「多変数の制御・解析・最適化に使える行列論」演習解答例

2021 年 12 月 6 日

１章

[演習 1.1]　ブロック単位での積の計算は

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -4 \end{bmatrix}$$

などを計算すればよい。和，積はそれぞれ以下の行列になる。

$$\begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 \\ 3 & 8 & 8 \\ 0 & 3 & 5 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 7 & 3 & 16 \\ 7 & 39 & 31 \\ -3 & 4 & 11 \end{bmatrix}$$

実際に計算すれば，要素単位とブロック単位の計算が同じ計算をしていることが理解できるであろう。

２章

[演習 2.1]　左から，それぞれ以下の通り。

- 2 次元空間で原点を通る直線
- 3 次元空間で原点を通る直線
- 3 次元空間で原点を通る平面

[演習 2.2]　（$\mathrm{Im}(AB) \subseteq A\,\mathrm{Im}(B)$ の証明）$y \in \mathrm{Im}(AB)$ とすると，ある $x \in \mathbf{R}^n$ が存在して $y = A\,B\,x$ が成り立つ。ここで $w = B\,x$ とすると，これは $w \in \mathrm{Im}(B)$ かつ $y = A\,w$ を意味するので，$y \in A\,\mathrm{Im}(B)$ が成り立つ。
（$\mathrm{Im}(AB) \supseteq A\,\mathrm{Im}(B)$ の証明）$y \in A\,\mathrm{Im}(B)$ とすると，ある $w \in \mathrm{Im}(B)$ が存在して $y = A\,w$ が成り立つ。さらに，$w \in \mathrm{Im}(B)$ より，ある $x \in \mathbf{R}^n$ が存在して $w = B\,x$ が成り立つ。この x に対して $y = A\,B\,x$ が成り立つので $y \in \mathrm{Im}(AB)$ である。 □

[演習 2.3]　4 次の単位行列に同じ列基本変形を行えばよいので

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。AT を計算すると

$$AT = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 6 & -1 \\ -3 & 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。

[演習 2.4] $\begin{bmatrix} A \\ I_4 \end{bmatrix}$ に対して，(1,1) 成分を用いて 1 列目以外の 1 行目を 0 にすると

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & -6 & -9 \\ -1 & 5 & 5 & 2 \\ \hdashline 1 & -2 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られる。さらに，(2,2) 成分を用いて 2 列目以外の 2 行目を 0 にすると

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ \frac{17}{3} & 5 & -5 & -13 \\ \hdashline -\frac{5}{3} & -2 & 1 & 4 \\ \frac{4}{3} & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られる。さらに，(3,3) 成分を用いて 3 列目以外の 3 行目を 0 にすると

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ \hdashline -\frac{8}{15} & -1 & 1 & \frac{7}{5} \\ -\frac{14}{15} & -1 & -2 & \frac{11}{5} \\ \frac{17}{15} & 1 & 1 & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られる。最後の行列の上から 3 行は式 (2.25) の形をしている。よって，

$$A' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

である。さらに 4 行目以降を取り出すことにより

$$T = \begin{bmatrix} -\frac{8}{15} & -1 & 1 & \frac{7}{5} \\ -\frac{14}{15} & -1 & -2 & \frac{11}{5} \\ \frac{17}{15} & 1 & 1 & -\frac{13}{5} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

である。AT を計算すれば $A' = AT$ であることを確認できる。

[演習 2.5]　列基本変形を行って A を階段行列にすればよい。(1,1) 成分を用いて 1 列目以外の 1 行目を 0 にすると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -7 & -7 & -7 \\ -1 & 5 & 5 & 5 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。つぎに，(2,2) 成分を用いて 2 列目以外の 2 行目を 0 にすると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ \frac{13}{7} & 5 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

最後に 3 列目と 4 列目を入れ替えると

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 & 0 \\ \frac{13}{7} & 5 & 0 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{3}{7} & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

のように階段行列となる。これより列階数は 3 である。

[演習 2.6]　$\begin{bmatrix} A_1 \\ I_3 \end{bmatrix}$ に対して列基本変形を行って階段行列に変形すると

$$\begin{bmatrix} A_1' \\ T \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ \frac{13}{7} & 5 & 0 \\ \frac{4}{7} & 1 & 0 \\ \hdashline -\frac{1}{7} & -2 & -1 \\ \frac{4}{7} & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られるので A_1 は列フルランクではない。ここで

$$x = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とすると $x \neq 0$ かつ $A_1 x = 0$ である。よって，(iv) は成り立たない。さらに

$$b = \begin{bmatrix} 0 \\ -7 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad x_1 = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_2 = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とすると，$x_1 \neq x_2$ かつ $A\,x_1 = A\,x_2 = b$ が成り立つ。よって，(vii) も成り立たない。以上より，A_1 に対して (i)，(iv)，(vii) の成否が整合している。上記の x，b，x_1，x_2 は，行列 T を用いて

$$x = T\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}, \quad x_1 = T\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \quad b = A_1\,x_1, \quad x_2 = x_1 + x$$

として定めたものである。

一方，A_2 に対して列基本変形を行って階段行列に変形すると

$$A_2' = \begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & -7 & 0\\\frac{13}{7} & 5 & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

が得られるので A_2 は列フルランクである。ここで，$A_2\,x = 0$ が成り立つとする。このとき，

$$A_3 = \begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\4 & 1 & -3\\1 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

とすると $A_3\,x = 0$ が成り立つ。さらに，A_3 が正則行列であることから $x = 0$ が成り立つので，(iv) の条件が成り立っている。同様に，$A\,x = b$ に解が存在すれば，同じ x で

$$A_3\,x = \begin{bmatrix}b_1\\b_2\\b_3\end{bmatrix}$$

も成り立つ。A_3 は正則行列なので x は唯一である。よって，(vii) も成り立つ。以上より，A_2 の場合にも (i)，(iv)，(vii) の成否が整合している。

[演習 2.7]　式 (2.73) の行列と同じく，A_1 の 4 ∼ 6 行目に対応するブロックは列フルランクである。また，A_2 から 1，2 行目に対応するブロックは正則なので列フルランクである。よって，A_1，A_2 もいずれも列フルランクである。つぎに，$A_1\,A_2$ は

$$A_1\,A_2 = \begin{bmatrix}4 & 4\\7 & 9\\11 & 11\\1 & 2\\0 & 1\\7 & 8\end{bmatrix}$$

である。$A_1\,A_2$ の 1, 2 行目に対応するブロックは正則である。よって，$A_1\,A_2$ は列フルランクである。

[演習 2.8]　$\begin{bmatrix}A_1\\I_3\end{bmatrix}$ に対して列基本変形を行うことにより次式が得られる。

$$\left[\begin{array}{ccc}1 & 0 & 0\\3 & 0 & 0\\2 & 0 & 0\\\hline 1 & 1 & -2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 1\end{array}\right], \quad T_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix}1 & -2\\1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$$

これより，$A_1\,x = b_1$ を満足する解の集合は $\{T_1 + T_2\,u : u \in \mathbf{R}^2\}$ である。

$\begin{bmatrix} A_2 \\ I_3 \end{bmatrix}$ に対して列基本変形を行うことにより次式が得られる。

$$\left[\begin{array}{ccc} 3 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & 0 \\ \hdashline 1 & -\frac{4}{3} & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{array}\right], \quad T_1 = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{4}{3} \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad T_2 = \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}$$

このとき，

$$\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} \\ 1 & \frac{2}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T_1 \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

が成り立つので，解集合は

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -\frac{1}{2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} u : u \in \mathbf{R} \right\}$$

である。

上記の計算結果から，A_1，A_2 の核空間はそれぞれ 3 次元空間中の平面，直線となる。また，

$$\dim \mathrm{Im}(A_1) = 1, \quad \dim \mathrm{Ker}(A_1) = 2, \quad \dim \mathrm{Im}(A_2) = 2, \quad \dim \mathrm{Ker}(A_2) = 1$$

が成り立つので，A_1，A_2 いずれの場合にも式 (2.98) が成り立つ。

３章

[演習 3.1]

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} a & \frac{k_{12}}{2} & \frac{k_{31}}{2} \\ \frac{k_{12}}{2} & b & \frac{k_{23}}{2} \\ \frac{k_{31}}{2} & \frac{k_{23}}{2} & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

[演習 3.2]　P を

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_6 \\ p_4 & p_2 & p_5 \\ p_6 & p_5 & p_3 \end{bmatrix}$$

とすると

$$V(x) = x^T P x = p_1\,x_1^2 + p_2\,x_2^2 + p_3\,x_3^2 + 2\,p_4\,x_1\,x_2 + 2\,p_5\,x_2\,x_3 + 2\,p_6\,x_3\,x_1$$

である。よって，

$$\begin{aligned} \frac{\partial V(x)}{\partial x} &= \begin{bmatrix} 2\,p_1\,x_1 + 2\,p_4\,x_2 + 2\,p_6\,x_3 & 2\,p_2\,x_2 + 2\,p_4\,x_1 + 2\,p_5\,x_3 & 2\,p_3\,x_3 + 2\,p_5\,x_2 + 2\,p_6\,x_1 \end{bmatrix} \\ &= 2 \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 & p_4 & p_6 \\ p_4 & p_2 & p_5 \\ p_6 & p_5 & p_3 \end{bmatrix} = 2\,x^T\,P \end{aligned}$$

$$H(V) = \begin{bmatrix} 2\,p_1 & 2\,p_4 & 2\,p_6 \\ 2\,p_4 & 2\,p_2 & 2\,p_5 \\ 2\,p_6 & 2\,p_5 & 2\,p_3 \end{bmatrix} = 2\,P$$

である。

[演習 3.3]　勾配は $\left(\frac{\partial V(x)}{\partial x}\right)^T = 2\,P\,x$ であるので，各 P に対して勾配を求める。

$P = I_2$ の場合：

$$2\,I_2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 2\,I_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad 2\,I_2 \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ の場合：

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ の場合：

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ の場合：

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ の場合：

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ の場合：

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad 2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \end{bmatrix}$$

得られた勾配を等高線に描き入れた図を以下に示す。ただし，勾配の矢印の長さは適宜スケーリングしてある。いずれも，勾配が等高線と直交していることが確認できる。

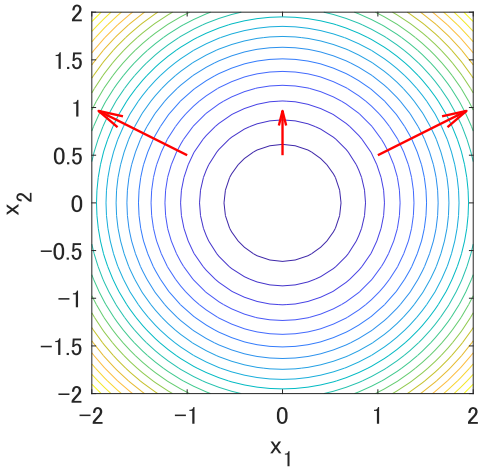


図 3.1 の場合

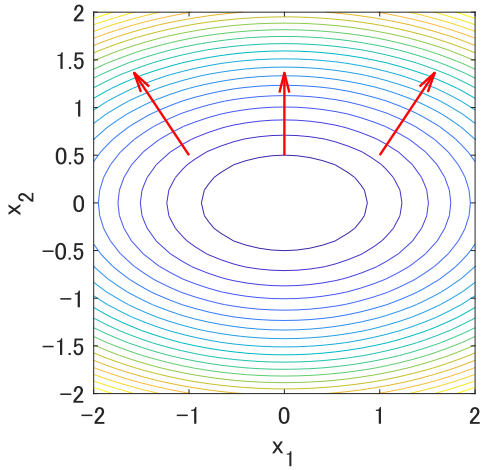


図 3.2 の場合

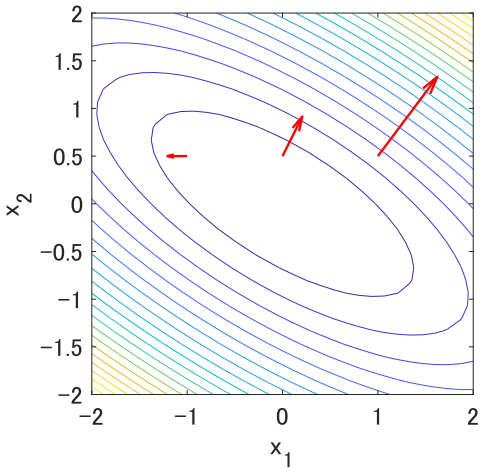


図 3.3 の場合

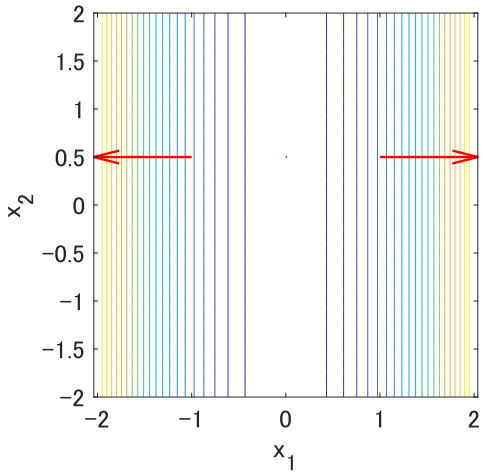


図 3.4 の場合

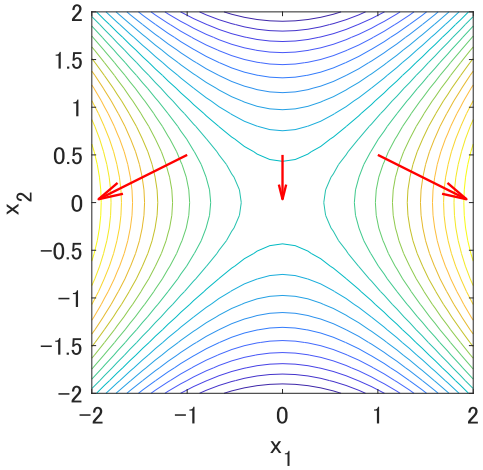


図 3.5 の場合

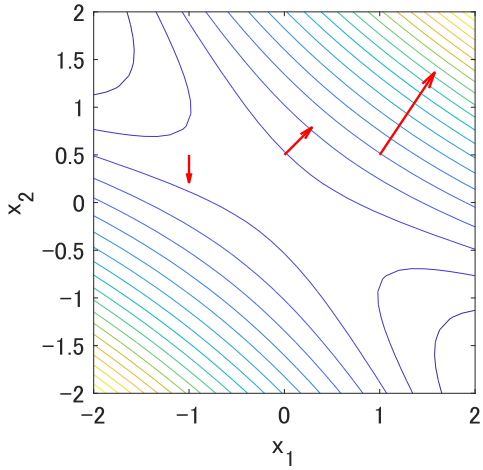


図 3.6 の場合

[演習 3.4]

