

## 第6章

問題 6-95  $x'' = -x$  ですので、一般解は、 $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$  です。 $x(0) = C_1 = 0$ ,  $x'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$  から、 $x'(0) = C_2 = 1$  ですから、求める厳密解は、 $x(t) = \sin t$  となります。数値計算は、例えばリスト A.15 のプログラムのようにすればよいでしょう。

リスト A.15 (Euler2.py)

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 fig, ax = plt.subplots()
5
6 ax.set_xlabel('t')
7 ax.set_ylabel('x')
8 ax.set_title('central-difference method')
9 ax.grid()
10
11 def g(t, x):
12     return -x
13
14 PI = np.pi
15 x0 = 0; y0 = 1
16 h = 0.5
17 t = np.arange(0, 2*PI, h)
18 x = []
19 x.append(x0)
20 x1 = x0 + y0*h + g(t[0], x0)*h**2/2
21 x.append(x1)
22
23 for j in range(1, len(t)-1):
24     x.append(2*x[j] - x[j-1] + g(t[j], x[j])*h**2)
25
26 ax.plot(t, x)
27 ax.plot(t, np.sin(t), linestyle='dotted')
28 ax.legend(['numerical solution', 'exact solution'])
29 fig.tight_layout()
30 plt.show()
```

リスト A.15 のプログラムを実行すると図 A.7 が描かれます。

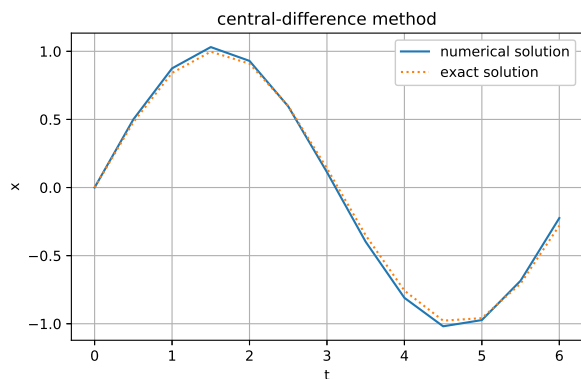


図 A.7 中心差分法による数値解と厳密解の比較 ( $h = 0.5$ )

問題 6-96 例えば、リスト A.16 のプログラムのようにすればよいでしょう。14 行目がホイン法、コメントアウトされている 15 行目が改良オイラー法のパラメータセットです。

### リスト A.16 (RK2.py)

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 fig, ax = plt.subplots()
5
6 ax.set_xlabel('t')
7 ax.set_ylabel('x')
8 ax.set_title('2nd order Runge-Kutta method')
9 ax.grid()
10
11 def f(t, x):
12     return x
13
14 alpha = 1/2; beta = 1/2; p = 1; q = 1 # Heun's method
15 #alpha = 0; beta = 1; p = 1/2; q = 1/2 # improved Euler method
16
17 x0 = 1; h = 0.1
18 t = np.arange(0, 3, h)
19 x = []
20 x.append(x0)
21 for j in range(len(t)-1):
22     k1 = f(t[j], x[j])
23     k2 = f(t[j] + p*h, x[j] + q*h*k1)
24     x.append(x[j] + h*(alpha*k1 + beta*k2))
25
26 ax.plot(t, x)
27 ax.plot(t, np.exp(t), linestyle='dotted')
28 ax.legend(['numerical solution', 'exact solution'])
29 fig.tight_layout()
30 plt.show()

```

問題 6-97

$$x_{j+1} = x_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q_2(t) dt$$

となります。ラグランジュの補間多項式  $Q_2(t)$  は

$$Q_2(t) = f_{j-2}L_{j-2}(t) + f_{j-1}L_{j-1}(t) + f_jL_j(t)$$

$$L_{j-2}(t) = \frac{(t-t_{j-1})(t-t_j)}{(t_{j-2}-t_{j-1})(t_{j-2}-t_j)} = \frac{1}{2h^2}(t-t_{j-1})(t-t_j)$$

$$L_{j-1}(t) = \frac{(t-t_{j-2})(t-t_j)}{(t_{j-1}-t_{j-2})(t_{j-1}-t_j)} = -\frac{1}{h^2}(t-t_{j-2})(t-t_j)$$

$$L_n(t) = \frac{(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})}{(t_j-t_{j-2})(t_j-t_{j-1})} = \frac{1}{2h^2}(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})$$

となります。

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{j-2}(t) &= \frac{1}{h^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_{j-1})(t - t_j) dt \\ &= \frac{1}{2h^2} \int_0^{t_{j+1}-t_j} (s + t_j - t_{j-1}) s ds \\ &= \frac{1}{2h^2} \int_0^h (s + h) s ds \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[ \frac{s^3}{3} + h \frac{s^2}{2} \right]_0^h \\ &= \frac{1}{2h^2} \frac{5}{6} h^3 = \frac{5}{12} h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{j-1}(t) &= -\frac{1}{h^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_{j-2})(t - t_j) dt \\ &= -\frac{1}{h^2} \int_0^h (s + 2h) s ds \\ &= -\frac{1}{h^2} \left[ \frac{s^3}{3} + h s^2 \right]_0^h \\ &= -\frac{1}{h^2} \frac{4}{3} h^3 = -\frac{4}{3} h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_j(t) &= \frac{1}{2h^2} \int_{t_j}^{t_{j+1}} (t - t_{j-2})(t - t_{n-1}) dt \\ &= \frac{1}{2h^2} \int_0^h (s + 2h)(s + h) ds \\ &= \frac{1}{2h^2} \left[ \frac{s^3}{3} + 3h \frac{s^2}{2} + 2h^2 s \right]_0^h \\ &= \frac{1}{2h^2} \frac{23}{6} h^3 = \frac{23}{12} h\end{aligned}$$

以上から、 $x_{j+1} = x_j + \frac{h}{12}(5f_{j-2} - 16f_{j-1} + 23f_j)$  となります。

**問題 6-98** リスト 6.5 のプログラムの 6 行目の `return` の直後をそれぞれ、`np.exp(-np.abs(x))`、`np.exp(-4*x**2)` とすればよいでしょう。前者ではルンゲ現象が起き、後者では起きません。

**問題 6-99** リスト 6.1 のプログラムにおいて、12 行目を `return -30*x`、15 行目を `t = np.arange(0, 1, h)` とすればよいでしょう。

**問題 6-100** テイラー展開の 2 次の項まで一致しますので、安定領域は

$$\left| 1 + h\lambda + \frac{(h\lambda)^2}{2} \right| < 1$$

となります。リスト 6.7 のプログラムの 9 行目を

```
stab = 1 + z + (z**2)/2
```

として実行すれば

$$x^{**4}/4 + x^{**3} + x^{**2}*y^{**2}/2 + 2*x^{**2} + x*y^{**2} + 2*x + y^{**4}/4 + 1$$

となります。よって、リスト 6.8 のプログラムの 12 行目をつぎのように書き直して実行すれば安定領域を描くことができます。安定領域がどんな形なのかは、実行してのお楽しみです。

$$z = x^{**4}/4 + x^{**3} + x^{**2}*y^{**2}/2 + 2*x^{**2} \\ + x*y^{**2} + 2*x + y^{**4}/4 + 1$$