

第5章

問題 5-84

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \cos t dt$$

の積分を実行して整理すると、 $x = Ce^{\sin t} - 1$ となります。 $x(0) = 1$ とすると、 $C = 2$ であることがわかります。つまり、この初期値問題の解は、 $x = 2e^{\sin t} - 1$ となります。

問題 5-85 リスト 5.1 のプログラムの 14 行目の後に、以下の 2 行を追加してください。

```
x_exact = 2*np.exp(np.sin(t)) - 1
plt.plot(t, x_exact)
```

問題 5-86

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \quad (\text{A.8})$$

odeint 関数を使って解いてみましょう。リスト A.10 のプログラムを実行すると、図 A.2 が描かれます。初期値を $(x_0, y_0) = (0.0, 0.1)$ とした解 (実線) 2 初期値を $(x_0, y_0) = (2.0, 1.0)$ とした解 (破線) を描いたものです。解曲線が円らしきものに近づいている様子がわかります。

リスト A.10 (limitcycle2.py)

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4
5 # Limitcycle
6 # x = v[0], y = v[1], z = v[2]
7 def Cycleeq(v, t):
8     dxdt = v[0] + v[1] - v[0]*(v[0]**2+v[1]**2)
9     dydt = -v[0] + v[1] - v[1]*(v[0]**2+v[1]**2)
10
11     return [dxdt, dydt]
12
13 initvar = [0.0, 0.1] # [x(0), y(0)]
14 t = np.linspace(0, 10, 400) # time
15 Clist = odeint(Cycleeq, initvar, t)
16
17 initvar2 = [2.0, 1.0] # [x(0), y(0)]
18 Clist2 = odeint(Cycleeq, initvar2, t)
19
20
21 fig, ax = plt.subplots()
22 ax.set_xlabel('x')
23 ax.set_ylabel('y')
24 ax.grid()
25 ax.plot(Clist[:,0], Clist[:,1], color="black")
26 ax.plot(Clist2[:,0], Clist2[:,1], linestyle = "dashed", color="black")
27 fig.tight_layout()
28 plt.show()
```

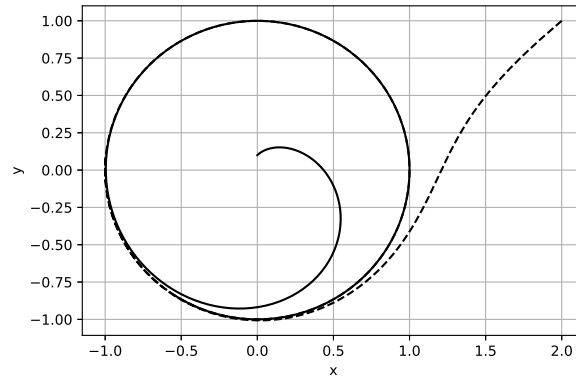


図 A.2 極限周期軌道（リミットサイクル）

極座標変換 $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$ を導入すると

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \frac{dr}{dt} \cos \theta - r \frac{d\theta}{dt} \sin \theta = r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ \frac{dy}{dt} &= \frac{dr}{dt} \sin \theta + r \frac{d\theta}{dt} \cos \theta = -r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \sin \theta\end{aligned}$$

となり, したがって

$$\begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ -r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \sin \theta \end{pmatrix}$$

となりますから

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ -r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ -r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{r} \begin{pmatrix} r \cos \theta & r \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \cos \theta \\ -r \cos \theta + r \sin \theta - r^3 \sin \theta \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r - r^3 \\ -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

となり, $\theta = -t + \theta_0$ になることがすぐにわかります。また

$$\frac{1}{r - r^3} \frac{dr}{dt} = 1$$

は変数分離形ですので, $r \neq 0$ かつ $r \neq 1$ とし ($r \neq -1$ はつねに成り立ちます), 両辺を積分すれば

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{r(1-r^2)} dr &= \int \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2} \frac{1}{1+r} + \frac{1}{2} \frac{1}{1-r} \right) dr \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{r^2(1+r)}{|1-r|} = t + C\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{|1-r|}{r^2(1+r)} = Ce^{-2t}$$

となります。 $t \rightarrow \infty$ では右辺は 0 に近づきますので、左辺において、 $r \rightarrow 1$ であることがわかります。つまり、軌道は単位円に近づいていきます。

問題 5-87 定理 5.2 の条件 (1) から (4) が満たされることはすぐにわかります。

$F(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$ が $x > 0$ において一点 $x = 1$ でのみ 0 となり、 $0 < x < 1$ では負、 $x > 1$ では正の値を持つ非減少関数であり、 $\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = \infty$ となりますから、条件 5 も満たされていることがわかります。よって、この微分方程式系は、原点を囲む安定な極限周期軌道をただ 1 つ持ちます。

問題 5-88 例えば、リスト A.11 のプログラムのようによればよいでしょう。実行すると図 A.3 が描かれます。

リスト A.11 (Lienardflow.py)