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda I_3 - P) &= (\lambda-4)^3 - 3\,(\lambda-4) - 2 \\
&= ((\lambda-4)+1)^2\,((\lambda-4)-2) \qquad \left(\because\ \ x^3 - 3\,x - 2 = (x+1)^2(x-2)\right) \\
&= (\lambda-3)^2\,(\lambda-6)
\end{aligned}
$$

が成り立つので，固有値は 3（重複度 2）と 6 である。$\begin{bmatrix} 3I_3 - P \\ I_3 \end{bmatrix}$ を列基本変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

である。そこで,（正規化されていない）固有ベクトル $x_{3,1}$，$x_{3,2}$ を，自由パラメータ $a \in \mathbf{R}$ を用いて

$$x_{3,1} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad x_{3,2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} a + \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

とし，$x_{3,1}$ と $x_{3,2}$ が直交するように a を定める。$x_{3,1}^T x_{3,2} = 2a + 1 = 0$ より $a = -\frac{1}{2}$ であるので

$$x_{3,2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。つぎに $\begin{bmatrix} 6I_3 - P \\ I_3 \end{bmatrix}$ を列基本変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc} 2 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{3}{2} & 0 \\ -1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ \hdashline 1 & \frac{1}{2} & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

である。よって，

$$x_6 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

は固有値 6 に対する固有ベクトルである。以上のベクトルを正規化して，U を

$$U = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{bmatrix} -\sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{3} & -1 & \sqrt{2} \\ 0 & 2 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$$

とすると U は直交行列である。さらに，$U^T P U$ を計算することにより

$$U^T P U = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

が成り立つことを確かめることができる。

[演習 3.5]　$\det P = 1 \neq 0$ より P は正則である。P の逆行列は

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

であるので，P^{-1} は対称行列である。また，

$$x^T P^{-1} x = 2\,x_1^2 - 2\,x_1\,x_2 + x_2^2 = x_1^2 + (x_1 - x_2)^2$$

が成り立つ。これより任意の $x \neq 0$ で $x^T P^{-1} x \geq 0$ である。さらに，$x^T P^{-1} x = 0$ ならば $x_1 = x_2 = 0$ が成り立つ。よって，任意の $x \neq 0$ に対して $x^T P^{-1} x > 0$ が成り立つので P^{-1} は正定である。

[演習 3.6]

$$M^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

である。一方，

$$(M^T)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$$

である。よって，$(M^{-1})^T = (M^T)^{-1}$ が成り立つ。

[演習 3.7]　P_1 の固有値を求める。まず

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - P_1) &= (\lambda - 3)\,(\lambda - 1)^2 - 4 - 2\,(\lambda - 1) - 4\,(\lambda - 3) \\ &= ((\lambda - 1) - 2)\;(\lambda - 1)^2 - 4 - 2\,(\lambda - 1) - 4\;((\lambda - 1) - 2) \\ &= (\lambda - 1)^3 - 2\,(\lambda - 1)^2 - 6\,(\lambda - 1) + 4 \end{aligned}$$

である。ここで

$$x^3 - 2\,x^2 - 6\,x + 4 = (x + 2)\,(x^2 - 4\,x + 2)$$

が成り立つことから $\lambda - 1 = -2,\, 2 \pm \sqrt{2}$，すなわち $\lambda = -1,\, 3 \pm \sqrt{2}$ である。P_1 は負の固有値を有するので P_1 は正定ではない。シルベスターの判定法を用いる場合には

$$3 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = 2 > 0, \quad \det P_1 = -7 < 0$$

より P_1 は正定でない。

つぎに，P_2 の固有値を求める。特性多項式は

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - P_2) &= \lambda^3 - 11\,\lambda^2 + 30\,\lambda - 20 \\ &= (\lambda - 1)\,(\lambda^2 - 10\,\lambda + 20) \end{aligned}$$

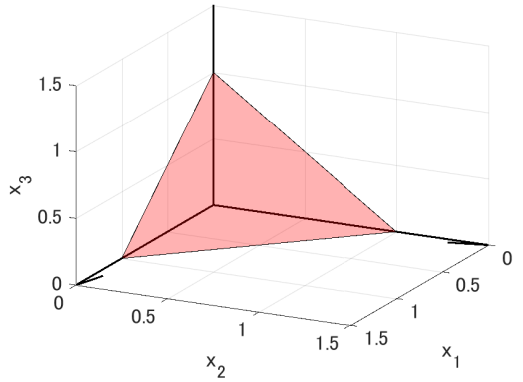
であるので，固有値は 1 と $5 \pm \sqrt{5}$ である。いずれも正の実数であるので P_2 は正定である。シルベスターの判定法を用いる場合には

$$3 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = 5 > 0, \quad \det P_2 = 20 > 0$$

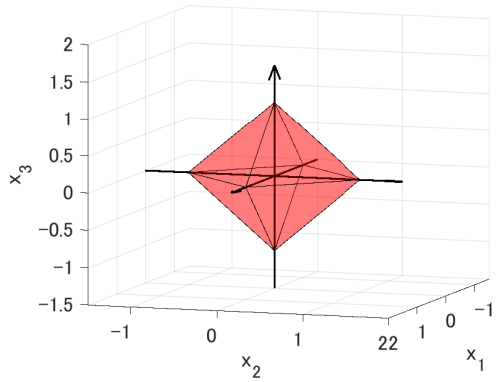
より P_2 は正定である。

上記のように，固有値とシルベスターの判定法による結果が整合している。

[演習 3.8]　d_1 の意味での単位円は $d_1(x,0)=|x_1|+|x_2|+|x_3|=1$ を満足する (x_1,x_2,x_3) の集合である。$x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，$x_3\geq 0$ の場合，上式は $x_1+x_2+x_3=1$ であるので，(x_1,x_2,x_3) の集合は $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,1)$ を通る平面（の一部）である（下図 (a)）。$x_1\geq 0$，$x_2\geq 0$，$x_3\leq 0$ の場合，上式は $x_1+x_2-x_3=1$ であるので，(x_1,x_2,x_3) の集合は $(1,0,0)$，$(0,1,0)$，$(0,0,-1)$ を通る平面（の一部）である。同様にして全ての場合を考えると，d_1 の単位円は $(\pm1,0,0)$，$(0,\pm1,0)$，$(0,0,\pm1)$ を頂点とする正 8 面体を構成する面である（下図 (b)）。

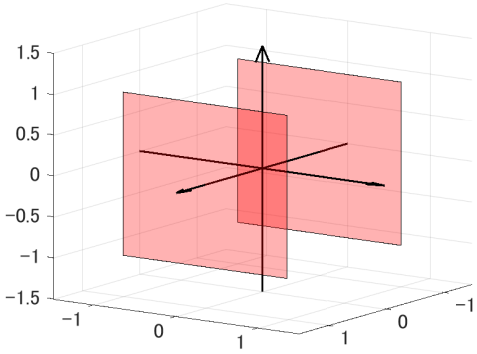


(a)

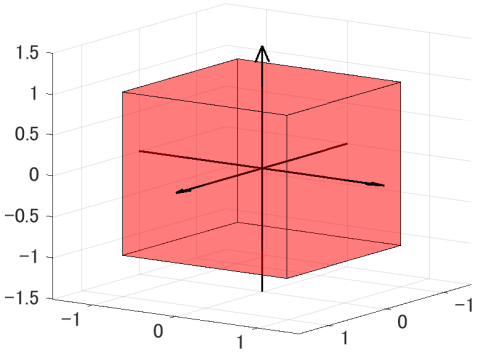


(b)

d_∞ の意味での単位円は $d_\infty(x,0)=\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=1$ を満足する (x_1,x_2,x_3) の集合である。このとき，$\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=|x_1|$，$\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=|x_2|$，$\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=|x_3|$ の少なくとも一つが成り立つ。$\max\{|x_1|,|x_2|,|x_3|\}=|x_1|$ の場合，$d_\infty(x,0)=1$ を満足する (x_1,x_2,x_3) は，$x_1=\pm1$ かつ $|x_2|\leq 1$，$|x_3|\leq 1$ を満足する (x_1,x_2,x_3) である。これは，$(1,\pm1,\pm1)$ を頂点とする正方形および $(-1,\pm1,\pm1)$ を頂点とする正方形である（下図 (c)）。他に場合についても同様に考えると，単位円は $(\pm1,\pm1,\pm1)$ を頂点とする正 6 面体の面である（下図 (d)）。



(c)



(d)

[演習 3.9]　P の固有値は $\frac{7\pm3\sqrt{5}}{2}$ である。固有値が異なるので，各固有値に対応する固有ベクトル

$$v_+=\begin{bmatrix}-2\\1-\sqrt{5}\end{bmatrix},\quad v_-=\begin{bmatrix}-2\\1+\sqrt{5}\end{bmatrix}$$

はたがいに直交する。よって，固有ベクトルを正規化したベクトルを並べた

$$U=\begin{bmatrix}-\frac{2}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & -\frac{2}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\\ \frac{1-\sqrt{5}}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} & \frac{1+\sqrt{5}}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}\end{bmatrix}$$

は直交行列である。U を用いると P を

$$P=U\begin{bmatrix}\frac{7+3\sqrt{5}}{2} & 0\\ 0 & \frac{7-3\sqrt{5}}{2}\end{bmatrix}U^T$$

と分解することができる。これより，$P^{\frac{1}{2}}$ は

$$P^{\frac{1}{2}} = U \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} \end{bmatrix} U^T$$

であることから，$(P^{\frac{1}{2}})^{-1}$ は

$$(P^{\frac{1}{2}})^{-1} = (U^T)^{-1} \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{7-3\sqrt{5}}} \end{bmatrix} U^{-1} = U \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{7-3\sqrt{5}}} \end{bmatrix} U^T$$

である。一方，P^{-1} は

$$P^{-1} = U \begin{bmatrix} \frac{2}{7+3\sqrt{5}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{7-3\sqrt{5}} \end{bmatrix} U^T$$

であるので，$(P^{-1})^{\frac{1}{2}}$ は

$$(P^{-1})^{\frac{1}{2}} = U \begin{bmatrix} \sqrt{\frac{2}{7+3\sqrt{5}}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\frac{2}{7-3\sqrt{5}}} \end{bmatrix} U^T$$

である。よって，$(P^{\frac{1}{2}})^{-1} = (P^{-1})^{\frac{1}{2}}$ が成り立つ。

[演習 3.10]　A_1 は列フルランクではない。ここで，$P_1 = A_1^T A_1$ とすると

$$P_1 = \begin{bmatrix} 18 & 3 & 21 \\ 3 & 15 & 18 \\ 21 & 18 & 39 \end{bmatrix}$$

である。P_1 の首座小行列式はそれぞれ $18 > 0$，$261 > 0$，0 であるので，P_1 は正定ではない。一方，A_2 は列フルランクである。ここで，$P_2 = A_2^T A_2$ とすると

$$P_2 = \begin{bmatrix} 19 & 4 & -14 \\ 4 & 15 & 12 \\ -14 & 12 & 27 \end{bmatrix}$$

である。P_2 の首座小行列式はそれぞれ $19 > 0$，$269 > 0$，$243 > 0$ であるので，P_2 は正定である。以上より，A_1，A_2 に対して補題 3.12 の主張が成り立っていることが確認できた。

