delta})\leqq N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta})+N(\boldsymbol{\delta})$$

となり，これより

$$N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta})-N(\boldsymbol{x})\geqq -N(\boldsymbol{\delta}) \quad (1.20)$$

となる．式 (1.19) と式 (1.20) を合わせると，

$$|N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta})-N(\boldsymbol{x})|\leqq N(\boldsymbol{\delta}) \quad (1.21)$$

となる．ここで，第 k 座標が 1 で他の座標は 0 である単位ベクトルを $\boldsymbol{e}_k$ で表すと，一般に，

$$\boldsymbol{\delta}=\sum_{k=1}^{n}\delta_k\boldsymbol{e}_k$$

と展開できる．したがって，A_2) と A_3) より

$$N(\boldsymbol{\delta})\leqq\sum_{k=1}^{n}N(\delta_k\boldsymbol{e}_k)\leqq\sum_{k=1}^{n}|\delta_k|\cdot N(\boldsymbol{e}_k)$$

$$\leqq\max_k|\delta_k|\cdot\sum_{i=1}^{n}N(\boldsymbol{e}_i)=M\cdot\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty \quad (1.22)$$

と表される．ここで，

$$M=\sum_{i=1}^{n}N(\boldsymbol{e}_i)$$

とおいた．式 (1.21) と式 (1.22) より，任意に与えられた $\varepsilon>0$ に対し，$\|\boldsymbol{\delta}\|_\infty\leqq\varepsilon/M$ となるようなすべての $\boldsymbol{\delta}$ に対して，

$$|N(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{\delta})-N(\boldsymbol{x})|\leqq\varepsilon$$

となることが示され，こうして，$N(\boldsymbol{x})$ の $\boldsymbol{x}$ の各成分に関する連続性が証明された.

証明終

〔定理 1.4〕 二つのベクトルノルム $N(\boldsymbol{x}), N'(\boldsymbol{x})$ が与えられたとき，すべての $\boldsymbol{x}\in C^n$ に対して，

$$mN'(\boldsymbol{x})\leqq N(\boldsymbol{x})\leqq MN'(\boldsymbol{x}) \tag{1.23}$$

となるような正定数 m, M が存在する（演習問題〔2〕を参照せよ).

証明 はじめに，任意のノルム $N(\boldsymbol{x})$ とノルム $N'(\boldsymbol{x})=\|\boldsymbol{x}\|_\infty$ について証明する. C^n の部分集合

$$S=\{\boldsymbol{x}:\|\boldsymbol{x}\|_\infty=1\}$$

を定義すると，これは C^n の有界閉集合である. 定理 1.3 から $N(\boldsymbol{x})$ は $\boldsymbol{x}$ の連続関数なので，Weirestrass の定理から，$N(\boldsymbol{x})$ は S で最小値と最大値をとる. それらを,

$$N(\boldsymbol{x}^0)=\min_{\boldsymbol{x}\in S}N(\boldsymbol{x}),\quad N(\boldsymbol{x}')=\max_{\boldsymbol{x}\in S}N(\boldsymbol{x})$$

とおく. このとき，すべての $\boldsymbol{x}\in S$ に対して明らかに,

$$0<N(\boldsymbol{x}^0)\leqq N(\boldsymbol{x})\leqq N(\boldsymbol{x}')<\infty \tag{1.24}$$

である. 次に任意のゼロでないベクトル $\boldsymbol{y}\in C^n$ に対して，$\|\boldsymbol{y}\|_\infty^{-1}\boldsymbol{y}\in S$ となるので，式 (1.24) より,

$$N(\boldsymbol{x}^0)\leqq N(\|\boldsymbol{y}\|_\infty^{-1}\boldsymbol{y})\leqq N(\boldsymbol{x}')$$

となる. これより,

$$N(\boldsymbol{x}^0)\|\boldsymbol{y}\|_\infty\leqq N(\boldsymbol{y})\leqq N(\boldsymbol{x}')\|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

となり,

$$m_0=N(\boldsymbol{x}^0),\quad M_0=N(\boldsymbol{x}')$$

とおけば，すべての $\boldsymbol{y}\in C^n$ に対して,

$$m_0\|\boldsymbol{y}\|_\infty\leqq N(\boldsymbol{y})\leqq M_0\|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

となる. 同様に，別のノルム $N'(\boldsymbol{y})$ と $\|\boldsymbol{y}\|_\infty$ について,

$$m_1\|\boldsymbol{y}\|_\infty\leqq N'(\boldsymbol{y})\leqq M_1\|\boldsymbol{y}\|_\infty$$

がすべての $\boldsymbol{y}\in C^n$ に対して成立するような m_1, M_1 が存在することが証明できる. こうして，これら二つの関係から，式

$$\left(\frac{m_0}{M_1}\right)N'(\boldsymbol{y})\leqq N(\boldsymbol{y})\leqq\left(\frac{M_0}{m_1}\right)N'(\boldsymbol{y})$$

が成立する. ここで $m=m_0/M_1$，$M=M_0/m_1$ とおけば，式 (1.23) が証明されたことになる.

証明終

1.2.2 行列のノルム

$n\times n$ の正方行列

索　　　引

〔*T*〕

〔*U*〕

〔*V*〕

〔*W*〕

〔*Y*〕

〔*Z*〕

―― 著 者 略 歴 ――

1959 年　京都大学理学部卒業
1967 年　工学博士（東京大学）
1973 年　大阪大学教授
1988 年　東京大学教授
1990 年　大阪大学名誉教授
1997 年　立命館大学教授
　　　　 現在に至る

数値解析(1)

1981 年 4 月 30 日　初版第 1 刷発行
1997 年 10 月 30 日　初版第 3 刷発行

検印省略

著　者　有　本　卓
　　　　大阪府豊能郡豊能町東
　　　　ときわ台 3-12-11
発 行 者　株式会社　コ ロ ナ 社
　　　　代 表 者　牛 来 辰 巳
印 刷 所　駕 籠 町 印 刷 所

112　東京都文京区千石 4-46-10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo　Japan
振替 00140-8-14844・電話 (03) 3941-3131 (代)

ISBN 4-339-00124-4　　（新日本印刷，愛千製本所）
Printed in Japan