```

1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 PI = np.pi
5 n = 1000
6 x = np.linspace(-2*PI, 2*PI, n)
7 y = np.linspace(-PI, PI, n)
8
9 X, Y = np.meshgrid(x, y)
10
11 u = Y
12 v = -X - Y*(X**4 + 4*X**2-1)/((X**2+1)**2)
13
14 plt.streamplot(X, Y, u, v, density = 1.2, linewidth=0.8)
15 plt.show()

```

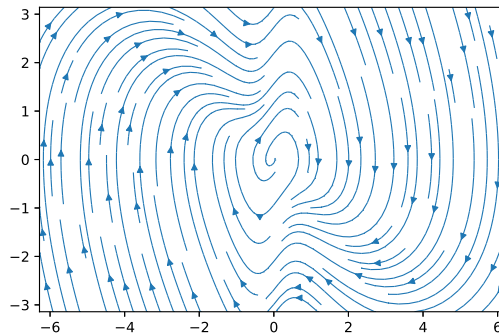


図 A.3 streamplot による相図

問題 5-89 図 5.15 は、リスト 5.5 のプログラムの 18 行目をつぎのようにして描きました。

```
t = np.linspace(0, 1000, 100000) # time
```

問題 5-90 連立方程式

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ -xz + rx - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

を解きます。 $x = y$ ですから、これを第2式、第3式に代入して、 y を消去すれば、 $x(-z + r - 1) = 0$ 、 $x^2 - bz = 0$ となります。 $r \leq 1$ のときは $x = y = z = 0$ (原点) のみが平衡点になります。 $r > 1$ のときは、原点に加えて、 $z = r - 1$ 、 $x = \pm\sqrt{b(r - 1)}$ となります。つまり、求める平衡点は、 $r \leq 1$ のときは $(0, 0, 0)$ のみ、 $r > 1$ のときは $(0, 0, 0)$ 、 $(\pm\sqrt{b(r - 1)}, \pm\sqrt{b(r - 1)}, r - 1)$ (復号同順) の3つになります。

問題 5-91 リスト 5.5 のプログラムの 19 行目の r を例えば、 $r = 0.5$ としてみてください。

問題 5-92 プログラムは、例えばリスト A.12 のようにすればよいでしょう。なお、実行結果は図 A.4 のようになります。このプログラムでは、 $atol$ 、 $rtol$ はデフォルトのままになっています。変更すると違った軌道になると思いますが、 ω 極限集合の様子は、 $atol$ 、 $rtol$ をどのように設定しても同じように見えるはずで

リスト A.12 (Rossler.py)

```
1 import numpy as np
2 from scipy.integrate import odeint
3 import matplotlib.pyplot as plt
4 # If your version of matplotlib is earlier than 3.2.0,
5 # the following import statement is required.
6 from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D
7
8 # Rossler equation
9 # x = R[0], y = R[1], z = R[2]
10 def Rosslerreq(R, t, a, b, c):
11     dxdt = - R[1] - R[2]
12     dydt = R[0] + a*R[1]
13     dzdt = b + R[0]*R[2] - c*R[2]
14     return [dxdt, dydt, dzdt]
15
16 initvar = [0.5, 0.1, 0.2] # [x(0), y(0), z(0)]
17 t = np.linspace(0, 200, 8000) # time
18 a = 0.2; b = 0.2; c = 5.7
19 Rlist = odeint(Rosslerreq, initvar, t, args = (a, b, c))
20
21 fig = plt.figure()
22 ax = fig.gca(projection='3d')
23
24 ax.set_xlabel('x')
25 ax.set_ylabel('y')
26 ax.set_zlabel('z')
27 ax.plot(Rlist[:, 0], Rlist[:, 1], Rlist[:, 2])
28 plt.show()
```

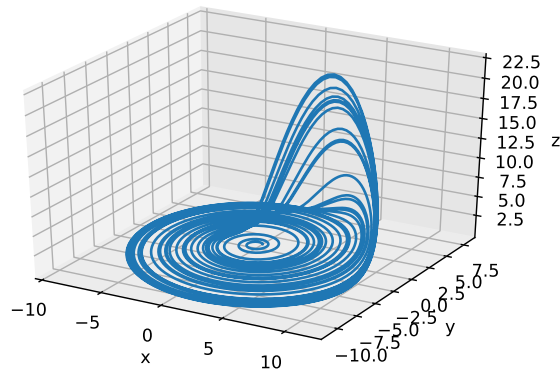


図 A.4 odeint によるレスラー方程式の数値解

このストレンジアトラクタはレスラー・アトラクタ (Rössler attractor) と呼ばれています。ローレンツ方程式よりも単純 (非線形項が1つしかない) にもかかわらずストレンジアトラクタが出現する点が興味深いですね。

問題 5-93 リスト A.13 のプログラムのようにすればよいでしょう。結果は実行してのお楽しみです。

リスト A.13 (Probsolve.py)