[演習 3.11]　式 (3.155) より

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix}$$

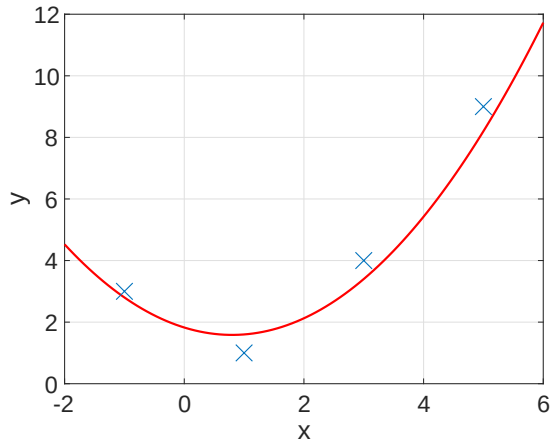
である。列基本変形を行うことにより，A が列フルランクであることがわかる。ここで，

$$\begin{aligned} (A^T A)^{-1} A^T &= \begin{bmatrix} 4 & 8 & 36 \\ 8 & 36 & 152 \\ 36 & 152 & 708 \end{bmatrix}^{-1} A^T = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 9 \\ 2 & 9 & 38 \\ 9 & 38 & 177 \end{bmatrix}^{-1} A^T \\ &= \frac{1}{4 \cdot 80} \begin{bmatrix} 149 & -12 & -5 \\ -12 & 96 & -20 \\ -5 & -20 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \\ 1 & 1 & 9 & 25 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{80} \begin{bmatrix} 39 & 33 & 17 & -9 \\ -32 & 16 & 24 & -8 \\ 5 & -5 & -5 & 5 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

であるので

$$x_* = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} = (A^T A)^{-1} A^T \cdot b = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 73 \\ -24 \\ 15 \end{bmatrix}$$

である。得られた近似曲線を図示したものが下図である。図中の「×」は与えられたデータである。



つぎに $b - A\,x_*$ を求めると

$$\begin{aligned} b - A\,x_* &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 73 \\ -24 \\ 15 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 4 \\ 8 \end{bmatrix} - \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 14 \\ 8 \\ 17 \\ 41 \end{bmatrix} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。これと A の列ベクトルとの内積をとると

$$(b - A\,x_*)^T A = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 5 & 25 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

である。よって，$b - A\,x_*$ は A のすべての列ベクトルと直交する。

[演習 3.12]　A_1 は列フルランクではないが，A_2 は列フルランクである。

$$A_2^T A_2 = \begin{bmatrix} 19 & 4 & -14 \\ 4 & 15 & 12 \\ -14 & 12 & 27 \end{bmatrix}$$

であるので，

$$\begin{aligned} (A_2^T A_2)^{-1} A_2^T &= \frac{1}{243} \begin{bmatrix} 261 & -276 & 258 \\ -276 & 317 & -284 \\ 258 & -284 & 269 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{243} \begin{bmatrix} -33 & -6 & -57 & 243 \\ 74 & 65 & 91 & -243 \\ -41 & -59 & -34 & 243 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

である。これより

$$
\begin{aligned}
(A_2^T A_2)^{-1} A_2^T \cdot A_2 &= \frac{1}{243}\begin{bmatrix} -33 & -6 & -57 & 243 \\ 74 & 65 & 91 & -243 \\ -41 & -59 & -34 & 243 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 4 & 1 & -3 \\ -1 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
&= I_3
\end{aligned}
$$

が成り立つ。

[演習 3.13]　式 (3.194) より

$$
K_* = -P^{-1}Z = -\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}, \quad F(K_*) = \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -13 \end{bmatrix}
$$

である。一方，

$$
F(K_* + I_2) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -11 \end{bmatrix}
$$

であるので

$$
\Delta = F(K_* + I_2) - F(K_*) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}
$$

となる。Δ は正定行列なので $F(K_* + I_2) > F(K_*)$ である。

４章

[演習 4.1]　$b = f$ の場合，$A\,x = b$ を満足する $x \in \mathbf{R}^3$ は存在しない。すなわち，系 4.2 の (i) は成り立たない。ここで，

$$
w = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

とすると，$A^T\,w = 0$ であるが $b^T\,w = 1 \neq 0$ である。よって

$$
\mathrm{Ker}(A^T) \not\subseteq \mathrm{Ker}(b^T), \quad \mathrm{Ker}(A^T) \neq \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}\right)
$$

である。すなわち，系 4.2 の (ii)，(iii) は成り立たない。

一方，$b = g$ のとき $A\,x = b$ を満足する $x \in \mathbf{R}^3$ が存在する。すなわち，系 4.2 の (i) が成り立つ。

$$
A^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
$$

の 1 ∼ 2 列目からなるブロック行列は列フルランクである。よって，

$$
\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)
$$

である。一方

$$b^T = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

であるので

$$\mathrm{Ker}(b^T) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right), \quad \mathrm{Ker}\left(\begin{bmatrix} A^T \\ b^T \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

となる。以上より，系 4.2 の (ii)，(iii) が成り立つ。

[演習 4.2]　（$\mathrm{Ker}(TA) \supseteq \mathrm{Ker}(A)$ の証明）$x \in \mathrm{Ker}(A)$ とする。このとき，$Ax = 0$ が成り立つので $TAx = 0$ も成り立つ。よって，$x \in \mathrm{Ker}(TA)$ である。
（$\mathrm{Ker}(TA) \subseteq \mathrm{Ker}(A)$ の証明）$x \in \mathrm{Ker}(TA)$ とすると $TAx = 0$ が成り立つ。T が正則行列であることから $Ax = 0$ も成り立つ。よって，$x \in \mathrm{Ker}(A)$ が成り立つ。 □

[演習 4.3]　A，b_1，b_2，I_3 に対して，同時に行基本変形を行うと

$$\begin{bmatrix} A & b_1 & b_2 & I_3 \end{bmatrix}$$

を以下の行列に変形することができる。

$$\left[\begin{array}{ccc:c:c:ccc} 1 & -4 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 14 & -2 & -2 & -3 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

これより，$Ax = b_1$ には解が存在しないが，$Ax = b_2$ には解が存在する。上記の行基本変形の結果から，行列 J，b_2' を

$$J = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -2 \end{bmatrix}, \quad b_2' = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

とすると，$Ax = b_2$ の解の一つは

$$J^T(JJ^T)^{-1} \cdot b_2' = \frac{1}{300}\begin{bmatrix} 10 \\ -61 \\ 23 \end{bmatrix}$$

である。

[演習 4.4]　（$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \subseteq \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_p, u_1, \cdots, u_q\}$ の証明）$z \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ とすると，ある $x \in \mathcal{S}_1$，$y \in \mathcal{S}_2$ が存在して $z = x + y$ が成り立つ。さらに，$x \in \mathcal{S}_1$ より，ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_p \in \mathbf{R}$ が存在して，

$$x = v_1\,\alpha_1 + \cdots + v_p\,\alpha_p$$

が成り立つ。同様にして，ある $\beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbf{R}$ が存在して，

$$y = u_1\,\beta_1 + \cdots + u_p\,\beta_p$$

も成り立つ。以上より

$$z = x + y = v_1\,\alpha_1 + \cdots + v_p\,\alpha_p + u_1\,\beta_1 + \cdots + u_p\,\beta_p$$

であるので，$z \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_p, u_1, \cdots, u_q\}$ が成り立つ。
（$\mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2 \supseteq \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_p, u_1, \cdots, u_q\}$ の証明）$z \in \mathrm{span}\{v_1, \cdots, v_p, u_1, \cdots, u_q\}$ とする。このとき，ある $\alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \in \mathbf{R}$ が存在して

$$\begin{aligned} z &= v_1\,\alpha_1 + \cdots + v_p\,\alpha_p + u_1\,\beta_1 + \cdots + u_p\,\beta_p \\ &= (v_1\,\alpha_1 + \cdots + v_p\,\alpha_p) + (u_1\,\beta_1 + \cdots + u_p\,\beta_p) \end{aligned}$$

が成り立つ。定義より，$v_1\,\alpha_1 + \cdots + v_p\,\alpha_p \in \mathcal{S}_1$，$u_1\,\beta_1 + \cdots + u_p\,\beta_p \in \mathcal{S}_2$ であるので $z \in \mathcal{S}_1 + \mathcal{S}_2$ である。□

[演習 4.5]　$\hat{S}_1$，$\hat{S}_2$ は列フルランクである。ここで列基本変形によって，$\left[\begin{array}{c} \left[\begin{array}{cc} \hat{S}_1 & -\hat{S}_2 \end{array}\right] \\ \hline I_6 \end{array}\right]$ を

$$\left[\begin{array}{cccccc} -2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 9 & -8 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -4 & -4 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & 15 & -43 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 9 & -29 & 0 & 0 \\ \hline 1 & -2 & -2 & 8 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 5 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{array}\right]$$

と変形することができる。この結果に基づいて

$$W_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -1 \\ 2 & 6 \end{bmatrix}, \quad W_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

とすると

$$\hat{S}_1\,W_1 = \hat{S}_2\,W_2 = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 20 \\ -4 & -12 \\ -3 & 36 \\ -5 & 20 \end{bmatrix}$$

となる。よって，

$$\left\{ \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ -4 \\ -3 \\ -5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ -3 \\ 9 \\ 5 \end{bmatrix} \right\}$$

は $\mathrm{Im}(\hat{S}_1) \cap \mathrm{Im}(\hat{S}_2)$ の基底である。

[演習 4.6] $\hat{U} = [\, u_1 \quad u_2 \,]$，$\hat{Y} = [\, y_1 \quad y_2 \,]$ はそれぞれ列フルランクなので，$U = \{u_1, u_2\}$，$Y = \{y_1, y_2\}$ はいずれも一次独立である。ここで，列基本変形によって $\left[\begin{array}{c} [\, u_1 \quad u_2 \quad y_1 \quad y_2 \,] \\ \hline I_4 \end{array}\right]$ を

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と変形することができる。よって，$\dim \operatorname{span}(U \cup Y) = 3$ かつ

$$\operatorname{span}(U \cup Y) = \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

である。

同様にして $\left[\begin{array}{c} [\, u_1 \quad u_2 \quad y_1 \,] \\ \hline I_3 \end{array}\right]$，$\left[\begin{array}{c} [\, u_1 \quad u_2 \quad y_2 \,] \\ \hline I_3 \end{array}\right]$ を列基本変形すると，それぞれ

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ \hline 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と変形することができる。これより

$$\operatorname{span}\{u_1, u_2, y_1\} = \operatorname{span}\{u_1, u_2, y_2\} = \operatorname{Im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}\right) = \operatorname{span}(U \cup Y)$$

が成り立つ。よって，この場合には y_1，y_2 のどちらを w_1 に用いても補題 4.10 の条件が成り立つ。

[演習 4.7] ベクトル s_1，s_2 を，

$$s_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad s_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

とする。また，$\mathcal{X}$ の基底を $B_{\mathcal{X}} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ とする。ただし，

$$e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad e_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。まず，

$$\mathcal{S}+\mathcal{X}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_2,e_3,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_3,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_4\}$$

および

$$\mathcal{S}+\mathcal{X}\neq\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_3\}$$

である。なぜなら，例えば e_1 は $\{s_1,s_2,e_2,e_3,e_4\}$ の線形結合で書くことができるが，e_4 は $\{s_1,s_2,e_1,e_2,e_3\}$ の線形結合で書くことはできないからである。さらに，

$$\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_2,e_3,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_3,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_2,e_4\}$$

が成り立つ一方で $\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_2,e_3,e_4\}\neq\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_2,e_3\}$ である。同様にして

$$\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_3,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_3,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_4\}$$

$$\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_2,e_4\}=\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_4\}$$

である一方で

$$\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_3,e_4\}\neq\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_3\},\quad \mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_2,e_4\}\neq\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_1,e_2\}$$

である。以上より，

$$\mathrm{span}\{e_1,e_4\},\quad \mathrm{span}\{e_2,e_4\},\quad \mathrm{span}\{e_3,e_4\}$$

はいずれも $\mathcal{S}$ の補空間である。

補空間を見つけるだけでよければ，$\{e_1,e_2,e_3,e_4\}$ の中から 2 つのベクトルの組み合わせ $\{e_i,e_j\}$（$i\neq j$）を選び，それらすべての組み合わせに対して $\mathcal{S}+\mathrm{span}\{e_3,e_4\}=\mathcal{X}$ となるか否かを確認すればよい。具体的には $[\,s_1\quad s_2\quad e_i\quad e_j\,]$ が列フルランクになるか否かを確認すればよい。いずれにしても，$e_1\sim e_4$ の線形結合を作ることなく，$e_1\sim e_4$ から必要な個数のベクトルを選ぶことで $\mathcal{X}$ の基底を構成することができる。

[演習 4.8]　$\hat{S}_1$，$\hat{S}_2$ は列フルランクであるので，$\dim\mathrm{Im}(\hat{S}_1)=3$，$\dim\mathrm{Im}(\hat{S}_2)=3$ である。一方，演習 4.5 で行った計算結果より，

$$\dim\Big(\mathrm{Im}(\hat{S}_1)+\mathrm{Im}(\hat{S}_2)\Big)=4,\quad \dim\Big(\mathrm{Im}(\hat{S}_1)\cap\mathrm{Im}(\hat{S}_2)\Big)=2$$

である。以上より

$$\dim\Big(\mathrm{Im}(\hat{S}_1)+\mathrm{Im}(\hat{S}_2)\Big)=\dim\mathrm{Im}(\hat{S}_1)+\dim\mathrm{Im}(\hat{S}_2)-\dim\Big(\mathrm{Im}(\hat{S}_1)\cap\mathrm{Im}(\hat{S}_2)\Big)$$

が成り立つ。

[演習 4.9]　A の固有値は 0 と 2（重複度 2）である。各固有値 λ に対し $\begin{bmatrix}\lambda I-A\\ I_3\end{bmatrix}$ を列基本変形することにより，各固有値に対応する固有空間はそれぞれ $\mathrm{Im}(\hat{U}_0)$，$\mathrm{Im}(\hat{U}_2)$ であることがわかる。ただし，

$$\hat{U}_0=\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix},\quad \hat{U}_2=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}$$

である。このとき，$\begin{bmatrix} \hat{U}_0 & \hat{U}_2 \end{bmatrix}$ は列数 3 かつ列フルランクであるので，補題 4.9 より $\mathrm{Im}(\hat{U}_0)$，$\mathrm{Im}(\hat{U}_2)$ はたがいに相補的である。このとき，x の各固有空間への分解は

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{U}_0 & \hat{U}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{U}_0 & \hat{U}_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{c:cc} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{array}\right] \left[\begin{array}{c} \frac{1}{2}(x_1 + x_3) \\ \hdashline \frac{1}{2}(-x_1 + 2\,x_2 - x_3) \\ \frac{1}{2}(-x_1 + x_3) \end{array}\right] \\
&= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

である。これより，$A^3\,x$ は

$$A^3\,x = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix} \cdot 0^3 + \frac{1}{2} \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix} \cdot 2^3 = 4 \begin{bmatrix} x_1 - x_3 \\ -x_1 + 2\,x_2 - x_3 \\ -x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

である。

[演習 4.10]　行基本変形を用いて $[\,\hat{S} \quad \hat{V} \quad x \quad I_5\,]$ を

$$\left[\begin{array}{cc:cc:c:ccccc} 1 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & -7 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 10 & 18 & 4 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 18 & 4 & -1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -8 & -10 & 2 & -20 & 24 \end{array}\right]$$

と変形することができる。よって，解 w，θ が存在する。J，x' を

$$J = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 8 & 10 \\ 0 & 0 & 0 & 18 \end{bmatrix}, \quad x' = \begin{bmatrix} 2 \\ -7 \\ 18 \\ 18 \end{bmatrix}$$

とすると，J が正則であることから解は唯一であり，その解は

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta \end{bmatrix} = J^{-1}x' = \left[\begin{array}{c} 1 \\ -2 \\ \hdashline 1 \\ 1 \end{array}\right]$$

である。一方，$(\hat{S}^T\hat{S})^{-1}\hat{S}^T x$，$(\hat{V}^T\hat{V})^{-1}\hat{V}^T x$ を計算すると，それぞれ

$$(\hat{S}^T\hat{S})^{-1}\hat{S}^T x = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 10 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 2 \\ -19 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$(\hat{V}^T\hat{V})^{-1}\hat{V}^T x = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 14 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

であり，上記の w，θ と一致する。

[演習 4.11]　定理 4.5 より，式 (4.202) の $\hat{V}$ を計算すればよい。実際に計算すると

$$\hat{V} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 27 & 27 & 54 & 27 \\ 54 & 18 & 54 & 45 \\ -3 & 13 & 14 & -1 \\ 24 & 16 & 20 & 14 \\ 15 & -5 & -4 & 8 \end{bmatrix}$$

である。さらに，$\mathrm{Im}(\hat{V}) = \mathrm{Im}(\hat{V}_1)$ を満足する列フルランクな $\hat{V}_1$ を得るために，$\begin{bmatrix} 9 \cdot \hat{V} \\ I_4 \end{bmatrix}$ を列基本変形すると

$$\left[\begin{array}{cccc} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 4 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ \frac{4}{9} & \frac{2}{9} & \frac{1}{2} & -1 \\ -\frac{7}{36} & -\frac{7}{36} & -\frac{3}{8} & 1 \\ \frac{1}{18} & \frac{1}{6} & \frac{1}{4} & -2 \end{array}\right]$$

が得られる。よって，$\hat{V}_1$ を

$$\hat{V}_1 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると，$\hat{V}_1$ の列ベクトルが $(\mathrm{Im}(\hat{S}))^{\perp}$ の基底となる。

つぎに，$M\,y$ の $\mathrm{Im}(\hat{S})$，$(\mathrm{Im}(\hat{S}))^{\perp}$ への分解を求める。これには，定理 4.4 より，

$$\hat{S}\,(\hat{S}^T\hat{S})^{-1}\hat{S}^T M\,y, \quad \hat{V}_1\,(\hat{V}_1^T\hat{V}_1)^{-1}\hat{V}_1^T M\,y$$

をそれぞれ求めればよい。実際に計算すると，

$$\hat{S}\,(\hat{S}^T\hat{S})^{-1}\hat{S}^T M\,y = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 34 & 18 & 26 & 14 \\ 17 & 9 & 13 & 7 \\ 34 & 18 & 26 & 14 \end{bmatrix} y, \quad \hat{V}_1\,(\hat{V}_1^T\hat{V}_1)^{-1}\hat{V}_1^T M\,y = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 27 & 27 & 54 & 27 \\ 54 & 18 & 54 & 45 \\ -7 & 9 & 10 & -5 \\ -8 & 0 & -4 & 2 \\ 11 & -9 & -8 & 4 \end{bmatrix} y$$

である。

[演習 4.12]　$\begin{bmatrix} A \\ I_3 \end{bmatrix}$ を列基本変形することにより

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られる。ここで

$$\hat{S} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とすると，$\hat{S}$ の列ベクトルは $\mathrm{Im}(A)$ の基底となる。この $\hat{S}$ を用いると

$$\hat{S}\left(\hat{S}^T\hat{S}\right)^{-1}\hat{S}^T = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 3 & 1 & 4 & -5 \\ 1 & 6 & 7 & 4 \\ 4 & 7 & 11 & -1 \\ -5 & 4 & -1 & 14 \end{bmatrix}$$

$$\hat{V} = \left(I_4 - \hat{S}\left(\hat{S}^T\hat{S}\right)^{-1}\hat{S}^T\right)I_4 = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 14 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 11 & -7 & -4 \\ -4 & -7 & 6 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

である。そこで，$\begin{bmatrix} 17\cdot\hat{V} \\ I_4 \end{bmatrix}$ をさらに列基本変形することにより

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{5}{17} & \frac{4}{17} & 2 & 1 \\ -\frac{3}{17} & -\frac{1}{17} & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られる。そこで

$$\hat{V}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 3 \\ 1 & -2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とすると，$\hat{V}_1$ の列ベクトルは $(\mathrm{Im}(A))^\perp$ の基底となり

$$\hat{V}_1\left(\hat{V}_1^T\hat{V}_1\right)^{-1}\hat{V}_1^T = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 14 & -1 & -4 & 5 \\ -1 & 11 & -7 & -4 \\ -4 & -7 & 6 & 1 \\ 5 & -4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

である。これらを用いて，f，g それぞれの $\mathrm{Im}(A)$，$(\mathrm{Im}(A))^\perp$ への分解を求めると，それぞれ

$$\hat{S}\left(\hat{S}^T\hat{S}\right)^{-1}\hat{S}^T\cdot f = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 9 \\ 20 \\ 29 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \hat{V}_1\left(\hat{V}_1^T\hat{V}_1\right)^{-1}\hat{V}_1^T\cdot f = \frac{1}{17}\begin{bmatrix} 42 \\ -3 \\ -12 \\ 15 \end{bmatrix}$$

$$\hat{S}\left(\hat{S}^T\hat{S}\right)^{-1}\hat{S}^T\cdot g=\begin{bmatrix}3\\1\\4\\-5\end{bmatrix}=g,\quad \hat{V}_1\left(\hat{V}_1^T\hat{V}_1\right)^{-1}\hat{V}_1^T\cdot g=0$$

である。すなわち，f の $(\mathrm{Im}(A))^\perp$ 方向の成分は 0 でないのに対し，g の $(\mathrm{Im}(A))^\perp$ 方向の成分は 0 である。このことは，$A\,x=f$ に解が存在しないこと，および $A\,x=g$ に解が存在することと整合している。

[演習 4.13]　列基本変形を用いて $\begin{bmatrix}A\\I_4\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}A^T\\I_5\end{bmatrix}$ をそれぞれ変形すると

$$\left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&2&-3&0\\3&3&-4&0\\1&2&-4&0\\\hdashline 1&1&-1&-1\\0&0&-1&2\\0&-1&3&-3\\0&0&0&1\end{array}\right],\quad \left[\begin{array}{ccccc}1&0&0&0&0\\2&1&0&0&0\\1&1&1&0&0\\0&1&3&0&0\\\hdashline 1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&-\frac{3}{2}\\0&0&0&1&0\\0&0&1&-2&-2\\0&0&0&0&1\\0&-\frac{1}{2}&-\frac{3}{2}&\frac{3}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right]$$

が得られる。これらより，$\dim\mathrm{Im}(A)=\dim\mathrm{Im}(A^T)=3$ である。

[演習 4.14]　列基本変形を用いて $\begin{bmatrix}A\\I_3\end{bmatrix}$, $\begin{bmatrix}B\\I_4\end{bmatrix}$ をそれぞれ変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc}1&0&0\\2&-3&0\\0&1&0\\\hdashline 1&-2&-1\\0&1&1\\0&0&1\end{array}\right],\quad \left[\begin{array}{cccc}1&0&0&0\\2&0&0&0\\1&0&0&0\\\hdashline 1&-2&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

であるので $\mathrm{rank}(A)=2$，$\mathrm{rank}(B)=1$ である。一方，

$$A\,B=\begin{bmatrix}4&8&4&-4\\5&10&5&-5\\1&2&1&-1\end{bmatrix}$$

である。列基本変形を用いて $\begin{bmatrix}A\,B\\I_4\end{bmatrix}$ を変形すると

$$\left[\begin{array}{cccc}4&0&0&0\\5&0&0&0\\1&0&0&0\\\hdashline 1&-2&-1&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right]$$

が得られるので $\mathrm{rank}(AB)=1$ である。よって，$\mathrm{rank}(AB)\le\min\{\mathrm{rank}(A),\,\mathrm{rank}(B)\}=1$ が成り立つ。

[演習 4.15]　行基本変形によって $[\,A \quad B_1 \quad B_2 \quad I_3\,]$ を変形すると

$$\left[\begin{array}{ccc:cc:cc:ccc} 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & -2 & 1 & 0 & 1 & -3 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

が得られる。これより，$AX = B_1$ には解が存在しないが $AX = B_2$ には解が存在することがわかる。一方，$\begin{bmatrix} A \\ I_3 \end{bmatrix}$ は列基本変形によって次式に変形することができる。

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hdashline 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & 7 \end{array}\right]$$

よって，

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right)$$

である。

$B = B_1$ の場合に (ii)，(iii)，(iv) が成立しないことを確認する。

(ii) $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ とすると $v_1 \in \mathrm{Im}(B_1)$ であるが $v_1 \notin \mathrm{Im}(A)$ である。よって，$\mathrm{Im}(B_1) \not\subseteq \mathrm{Im}(A)$ である。

(iii) $v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$ とすると $A^T v_2 = 0$ であるが

$$B_1^T v_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \neq 0$$

である。よって，$\mathrm{Ker}(A^T) \not\subseteq \mathrm{Ker}(B_1^T)$ である。

(iv) 上記の行基本変形の結果から $\mathrm{rank}(A) = 2$，$\mathrm{rank}\left([\,A \quad B_1\,]\right) = 3 \neq \mathrm{rank}(A)$ である。

つぎに，$B = B_2$ の場合に (ii)，(iii)，(iv) が成立することを確認する。

(ii) $\mathrm{Im}(B_2) = \mathrm{Im}(A)$ より成り立つ。

(iii) 上記の行基本変形の結果から

$$\mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Ker}(B_2^T) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$$

が成り立つ。

(iv) 同じく，行基本変形の結果から $\mathrm{rank}\left([\,A \quad B_2\,]\right) = 2 = \mathrm{rank}(A)$ である。

[演習 4.16]　行基本変形により $[\,A \quad B \quad I_3\,]$ を

$$\left[\begin{array}{cc:ccc:ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

と変形できる。これより $\mathrm{Ker}(A^T) \subseteq \mathrm{Ker}(B^T)$ が成り立つ。定理 4.8 より，$\mathrm{Im}(B) \subseteq \mathrm{Im}(A)$ が成り立つ。つぎに，式 (4.241) の X を求めと

$$X = (A^T A)^{-1} A^T B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

である。この X に対して AX を計算すれば，$AX = B$ が成り立つことを確認することができる。

[演習 4.17]　式 (4.253) の行列を A とする。列基本変形を用いて $\begin{bmatrix} A \\ I_4 \end{bmatrix}$ を

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & -4 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と変形することができる。ここで

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -2 \\ 0 & 1 \\ 3 & -4 \end{bmatrix}, \quad W = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$$

とすると

$$A \begin{bmatrix} I_2 & W \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。これより

$$A = \begin{bmatrix} L & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & -W \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} I_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_2 & -W \\ 0 & I_2 \end{bmatrix} = L \begin{bmatrix} I_2 & -W \end{bmatrix}$$