```

1 from scipy import optimize
2 import numpy as np
3
4 def f(x):
5     return x*np.exp(-x) + x - 1
6
7 print(optimize.fsolve(f,1))

```

問題 5-94 プログラムは、例えば、リスト A.14 のようにすればよいでしょう。ここで、サンプルパラメータは、 $m = 0.02$, $\beta_0 = 1.8$, $\beta_1 = 0.28$, $\gamma = 1.15$, $\epsilon = 35.84$ としました。

リスト A.14 (SEIR2.py)

```

1 #####
2 # The SIER model in the paper:
3 # L. F. Olsen, W. M. Schaffer, Chaos Versus Periodicity:
4 # Alternative Hypothesis for Childhood Epidemics,
5 # Science, New Series, Vol. 249, No. 4968, pp. 499-504(1990)
6 #####
7 import numpy as np
8 from scipy.integrate import odeint
9 import matplotlib.pyplot as plt
10
11 PI = np.pi

```

```

12 # SEIR differential equation
13 # S = SEIR[0], E = SEIR[1], I = SEIR[2], R = SEIR[3]
14 def SEIRreq(SEIR, t, m, beta0, beta1, gamma, epsilon):
15     dSdt = m*(1-SEIR[0])-beta0*(1+beta1*np.cos(2*PI*t))*SEIR[0]*SEIR[2]
16     dEdt = beta0*(1+beta1*np.cos(2*PI*t))*SEIR[0]*SEIR[2]-(m+epsilon)*
        SEIR[1]
17     dIdt = epsilon*SEIR[1] - (m + gamma)*SEIR[2]
18     dRdt = gamma*SEIR[2] - m*SEIR[3]
19
20     return [dSdt, dEdt, dIdt, dRdt]
21
22 t = np.linspace(0, 160, 4000) # time
23 # parameters in the Olsen-Schaffer paper
24 # m = 0.02; beta0 = 1800; beta1 = 0.28; gamma = 100; epsilon = 35.84
25
26 # sample parameter
27 m = 0.02; beta0 = 1.8; beta1 = 0.28; gamma = 1.15; epsilon = 35.84
28
29 initvar = [0.99, 0, 0.01, 0] # [S(0), E(0), I(0), R(0)]
30 SEIRlist = odeint(SEIRreq, initvar, t, args=(m, beta0, beta1, gamma,
        epsilon))
31
32 fig, ax = plt.subplots()
33 ax.set_xlabel('time')
34 ax.set_ylabel('population')
35 ax.set_title(r'Time evolution of $(S(t), E(t), I(t), R(t))$')
36 ax.grid()
37 ax.plot(t, SEIRlist[:,0], linestyle="solid", label="S", color = "black")
38 ax.plot(t, SEIRlist[:,1], linestyle="dotted", label="E", color = "black")
39 ax.plot(t, SEIRlist[:,2], linestyle="dashed", label="I", color = "black")
40 ax.plot(t, SEIRlist[:,3], linestyle="dashdot", label="R", color = "black"
        )
41 ax.legend(loc=0)
42 fig.tight_layout()
43 plt.show()

```

リスト A.14 のプログラムの実行結果を図 A.5 に示します。

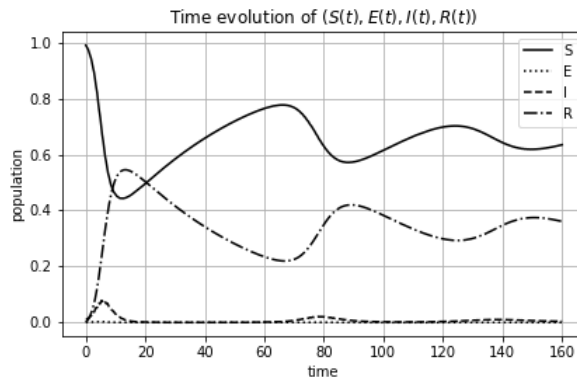


図 A.5 季節変動のある SEIR モデルにおける S, E, I, R の挙動

$I(t)$ の挙動をもう少し細かく見たものが、図 A.6 になります。こちらを見ると、細かい振動成分があることがわかりますね。図 A.5 と図 A.6 からわかることは、細かい振動と大きな振動の成分があるということです。

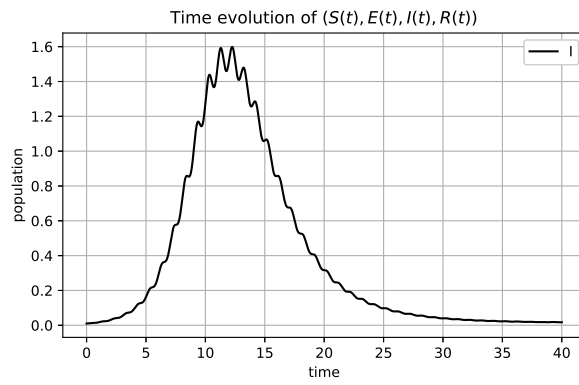


図 A.6 季節変動のある SEIR モデルにおける I の初期の挙動