が成り立つので

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

とすれば $A = LR$ である。

像空間，核空間の確認を行うため，$\begin{bmatrix} A^T \\ I_4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} L^T \\ I_4 \end{bmatrix}$，$\begin{bmatrix} R \\ I_4 \end{bmatrix}$ に行基本変形を行うと，それぞれ

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hdashline 1 & 0 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

が得られる。以上の結果から

$$\mathrm{Im}(A) = \mathrm{Im}(L), \quad \mathrm{Ker}(A) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -1 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}(R),$$

$$\mathrm{Im}(A^T) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Im}(R^T), \quad \mathrm{Ker}(A^T) = \mathrm{Im}\left(\begin{bmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Ker}(L^T)$$

が成り立つ。

[演習 4.18] $[\,A \quad I_3\,]$ を行基本変形により

$$\left[\begin{array}{cccc:ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

と変形することができる。これより，$A^\perp$ を

$$A^\perp = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とすればよい。このとき，$(A^\perp)^T$ の列ベクトルは $\mathrm{Im}(A)^\perp = \mathrm{Ker}(A^T)$ の基底となる。

[演習 4.19] $[\,A \quad I_3\,]$ を行基本変形により

$$\left[\begin{array}{ccc:ccc} 1 & -4 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 14 & -2 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

と変形することができる。これより，$A^\perp$ を

$$A^\perp = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

とする。このとき，

$$A^\perp B_1 = [\,0 \quad 1\,], \quad A^\perp B_2 = [\,0 \quad 0\,]$$

であるので，$AX = B_1$ には解が存在しないが，$AX = B_2$ には解が存在する。行基本変形の結果に基づいて，A のランク分解を

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cc:c} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -2 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = L\,R,$$

$$L = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad R = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 0 & 14 & -2 \end{bmatrix}$$

と与える。さらに，$\begin{bmatrix} R \\ I_3 \end{bmatrix}$ を列基本変形によって

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ \hdashline 1 & -2 & -10 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 7 \end{bmatrix}$$

と変形できる。L，R の左逆行列，右逆行列をそれぞれ $(L^T L)^{-1} L^T$，$R^T (R\,R^T)^{-1}$ で与えることにより，$AX = B_2$ の解の集合は

$$\left\{ \frac{1}{300} \begin{bmatrix} 30 & 10 \\ 27 & -61 \\ 39 & 23 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -10 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix} Z : Z \in \mathbf{R}^{1\times 2} \right\}$$

である。

[演習 4.20]　式 (4.281) が必要条件であることは本文で説明されている。そこで，式 (4.821) が十分条件であることを示す。L_A，L_B は列フルランク，R_A，R_B は行フルランクなので，以下の行列はいずれも正則である。

$$T_{L_A} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{L_A} \\ L_A^{\perp} \end{bmatrix}, \quad T_{L_B} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{L_B} \\ L_B^{\perp} \end{bmatrix}, \quad T_{R_A} = \begin{bmatrix} \overleftarrow{R_A} & ((R_A^T)^{\perp})^T \end{bmatrix}, \quad T_{R_B} = \begin{bmatrix} \overleftarrow{R_B} & ((R_B^T)^{\perp})^T \end{bmatrix}$$

ここで，T_{R_A}，T_{L_B}，$Y \in \mathbf{R}^{n\times p}$ を用いて X を $X = T_{R_A} Y\, T_{L_B}$ で与える。このとき，ある X が存在して $A\,X\,B = C$ が成り立つことと，ある Y が存在して

$$T_{L_A} A\, T_{R_A} Y\, T_{L_B} B\, T_{R_B} = T_{L_A} C\, T_{R_B}$$

すなわち

$$\begin{bmatrix} I_{r_a} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{r_b} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = T_{L_A} C\, T_{R_B}, \quad Y = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{(r_a+(n-r_a))\times(r_b+(p-r_b))}$$

が成り立つことは等価である。式 (4.281) より

$$T_{L_A} C\, T_{R_B} = \begin{bmatrix} \overrightarrow{L_A}\, C\, \overleftarrow{R_B} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が成り立つ。よって，$Y_{11} = \overrightarrow{L_A}\, C\, \overleftarrow{R_B}$ に対して方程式が成り立つ。以上より，式 (4.281) が成り立てば $A\,X\,B = C$ を満足する X が存在する。さらに，Y_{12}，Y_{21}，Y_{22} は任意の行列で成り立つ。よって，$A\,X\,B = C$ を満足する X の集合は式 (4.282)，(4.283) で与えられる。 □

5章

[演習 5.1]　$\det A_{11} = -1$，$\det A_{22} = -1$ である。一方

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} - 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & 3 & 7 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} = 1$$

であるので，$\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22}$ が成り立つ。

[演習 5.2]　第 1 行に関する展開で計算すると

$$\det A = 1 \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} + 2 \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} - (-1) \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix} = -35$$

である。第 2 行，第 3 行に関するラプラス展開で計算した場合には

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{5+3} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + (-1)^{5+4} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + (-1)^{5+5} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{5+5} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad + (-1)^{5+6} \cdot \det \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} + (-1)^{5+7} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -3 \end{bmatrix} \cdot \det \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \\ &= -35 \end{aligned}$$

である。

[演習 5.3]　定理 5.1 より

$$\begin{aligned} \det A &= \det \left[\begin{array}{c|ccc} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1r} \\ \hline & A_{22} & \cdots & A_{2r} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{array}\right] \\ &= \det A_{11} \cdot \det \left[\begin{array}{c|ccc} A_{22} & A_{23} & \cdots & A_{2r} \\ \hline & A_{33} & \cdots & A_{3r} \\ 0 & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{rr} \end{array}\right] \end{aligned}$$

が成り立つ。これを繰り返すことにより

$$\det A = \det A_{11} \cdot \det A_{22} \cdot \cdots \cdot \det A_{rr}$$

が成り立つ。　□

[演習 5.4]　$\det(sI - A)$ を求めると

$$\begin{aligned} \det(sI - A) &= \det \begin{bmatrix} s-1 & -3 & -3 \\ -2 & s-1 & 1 \\ 0 & 0 & s+1 \end{bmatrix} \\ &= (s+1)((s-1)^2 - 6) \end{aligned}$$

である。一方，$\det(sI - A_{11})$，$\det(sI - A_{22})$ はそれぞれ

$$\det(sI - A_{11}) = (s-1)^2 - 6, \quad \det(sI - A_{22}) = s + 1$$

である。よって，$\det(sI - A) = \det(sI - A_{11}) \cdot \det(sI - A_{22})$ が成り立っている。

[演習 5.5]　$\det A = 12$ である。つぎに，A の各ブロックを

$$A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad A_{12} = \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}, \quad A_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad A_{22} = 2$$

とし，ブロックに基づいて行列式を計算する。まず，$\det A_{11} = -4 \neq 0$ であるので A_{11} は正則である。このとき，$A_{22} - A_{21}\,A_{11}^{-1}A_{12} = -3$ である。よって，式 (5.65) が成り立つ。一方，A_{22} はあきらかに正則であり

$$A_{11} - A_{12}\,A_{22}^{-1}A_{21} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 3 & -9 \end{bmatrix}$$

である。これより，$\det(A_{11} - A_{12}\,A_{22}^{-1}A_{21}) = 6$ となるので式 (5.66) も成り立つ。

[演習 5.6]　直接計算することにより

$$\det(I_2 - A\,B) = \det\left(\begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}\right) = -15$$

である。一方

$$\det(I_3 - B\,A) = \det\left(\begin{bmatrix} -2 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}\right) = -15$$

である。よって，式 (5.67) が成り立つ。

[演習 5.7]　$A\,B$ の固有値は

$$\det(s\,I_2 - A\,B) = \det\left(s\,I_2 - \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}\right) = s^2 - 8\,s - 8$$

より $4 \pm 2\sqrt{2}$ である。一方，$B\,A$ の固有値は

$$\det(s\,I_3 - B\,A) = \det\left(s\,I_3 - \begin{bmatrix} 3 & 3 & 7 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 5 \end{bmatrix}\right) = s\,(s^2 - 8\,s - 8)$$

より 0，$4 \pm 2\sqrt{2}$ である。よって，補題 5.1 の主張が成り立っている。

[演習 5.8]　A を右からかける場合は以下の通り。

$$\begin{aligned}
&\left(\begin{bmatrix} A_{11}^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix} \varDelta_{22} \begin{bmatrix} -A_{21}\,A_{11}^{-1} & I \end{bmatrix}\right) \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix} \varDelta_{22} \begin{bmatrix} 0 & A_{22} - A_{21}\,A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -A_{11}^{-1}A_{12} \\ I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & I \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

左からかける場合も同様である。

[演習 5.9]　$I_2 - B\,C = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}$ であるので，

$$(I_2 - B\,C)^{-1}B = \begin{bmatrix} -6 & -3 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 5 & -18 & 4 \end{bmatrix}$$

である。一方

$$I_3 - C\,B = \begin{bmatrix} -2 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}$$

より

$$B\,(I - C\,B)^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & -3 & -7 \\ -1 & 1 & -2 \\ -2 & -3 & -4 \end{bmatrix}^{-1} = -\frac{1}{15}\begin{bmatrix} 0 & 9 & 3 \\ 5 & -18 & 4 \end{bmatrix}$$

である。よって，式 (5.86) が成り立つ。

[演習 5.10]　再帰的な方法で求める。与えられた A，b に基づいて，各行列を

$$A_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad C_1 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad b_0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad d_1 = -1, \quad d_2 = 2$$

と定める。まず，

$$P_0 = A_0^T A_0 = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad x_0 = P_0^{-1} A_0^T\, b_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

である。式 (5.110)，式 (5.111) を用いて P，x を更新することで

$$x_1 = \frac{1}{11}\begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 4 & 10 \end{bmatrix}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad P_1 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}$$

である。x_2 が $\|A\,x - b\|$ を最小にする x である。つぎに，一括で求めると

$$P = A^T A = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 3 & 11 \end{bmatrix}, \quad x = P^{-1} A^T b = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

であり，それぞれ上記の P_2，x_2 と一致している。

[演習 5.11]　シルベスターの判定法を用いると，まず R について $6 > 0$，$\det R = 5 > 0$ より $R > 0$ である。$Q = Q_1$ のとき $P_1 = \begin{bmatrix} Q_1 & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ とすると

$$10 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 59 > 0, \quad \det P_1 = 1 > 0$$

であるので $P_1 > 0$ である。このとき，$Q_1 > 0$ かつ

$$R - S^T Q_1^{-1} S = \frac{1}{10}\begin{bmatrix} 59 & 7 \\ 7 & 1 \end{bmatrix} > 0$$

が成り立つ。さらに，$R > 0$ かつ

$$Q_1 - S\,R^{-1} S^T = \frac{1}{5} > 0$$

も成り立つ。

つぎに，$Q = Q_2$ の場合を考える。$P_2 = \begin{bmatrix} Q_2 & S \\ S^T & R \end{bmatrix}$ とすると

$$3 > 0, \quad \det\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} = 17 > 0, \quad \det P_2 = -36 < 0$$

なので $P_2 \not> 0$ である。このとき，$Q_2 > 0$ であるが

$$R - S^T Q_2^{-1} S = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 17 & 0 \\ 0 & -6 \end{bmatrix} \not> 0$$

である。また，$R > 0$ であるが

$$Q_2 - S\,R^{-1} S^T = -\frac{34}{5} \not> 0$$

である。以上より，補題 5.5 の関係が成り立っていることが確認できる。

６章

[演習 6.1]　直接計算することにより $x^* y = 1 + \mathbf{i}$ である。一方

$$x_r = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}, \quad y_r = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad y_i = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

を用いて式 (6.1) の右辺を計算すると

$$x_r^T x_r + x_i^T y_i + (x_r^T y_i - x_i^T y_r)\,\mathbf{i} = 1 + \mathbf{i}$$

が成り立つ。よって，式 (6.1) の統合が成り立っている。

[演習 6.2]　以下の通り。

- 式 (6.3)：$(x,\, \alpha\, y + \beta\, z) = x^*(\alpha\, y + \beta\, z) = \alpha\, x^* y + \beta\, x^* z = \alpha\,(x, y) + \beta\,(x, z)$ より成り立つ。
- 式 (6.4)：$(\alpha\, x + \beta\, y,\, z) = (\bar{\alpha}\, x^* + \bar{\beta}\, y^*)\, z = \bar{\alpha}\, x^* z + \bar{\beta}\, y^* z = \bar{\alpha}\,(x, z) + \bar{\beta}\,(y, z)$ より成り立つ。
- 式 (6.5)：(x, y) がスカラーであることに着目すると $\overline{(x, y)} = (x^* y)^* = y^* x = (y, x)$ が成り立つ。
- 式 (6.6)：式 (6.1) より $(x, x) = x^* x = x_r^T x_r + x_i^T x_i \geq 0$ である。さらに，$(x, x) = 0$ ならば $x_r = x_i = 0$ であるので $x = 0$ である。逆に $x = 0$ ならば $(x, x) = x^* x = 0$ である。

[演習 6.3]　直接計算することにより $\|x\| = \sqrt{x^* x} = \sqrt{2 + 13} = \sqrt{15}$ である。また，$x^* y_1$，$x^* y_2$ を計算すると，それぞれ $x^* y_1 = 1 + \mathbf{i}$，$x^* y_2 = 0$ であるので，x と y_1 は直交しない一方で x と y_2 は直交する。

[演習 6.4]　以下の通り。

- 式 (6.10)：$\|\alpha\, x\| = \sqrt{(\bar{\alpha}\, x^*)\cdot(\alpha x)} = \sqrt{|\alpha|^2\, x^* x} = |\alpha|\, \|x\|$ より成り立つ。
- 式 (6.11)：$x = x_r + x_i\, \mathbf{i}$，$z_x = \begin{bmatrix} x_r \\ x_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$ とすると

$$\|x\|^2 = x^* x = (x_r^T - x_i^T\, \mathbf{i})(x_r + x_i\, \mathbf{i}) = x_r^T x_r + x_i^T x_i = z_x^T z_x = \|z_x\|^2$$

すなわち $\|x\| = \|z_x\|$ が成り立つ。同様に $y = y_r + y_i\, \mathbf{i}$，$z_y = \begin{bmatrix} y_r \\ y_i \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n}$ とすると

$$\|y\| = \|z_y\|, \quad \|x + y\| = \|z_x + z_y\|$$

が成り立つ。これより

$$\|x + y\| = \|z_x + z_y\| \le \|z_x\| + \|z_y\| = \|x\| + \|y\|$$

が成り立つので，式 (6.11) が成り立つ。

[演習 6.5]　U_1，$U_2 \in \mathbf{C}^{n\times n}$ はいずれもユニタリ行列とする。このとき，

$$(U_1\, U_2)^*(U_1\, U_2) = U_2^*\, U_1^*\, U_1\, U_2 = U_2^*\, U_2 = I_n$$

が成り立つ。同様にして $(U_1\, U_2)\,(U_1\, U_2)^* = I_n$ も成り立つ。よって，$U_1\, U_2$ もユニタリ行列である。　□

[演習 6.6]　P，S，U はそれぞれ実対称行列，実歪み対称行列，直交行列であるとする。このとき

$$P^* P = P^T P = P\, P = P\, P^*$$

$$S^*\, S = S^T\, S = (-S)\, S = S\,(-S) = S\, S^*$$

$$U^*\, U = U^T\, U = I = U\, U^T = U\, U^*$$

がそれぞれ成り立つ。よって，いずれも正規行列である。　□

[演習 6.7]　A の特性多項式は $\det(s\, I_3 - A) = (s-1)\,(s^2+1)$ であるので，A の固有値は 1，$\pm\mathbf{i}$ である。固有値 1 に対する固有ベクトルは $v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$ である。固有値 $\mathbf{i}$ に対する固有ベクトルを求めるために，$\begin{bmatrix} \mathbf{i} I_3 - A \\ I_3 \end{bmatrix}$ に対して複素数ベクトル空間上の列基本変形を行うと

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 1-\mathbf{i} & 0 & 0 \\ 2 & 2-\mathbf{i} & 0 \\ \hdashline 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1+\mathbf{i} & 1+\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right]$$

を得ることができる。よって，固有値 $\mathbf{i}$ に対する固有ベクトルは $v_{\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1+\mathbf{i} \\ 2 \end{bmatrix}$ である。同様にして，固有値 $-\mathbf{i}$ に対する固有ベクトルは $v_{-\mathbf{i}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1-\mathbf{i} \\ 2 \end{bmatrix}$ である。

[演習 6.8]　図 6.1 のアルゴリズムに従って計算すると

$$U_1 = u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$w_2 = (I_4 - U_1 U_1^*)\, v_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ \mathbf{i} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} \\ 0 & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$w_3 = (I_4 - U_2 U_2^*)\, v_3 = 0, \quad U_3 = U_2$$

$$w_4 = (I_4 - U_3 U_3^*)\, v_4 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad u_4 = \frac{w_4}{\|w_4\|} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad U_4 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

である。よって，$U = U_4$ である。この U に対して式 (6.31) は自明に成り立つ。式 (6.32) については

$$U^*U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & \frac{-\mathbf{i}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} \end{bmatrix} = I_3$$

であるので成り立つ。列基本変形を用いると，$\begin{bmatrix} V \\ I_4 \end{bmatrix}$ を

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{i} & 0 \\ \hdashline 1 & -\mathbf{i} & -1-\mathbf{i} & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2\mathbf{i} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

と変形することができる。よって，式 (6.33) も成り立つ。

[演習 6.9]　補題 6.2 の証明に従って計算すればよい。実際に計算すると

$$v_1 = x, \quad U_1 = u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1+\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

$$w_2 = (I - U_1 U_1^*) \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad U_2 = \begin{bmatrix} \frac{1+\mathbf{i}}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1-\mathbf{i}}{2} & \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

$$w_3 = (I_2 - U_2 U_2^*) \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = 0, \quad U_3 = U_2$$

より $U = U_3$ は式 (6.53) を満足するユニタリ行列である。

[演習 6.10]　A の固有値は -1，$\frac{1\pm\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2}$ である。固有値 -1 に対する固有ベクトルは $x_{1,-1}=\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix}$ である。補題 6.2 に基づいて，$x_{1,-1}$ に対応するユニタリ行列 Q_1 を求めると

$$Q_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} & 0\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{-1}{\sqrt{5}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

である。このとき

$$Q_1^*A\,Q_1=\begin{bmatrix}-1 & 3 & -\frac{13}{\sqrt{5}}\\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ 0 & \sqrt{5} & 1\end{bmatrix}$$

であるので $A_2=\begin{bmatrix}0 & -\frac{1}{\sqrt{5}}\\ \sqrt{5} & 1\end{bmatrix}$ とする。A_2 の固有値は $\frac{1\pm\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2}$ である。固有値 $\frac{1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2}$ に対する A_2 の固有ベクトルは $x_{2,+}=\begin{bmatrix}-2\\ \sqrt{5}(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})\end{bmatrix}$ である。$x_{2,+}$ に対応するユニタリ行列を求めると

$$Q_2=\begin{bmatrix}\frac{-1}{\sqrt{6}} & \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{6}}\\ \frac{\sqrt{5}\,(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})}{2\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

である。このとき

$$U=Q_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{2}{\sqrt{6}}\\ \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{6}}\\ 0 & \frac{\sqrt{5}\,(1+\sqrt{3}\,\mathbf{i})}{2\sqrt{6}} & \frac{1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2\sqrt{6}}\end{bmatrix}$$

$$U^*A\,U=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2^*\end{bmatrix}Q_1^*A\,Q_1\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & Q_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -\frac{19+13\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2\sqrt{6}} & \frac{17-13\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2\sqrt{30}}\\ 0 & \frac{1+\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{2} & \frac{3-2\sqrt{3}\,\mathbf{i}}{\sqrt{5}}\\ 0 & 0 & \frac{1-\sqrt{3}\mathbf{i}}{2}\end{bmatrix}$$

であり，シュール分解が得られる。

[演習 6.11]　与えられた行列を A とする。このとき

$$A^*A=A\,A^*=\begin{bmatrix}6 & -2 & -1\\ -2 & 3 & -2\\ -1 & -2 & 6\end{bmatrix}$$

が成り立つので，A は正規行列である。A の固有値は 1，$1\pm\sqrt{6}\,\mathbf{i}$ である。固有値 1 に対する固有ベクトル $\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$ に基づいてユニタリ行列を構成すると

$$Q_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0\\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}}\end{bmatrix}$$

が得られ，その結果

$$Q_1^* A\, Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{6} \\ 0 & -\sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる。つぎに，$A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & 1 \end{bmatrix}$ とすると A_2 の固有値は $1 \pm \sqrt{6}\,\mathbf{i}$ である。$1 + \sqrt{6}\,\mathbf{i}$ に対する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}$ に基づいてユニタリ行列を構成すると

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \mathbf{i} & -\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

が得られる。このとき

$$U = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix}$$

とすると

$$U^* A\, U = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 + \sqrt{6}\,\mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \sqrt{6}\,\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

が成り立つ。よって，A のシュール分解によって対角行列が得られる。

[演習 6.12]　P の固有値は 0，1，2 である。固有値 1 に対する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ に対する直交行列を構成すると

$$Q_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q_1^T P\, Q_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

が得られる。つぎに $P_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ とすると，P_2 の固有値は 0，2 である。固有値 2 に対する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ に基づいて直交行列を構成すると

$$Q_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad Q_2^T P_2\, Q_2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。以上より

$$U = Q_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{-1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$$

は P を対角化する直交行列である。

[演習 6.13] $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ の固有値は $\cos\theta \pm \sin\theta\,\mathbf{i}$，$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ の固有値は ± 1 である。よって，いずれの固有値についても，その絶対値は 1 である。

[演習 6.14] H，S はそれぞれエルミート行列，歪みエルミート行列であるとする。このとき

$$H^*H = H\,H = H\,H^*, \quad S^*S = (-S)\,S = S\,(-S) = S\,S^*$$

が成り立つので，H，S は正規行列である。 □

[演習 6.15] A は正規行列なので，あるユニタリ行列 $U \in \mathbf{C}^{n\times n}$ が存在して式 (6.98) が成り立つ。さらに，A がエルミート行列なら $A^* = A$，すなわち $U^*\Lambda^*U = U^*\Lambda\,U$ が成り立つ。これより $\Lambda^* = \Lambda$ が成り立つので，A の任意の固有値は実数である。逆に，A の任意の固有値が実数ならば $A^* = U^*\Lambda^*U = U^*\Lambda\,U = A$ が成り立つので A はエルミートである。歪みエルミート行列の場合も同様である。 □

[演習 6.16] $A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ とすると $A_1^T = -A_1$ が成り立つので A は実歪み対称行列である。また，その固有値は $\pm\mathbf{i}$ である。つぎに

$$A_2 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると，$A_2^T = -A_2$ が成り立つので A_2 も実歪み対称行列である。また，その固有値は 0，$\pm\sqrt{3}\,\mathbf{i}$ である。このように，A_1，A_2 の固有値はいずれも純虚数（0 を含む）である。

[演習 6.17] A の固有値は

$$\det(sI_2 - A) = s^2 - (1 + 2\,\mathbf{i})\,s - 3\,(1 - \mathbf{i})$$

であることから $s = \frac{1+2\,\mathbf{i} \pm re^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{i}}}{2}$ である。ただし

$$r = (145)^{\frac{1}{4}}, \quad \tan\theta = \frac{8}{9} \quad \left(0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

である。$e^{-\frac{\theta}{2}\mathbf{i}}$ の実部，虚部がそれぞれ

$$\cos\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{1}{(145)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\sqrt{145}+9}{2}}$$

$$-\sin\frac{\theta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{2}} = \frac{-1}{(145)^{\frac{1}{4}}}\sqrt{\frac{\sqrt{145}-9}{2}}$$

であることに着目すると，A の固有値の実部と虚部はそれぞれ

$$\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{\frac{\sqrt{145}+9}{2}}\right), \quad \frac{1}{2}\left(2 \mp \sqrt{\frac{\sqrt{145}-9}{2}}\right) \quad \text{（複号同順）}$$

である。一方，$H = \frac{A+A^*}{2}$，$S = \frac{A-A^*}{2}$ とすると

$$H = \begin{bmatrix} 1 & \frac{3-\mathbf{i}}{2} \\ \frac{3+\mathbf{i}}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad S = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & -\frac{1+\mathbf{i}}{2} \\ \frac{1-\mathbf{i}}{2} & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

であり，H，S の固有値はそれぞれ $\frac{1\pm\sqrt{11}}{2}$，$\frac{\sqrt{2}\pm 1}{\sqrt{2}}\mathbf{i}$ である。いずれも，A の固有値の実部，虚部とは異なる値である。

[演習 6.18]　A_1 の固有値は $1 \pm \sqrt{2}$ であるので A_1 は正定ではない。ここで

$$A_{1e} = \begin{bmatrix} A_{1r} & -A_{1i} \\ A_{1i} & A_{1r} \end{bmatrix}, \quad A_{1r} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{1i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると $A_{1r} \not> 0$ であるので補題5.5より $A_{1e} \not> 0$ である。一方，A_2 の固有値は $2 \pm \sqrt{3}$ であるので $A_2 > 0$ である。ここで

$$A_{2e} = \begin{bmatrix} A_{2r} & -A_{2i} \\ A_{2i} & A_{2r} \end{bmatrix}, \quad A_{2r} = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

とすると，

$$3 > 0, \quad \det A_{2r} = 2 > 0, \quad \det \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} = 3 > 0, \quad \det A_{2e} = 1 > 0$$

であるので $A_{2e} > 0$ である。よって，A_1，A_2 に対して補題6.11の条件 (3) の等価性が成り立つ。

[演習 6.19]　例えば以下の行列である。

$$(1)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad (2)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (3)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad (4)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (5)\ \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad (6)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$(7)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad (8)\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (9)\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}, \quad (10)\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 0 & -\mathbf{i} \end{bmatrix}$$

7章

[演習 7.1]　$A^* A$ の特性多項式は

$$\det\left(s I_2 - \begin{bmatrix} 6 & 12\,\mathbf{i} \\ -12\,\mathbf{i} & 24 \end{bmatrix}\right) = s\,(s - 30)$$

である。よって，A の特異値は 0，$\sqrt{30}$ である。同様にして，$\bar{A}^* \bar{A} = A^T A$ の特性多項式は

$$\det\left(s I_2 - \begin{bmatrix} 6 & -12\,\mathbf{i} \\ 12\,\mathbf{i} & 24 \end{bmatrix}\right) = s\,(s - 30)$$

であることから，$\bar{A}$ の特異値も 0，$\sqrt{30}$ である。このように，A と $\bar{A}$ の特異値は一致している。

[演習 7.2]　A^*A の固有値 30 に対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ -2\,\mathbf{i} \end{bmatrix}$ に基づいてユニタリ行列を構成すると

$$V = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2\,\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

が得られる。さらに，

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

を用いて $W = AV\hat{\Sigma}^{-1}$ を計算すると

$$W = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ \mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。ここで，

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ \mathbf{i} \end{bmatrix}$$

に基づいてユニタリ行列を構成すると

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{\mathbf{i}}{\sqrt{6}} & \frac{-\mathbf{i}}{\sqrt{30}} & \frac{-2\mathbf{i}}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

が得られる。以上より A の特異値分解を

$$A = U\begin{bmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^*$$

と与えることができる。

[演習 7.3] $A^TA = \begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 24 \end{bmatrix}$ の固有値は 0，30 である。固有値 30 に対応する固有ベクトル $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ から直交行列 $V = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ が得られる。$\hat{\Sigma}$ を

$$\hat{\Sigma} = \begin{bmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

と与えて $W = AV\hat{\Sigma}^{-1}$ を計算すると

$$W = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

が得られる。ここで，

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

に基づいて直交行列を構成すると

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{5}{\sqrt{30}} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix}$$

が得られる。以上より A の特異値分解を

$$A = U\begin{bmatrix} \sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}V^T$$

と実行列の範囲で与えることができる。

[演習 7.4]　A の特異値分解を $A = U_1\,\Sigma_1\,V_1^*$ とすると，$A^\dagger = V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^*$ である。このとき

$$\begin{aligned} A\,A^\dagger A &= U_1\,\Sigma_1\,V_1^* \cdot V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^* \cdot U_1\,\Sigma_1\,V_1^* = U_1\,\Sigma_1\,\Sigma_1^{-1}\,\Sigma_1\,V_1^* = U_1\,\Sigma_1\,V_1^* = A \\ A^\dagger A\,A^\dagger &= V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^* \cdot U_1\,\Sigma_1\,V_1^* \cdot V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^* \cdot = V_1\,\Sigma_1^{-1}\,\Sigma_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^* = V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^* = A^\dagger \end{aligned}$$

が成り立つので，式 (7.70)，(7.71) が成り立つことを確認できる。

[演習 7.5]　A の特異値分解を $A = U_1\,\Sigma_1\,V_1^*$ とすると，$A^\dagger = V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^*$ である。このとき

$$\begin{aligned} (A^\dagger)^\dagger &= \left(V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^*\right)^\dagger = (U_1^*)^*\left(\Sigma_1^{-1}\right)^{-1}(V_1)^* = U_1\,\Sigma_1\,V_1^* = A \\ (A^*)^\dagger &= (V_1\,\Sigma_1\,U_1^*)^\dagger = U_1\,\Sigma_1^{-1}\,V_1^* = \left(V_1\,\Sigma_1^{-1}\,U_1^*\right)^* = (A^\dagger)^* \end{aligned}$$

が成り立つので，式 (7.82)，(7.83) が成り立つことを確認できる。

[演習 7.6]　演習 7.3 より

$$A^\dagger = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{30}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{5}{\sqrt{30}} & \frac{-2}{\sqrt{30}} & \frac{-1}{\sqrt{30}} \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{-2}{\sqrt{5}} \end{bmatrix} = \frac{1}{30}\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

である。これより

$$(I_3 - A\,A^\dagger)\,B = \frac{1}{6}\begin{bmatrix} 5 & -2 & -1 \\ -2 & 2 & -2 \\ -1 & -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = 0$$

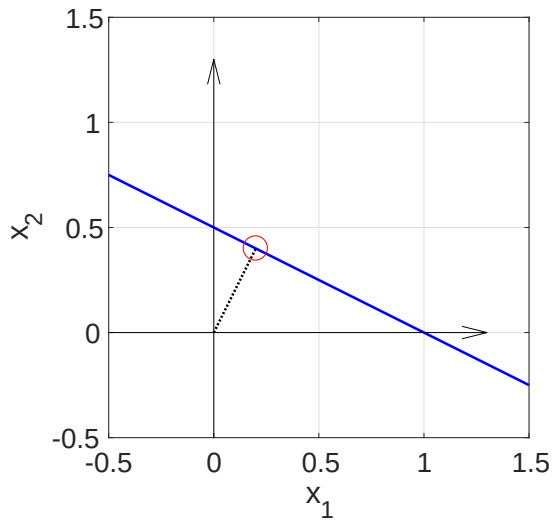
が成り立つ。また

$$x_* = A^\dagger B = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

である。さらに

$$I_2 - A^\dagger A = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

であることから，$A\,X = B$ を満足する X の集合は $x_* + \mathrm{span}\left(\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}\right)$，すなわち，方向ベクトルが $\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ で x_* を通る直線である。解集合を下図に図示する。青の実線が解集合，赤丸が x_* である。図より，x_* が解集合の中で最も原点に近い点であることが確認できる。



[演習 7.7]　A^TA の固有値は

$$A^TA = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 4 \\ -2 & 3 & -1 \\ 4 & -1 & 7 \end{bmatrix}$$

より 0，3，10 であるので A の最大特異値は $\sqrt{10}$ である。同様にして A_{11}，A_{12}，A_{21}，A_{22} の最大特異値を求めると，それぞれ $\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$，$\sqrt{2}$，1 であり，いずれも $\sqrt{10}$ 以下である。

[演習 7.8]　演習 7.7 より $\gamma_1 = 2\sqrt{10}$，$\gamma_2 = \frac{\sqrt{10}}{2}$ である。$\gamma = \gamma_1$ に対して補題 7.11 の (iii)，(vi) が成り立つことを確認する。(ii)，(iv)，(v) については同様なので省略する。まず，(iii) について

$$\gamma_1^2 I_3 - A^TA = \begin{bmatrix} 37 & 2 & -4 \\ 2 & 37 & 1 \\ -4 & 1 & 33 \end{bmatrix}$$

である。このとき

$$37 > 0, \quad \det\begin{bmatrix} 37 & 2 \\ 2 & 37 \end{bmatrix} = 1365 > 0, \quad \det(\gamma_1^2 I_3 - A^TA) = 44400 > 0$$

であるので，シルベスターの判定法より $\gamma_1^2 I_3 - A^TA > 0$ である。つぎに，(vi) について

$$\begin{bmatrix} \gamma_1 I_4 & A \\ A^T & \gamma_1 I_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 1 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} \end{array}\right]$$

である。このとき

$$\begin{bmatrix} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} \end{bmatrix} > 0, \quad \det\left[\begin{array}{cccc:c} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 & 2\sqrt{10} \end{array}\right] = 2960\sqrt{10} > 0$$

$$\det\left[\begin{array}{cccc:cc} 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2\sqrt{10} & 1 & -1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 & 2\sqrt{10} & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 2\sqrt{10} \end{array}\right] = 54600 > 0$$

$$\det\begin{bmatrix} \gamma_1 I_4 & A \\ A^T & \gamma_1 I_3 \end{bmatrix} = 88800\sqrt{10} > 0$$

であるので (vi) も成り立つ。

一方，γ_2 の場合，(iii) について

$$\gamma_2^2 I_3 - A^TA = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 2 & -4 \\ 2 & -\frac{1}{2} & 1 \\ -4 & 1 & -\frac{9}{2} \end{bmatrix}$$

であり，$-\frac{1}{2} < 0$ より $\gamma_2^2 I_3 - A^T A \not> 0$ である。(vi) の場合

$$\begin{bmatrix} \gamma_2 I_4 & A \\ A^T & \gamma_2 I_3 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{cccc:ccc} \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 1 & -1 & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right]$$

である。このとき

$$\det \left[\begin{array}{cccc:c} \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{10}}{2} & 1 \\ \hdashline 1 & 1 & 0 & 1 & \frac{\sqrt{10}}{2} \end{array}\right] = -\frac{5\sqrt{10}}{8} < 0$$

であるので $\begin{bmatrix} \gamma_2 I_4 & A \\ A^T & \gamma_2 I_3 \end{bmatrix} \not> 0$ である。以上より，補題 7.11 の (i)，(iii), (vi) の等価性を確認することができる。

８章

[演習 8.1]　$\nu_1(A) = \sqrt{13}$，$\nu_2(A) = 2$

[演習 8.2]　$\mu_1(x) = 5$，$\mu_1(y) = 4$，$\mu_1(x+y) = 7$ であるので μ_1 に対して式 (8.10) が成り立つ。一方，$\mu_\infty(x) = 3$，$\mu_\infty(y) = 2$，$\mu_\infty(x+y) = 3$ であるので，μ_∞ に対しても式 (8.10) が成り立つ。

[演習 8.3]　$\|A\|_F = 2\sqrt{10}$ である。一方，A を列展開および行展開したベクトル

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \\ 5 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 3 & -1 & 1 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

のユークリッドノルムはいずれも $2\sqrt{10}$ である。これより，両者が等しいことが確認できる。

[演習 8.4]　AA^T の固有値は $20 \pm \sqrt{269}$ であるので，A の最大特異値は $\sqrt{20+\sqrt{269}} \approx 6.03$ である。また，BB^T の固有値は $\frac{7\pm\sqrt{13}}{2}$ であるので，B の最大特異値は $\sqrt{\frac{7+\sqrt{13}}{2}} \approx 2.30$ である。一方，

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 6 & 2 \end{bmatrix}$$

より

$$(A+B)(A+B)^T = \begin{bmatrix} 11 & 20 \\ 20 & 40 \end{bmatrix}$$

の固有値は $\frac{51\pm\sqrt{2441}}{2}$ であることから，$A+B$ の最大特異値は $\sqrt{\frac{51+\sqrt{2441}}{2}} \approx 7.09$ である。よって，三角不等式が成り立っている。

[演習 8.5]　任意の $w \in \mathbf{F}^n$ に対して次式が成り立つ。

$$\|A\,w\|_\infty = \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \left| \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \right| \le \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|\,|w_j|$$

$$\le \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \left(\sum_{j=1}^n |a_{ij}| \max_{j\in\{1,\dots,n\}} |w_j| \right) = \left(\max_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}| \right) \|w\|_\infty$$

これは次式が成り立つことを意味する。

$$\max_{w\in\mathbf{F}^n\setminus\{0\}} \frac{\|A\,w\|_\infty}{\|w\|_\infty} \le \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

ここで，$\displaystyle\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ を最大にする i を i_* とし，$\hat{w} \in \mathbf{F}^n$ を

$$\hat{w}_j = \begin{cases} 1 & (a_{i_*j} \ge 0) \\ -1 & (a_{i_*j<0}) \end{cases}$$

と与える。このとき，$\|\hat{w}\|_\infty = 1$ である。また，

$$\|A\,\hat{w}\|_\infty \quad \ge \quad \left| \sum_{j=1}^n a_{i_*j} \hat{w}_j \right| = \sum_{j=1}^n |a_{i_*j}| = \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

が成り立つ。すなわち，

$$\frac{\|A\,w\|_\infty}{\|w\|_\infty} = \max_{i\in\{1,\dots,m\}} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

を満足する $w \in \mathbf{F}^n$ が存在する。よって，式 (8.59) が成り立つ。　□

[演習 8.6]　各行列に対して $\|\cdot\|_{1/1}$，$\|\cdot\|_{\infty/\infty}$ を計算すると

$$\|A\|_{1/1} = \max\{1,8,3\} = 8, \quad \|B\|_{1/1} = \max\{2,1,2\} = 2,$$

$$\|A+B\|_{1/1} = \max\{1,9,3\} = 9 \le 8+2,$$

$$\|A\|_{\infty/\infty} = \max\{4,8\} = 8, \quad \|B\|_{\infty/\infty} = \max\{3,2\} = 3,$$

$$\|A+B\|_{\infty/\infty} = \max\{5,8\} = 8 \le 8+3$$

であるので，いずれも三角不等式が成り立っている。

[演習 8.7]　まず

$$A\,B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

である。各ノルムを計算すると

$$\|A\| = \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}}, \quad \|B\| = \sqrt{3},$$

$$\|A\,B\| = \sqrt{7+\sqrt{43}} \approx 3.682 \le \sqrt{\frac{5+\sqrt{17}}{2}} \cdot \sqrt{3} \approx 3.699$$

$$\|A\|_{1/1} = \max\{3,2\} = 3, \quad \|B\|_{1/1} = \max\{1,2,1\} = 2,$$

$$\|A,B\|_{1/1} = \max\{3,5,2\} = 5 \le 3 \times 2$$

$$\|A\|_{\infty/\infty} = \max\{2,1,2\} = 2, \quad \|B\|_{\infty/\infty} = \max\{2,2\} = 2,$$

$$\|A\,B\|_{\infty/\infty} = \max\{4,2,4\} = 4 \le 2 \times 2$$

であるので，式 (8.71)，(8.72)，(8.73) が成り立つ。一方

$$\|A\|_\infty = 1, \quad \|B\|_\infty = 1, \quad \|A\,B\|_\infty = 2$$

であるので式 (8.74) は成り立たない。

[演習 8.8] $\|A\|_F = \sqrt{5}$，$\|B\|_F = 2$，$\|A\,B\|_F = \sqrt{14}$ より成り立つ。

[演習 8.9] 演習 8.4 より，$\|A\| = \sqrt{20+\sqrt{269}}$ である。また，

$$UA = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{3+5\sqrt{3}}{2} & \frac{-1+2\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{5-3\sqrt{3}}{2} & \frac{2+\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$$

$$(UA)^T(UA) = \begin{bmatrix} \frac{100+26\sqrt{3}}{4} & \frac{-26+20\sqrt{3}}{4} \\ \frac{-26+20\sqrt{3}}{4} & \frac{60-26\sqrt{3}}{4} \end{bmatrix}$$

$$\det\left(sI_2 - (UA)^T(UA)\right) = s^2 - 40\,s + 131$$

より UA の最大特異値は $\sqrt{20+\sqrt{269}} = \|A\|$ である。一方，$\|A\|_F = 2\sqrt{10}$，

$$\|UA\|_F = \frac{\sqrt{160}}{2} = 2\sqrt{10}$$

より $\|A\|_F = \|UA\|_F$ が成り立つ。演習 8.6 より $\|A\|_{1/1} = 8$，$\|A\|_{\infty/\infty} = 8$ である。これに対し，

$$\|UA\|_{1/1} = \max\left\{\frac{1+\sqrt{3}}{2}, -1+4\sqrt{3}, \frac{1+3\sqrt{3}}{2}\right\} = -1+4\sqrt{3} \approx 5.93$$

$$\|UA\|_{\infty/\infty} = \max\left\{1+4\sqrt{3}, -1+2\sqrt{3}\right\} = 1+4\sqrt{3} \approx 7.93$$

であるので，$\|A\|_{1/1} \ne \|UA\|_{1/1}$，$\|A\|_{\infty/\infty} \ne \|UA\|_{\infty/\infty}$ である。

[演習 8.10] 例えば

$$A' = \begin{bmatrix} 1.01 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

とすればよい。このとき，A' は行フルランクで

$$\Delta = A' - A = \begin{bmatrix} 0.01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

のノルムは 0.01 である。

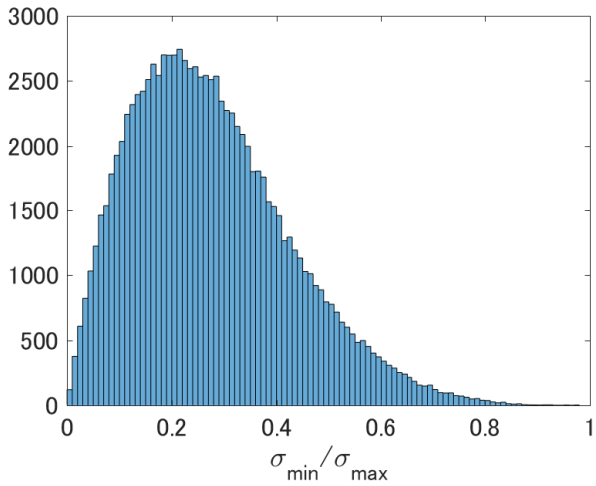
[演習 8.11]　例えば MATLAB では以下のスクリプトを実行すればよい。

```
N = 100;
M = rand(2,3,N);
norm_sigma = zeros(N,1);

for k = 1:N
  S = svd(squeeze(M(:,:,k)));
  norm_sigma(k) = min(S)/max(S);
end

max(norm_sigma)
min(norm_sigma)
```

結果は発生された乱数に依存するが，`rng('default')` を実行してシードを既定値にした場合，最大値は 0.819，最小値は 0.054 である。参考までに，行列を 10 万個生成したときの計算結果のヒストグラムは下図の通りである。



[演習 8.12]　$A^TA = \begin{bmatrix} 2 & 2.01 \\ 2.01 & 2.0201 \end{bmatrix}$ より A の最大特異値，最小特異値はそれぞれ

$$\sigma_{max}(A) = \sqrt{\frac{4.0201 + D}{2}}, \quad \sigma_{min}(A) = \sqrt{\frac{4.0201 - D}{2}}, \quad D = \sqrt{(4.0201)^2 - 0.0004}$$

である。これより，A の条件数は

$$\frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)} = \frac{0.02}{\sqrt{2\,(4.0201 + D)}} \approx 402$$

であり，h は

$$h = \frac{1}{1 - \frac{0.001}{\sigma_{min}(A)}} \frac{\sigma_{max}(A)}{\sigma_{min}(A)} \approx 503$$

である。すなわち，A の逆行列における誤差の割合は A に対する割合の 500 倍程度に拡大される可能性がある。一方，B の最大特異値，最小特異値はそれぞれ

$$\sigma_{max}(B) = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{2}}, \quad \sigma_{min}(B) = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{2}}$$

であるので，条件数は

$$\frac{\sigma_{max}(B)}{\sigma_{min}(B)} = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}} \approx 2.62$$

であり，h は

$$h = \frac{1}{1-\frac{0.001}{\sigma_{min}(B)}} \frac{\sigma_{max}(B)}{\sigma_{min}(B)} \approx 2.62$$

である。すなわち，B の逆行列における誤差の割合は B に対する割合の 2.6 倍程度と予想される。

[演習 8.13] $\delta_k = x_k - x_* = \begin{bmatrix} \frac{-1}{k+1} \\ \frac{1}{k} \end{bmatrix}$ であるので

$$\|\delta_k\|_1 = \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k}, \quad \|\delta_k\|_2 = \sqrt{\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k^2}}, \quad \|\delta_k\|_\infty = \frac{1}{k}$$

である。いずれも $k \to \infty$ で 0 に収束するので，x_k（$k \in \mathbf{N}$）は 1 ノルム，2 ノルム，∞ ノルムのいずれの意味においても x_* に収束する。

[演習 8.14] $\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする。$\lim_{k\to\infty} x_k = x_*$，$\lim_{k\to\infty} y_k = y_*$ が成り立つことから，ある $N_x \in \mathbf{N}$，$N_y \in \mathbf{N}$ が存在して次式が成り立つ。

$$\forall k \geq N_x \ \ \|x_k - x_*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall k \geq N_y \ \ \|y_k - y_*\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ここで，$N = \max\{N_x, N_y\}$ とすると

$$\forall k \geq N \ \ \|(x_k + y_k) - (x_* + y_*)\| = \|(x_k - x_*) + (y_k + y_*)\| \leq \|x_k - x_*\| + \|y_k + y_*\| \leq \varepsilon$$

が成り立つ。よって，式 (8.152) が示された。 □

[演習 8.15] 補題 8.12 より，以下の不等式が得られる。

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_2$$

$$\frac{1}{n}\|x\|_2 \leq \|x\|_\infty \leq \|x\|_2$$

$$\|x\|_\infty \leq \|x\|_1 \leq n\,\|x\|_\infty$$

よって，1 ノルム，2 ノルム，∞ ノルムはたがいに等価である。

[演習 8.16]

【問題訂正】 ノルム $\|\cdot\|_a$，$\|\cdot\|_b$ → <u>式 (8.167) を満足する</u>ノルム $\|\cdot\|_a$，$\|\cdot\|_b$

「$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\|_a = 0 \ \Rightarrow \ \lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\|_b = 0$」を証明する。$\varepsilon > 0$ が任意に与えられたとする。このとき，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\forall k \geq N \ \ \|x_k - x_*\|_a \leq \frac{\varepsilon}{M}$$

が成り立つ。式 (8.167) より $\frac{1}{M}\|x_k - x_*\|_b \le \|x_k - x_*\|_a$ が成り立つので，上式は次式を意味する。

$$\forall k \ge N \;\; \|x_k - x_*\|_b \le \varepsilon$$

よって，$\lim_{k\to\infty} \|x_k - x_*\|_b = 0$ が成り立つ。逆も同様である。

つぎに，「$\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_a = \infty \;\; \Rightarrow \;\; \lim_{k\to\infty} \|x_k\|_b = \infty$」を証明する。$\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_a = \infty$ より，任意の $K > 0$ に対して，ある $N \in \mathbf{N}$ が存在して

$$\forall k \ge N \;\; \|x_k\|_a \ge \frac{K}{m}$$

が成り立つ。式 (8.167) より $\|x_k\|_a \le \frac{1}{m}\|x_k\|_b$ が成り立つので，上式は次式を意味する。

$$\forall k \ge N \;\; \|x_k\|_b \ge K$$

よって，$\lim_{k\to\infty} \|x_k\|_b = \infty$ である。逆も同様である。 □

[演習 8.17] 定義 8.1 の条件が成り立つことを示せばよい。式 (8.7) は自明に成り立つ。$\{e_1, \ldots, e_n\}$ が基底であることから，$x = 0$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ である。このとき $\|x\|_{E,\infty} = 0$ である。逆に $\|x\|_{E,\infty} = 0$ ならば $a_1 = \cdots = a_n = 0$ であるので $x = 0$ である。よって，式 (8.8) も成り立つ。

$$\|\alpha\, x\|_{E,\infty} = \max_k |\alpha\, a_k| = \max_k |\alpha|\, |a_k| = |\alpha|\, \|x\|_{E,\infty}$$

より式 (8.9) が成り立つ。$y = b_1\, e_1 + \cdots b_n\, e_n$ とすると $\|x + y\|_{E,\infty} = \max_k |a_k + b_k|$ である。このとき，∞ ノルムが三角不等式を満足することから

$$\max_k |a_k + b_k| \le \max_k |a_k| + \max_k |b_k| = \|x\|_{E,\infty} + \|y\|_{E,\infty}$$

が成り立つ。以上より，$\|x\|_{E,\infty}$ はノルムである。

[演習 8.18] 行列 A，B，C を

$$A = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

とする。このとき

$$\|f(x) - f(y)\| = \|A\,(x - y)\,B\| \le \|A\|\, \|x - y\|\, \|B\| = (\|A\|\, \|B\|)\, \|x - y\|$$

が成り立つ。ここで，

$$\|A\| = \sqrt{\frac{3 + \sqrt{5}}{8}}, \quad \|B\| = \frac{1}{2}$$

であるので $\|A\|\, \|B\| \approx 0.405$ である。よって，$f(x)$ は縮小写像である。

まず手計算で x を求める。x を

$$x = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \\ x_{31} & x_{32} \end{bmatrix}$$

とする。$x = f(x)$ より $x_{31} = -1$，$x_{32} = 5$ および

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

が得られる。ここで

$$\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{15} \begin{bmatrix} 16 & 4 \\ 4 & 16 \end{bmatrix}$$

であることに着目すると

$$\begin{bmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{21} \\ x_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{-1} & -\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \\ 0 & \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} & 1 \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{552}{225} \\ \frac{948}{225} \\ \frac{36}{15} \\ \frac{24}{15} \end{bmatrix}$$

すなわち

$$x = \begin{bmatrix} \frac{552}{225} & \frac{948}{225} \\ \frac{36}{15} & \frac{24}{15} \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 2.45 & 4.21 \\ 2.40 & 1.60 \\ -1.00 & 5.00 \end{bmatrix}$$

が得られる。

つぎに，以下の MATLAB スクリプト

```
A = [ 1/2, 1/2, 0; 0 1/2 0; 0 0 0 ];
B = [ 0 1/2; 1/2 0 ];
C = [ 1 3; 2 1; -1 5 ];

X0 = rand(3,2)

Xold = X0;

while 1

    Xnew = A*Xold*B + C

    if norm(Xnew-Xold)/norm(Xold) < 1e-5
        break;
    end

    Xold = Xnew;

end
```

を実行すると

```
Xnew =

    2.4533    4.2133
    2.4000    1.6000
   -1.0000    5.0000
```

が得られ，手計算の結果と一致している。

[演習 8.19]　$x_k = \frac{A^{k-1}}{(k-1)!}$ とすると，式 (8.144) の級数を

$$I + A + \frac{1}{2}A + \frac{1}{3!}A^3 + \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

と書くことができる。ここで $\|A\|$ が A の誘導ノルムであることから $M_k = \frac{\|A\|^{k-1}}{(k-1)!}$ とすると

$$\|x_k\| \leq M_k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k = 1 + \|A\| + \frac{\|A\|}{2} + \frac{\|A\|^3}{3!} + \cdots = e^{\|A\|} < \infty$$

が成り立つ。よって，補題 8.23 より $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ は絶対収束する。

[演習 8.20]　正六角形を原点を中心に拡大したときに，その辺が x，y，$x+y$ を通るときの拡大率を求めればよい。よって，$\|x\| = \frac{2}{\sqrt{3}}$，$\|y\| = 2$，$\|x+y\| = \frac{2\,(1+\sqrt{3})}{\sqrt{3}}$ である。これより，三角不等式も成り立っている。