第 3 章

問題 3-42 特性方程式は

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

となりますので，$\lambda = \pm\sqrt{2}$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

問題 3-43 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

となります。因数分解すれば，$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$ となるので，$\lambda = -2, 1$ となり，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$$

問題 3-44 特性方程式は

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

となります。因数分解して，$(\lambda + 1)(\lambda + 2)(\lambda + 3) = 0$ となるので，$\lambda = -1, -2, -3$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}$$

問題 3-45 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

となり，$\lambda = 0, -1$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-t} = C_1 + C_2 e^{-t}$$

問題 3-46 特性方程式は

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 6 = 0$$

となります。因数分解して，$(\lambda^2 + 2)(\lambda^2 + 3) = 0$ となるので，$\lambda = \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}i$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t + C_3 \cos\sqrt{3}t + C_4 \sin\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{問題 3-47}}$ 特性方程式は

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$$

ですので，$\lambda = -1$ が 3 重解になります。よって，微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-48}}$ 特性方程式は

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0$$

ですから，$\lambda = -2, -5$ が解になります。よって，微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t}$$

$\boxed{\text{問題 3-49}}$ 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

ですから，$\lambda = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ が根になります。よって，微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$\boxed{\text{問題 3-50}}$ 特性方程式は

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$$

です。判別式は，$a^2 - 4$ ですから，$a^2 > 4$ のとき，すなわち，$|a| > 2$ のときは，$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4}}{2}$ であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}t}$$

$a^2 = 4$ のとき，すなわち，$a = \pm 2$ のときは，$\lambda = -a/2$（2 重根）であり，解は

$$x(t) = (C_0 + C_1 t)e^{-\frac{a}{2}t}$$

となります。$a^2 < 4$ のとき，$|a| < 2$ のときは，$\lambda = \frac{-a \pm \sqrt{4-a^2}i}{2}$ であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)$$

$\boxed{\text{問題 3-51}}$ 特性方程式は

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i) = 0$$

ですから，$\lambda = \pm 1, \pm i$ であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

問題 3-52 特性方程式は

$$\lambda^4 + 7\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda + 6 = (\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)^2 = 0$$

ですから，$\lambda = -3, -2, -1$（2 重根）であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + (C_3 + C_4 t)e^{-t}$$

問題 3-53 特性方程式は

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = (\lambda+2)^2(\lambda+1)^2 = 0$$

ですから，$\lambda = -2, -1$（ともに 2 重根）であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} + (C_3 + C_4 t)e^{-t}$$

問題 3-54 特性方程式は，$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ となるので，$\lambda = -2 \pm i$ となります。よって，斉次方程式の解は

$$w(t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

になります。$P(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) + 5 = 1 \neq 0$ ですから

$$x_0(t) = e^{-2t}$$

となり，もとの微分方程式の解は

$$x(t) = e^{-2t} + e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

となります。

問題 3-55 特性方程式は，$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0$ となるので，$\lambda = -1$ が 3 重解になっています。よって，斉次方程式の解は

$$w(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

になります。$P(2) = (2+1)^2 = 27 \neq 0$ ですから

$$x_0(t) = \frac{1}{27}e^{2t}$$

となり，もとの微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{27}e^{2t} + (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-56}}$ $P(2) = 2^3 = 8,\ P'(2) = 3 \times 2^2 = 12,\ P''(2) = 6 \times 2 = 12,\ P'''(x) = 6$ となりますので，$P(x)$ の $x = 2$ のまわりでのテイラー展開は，つぎのようになります。

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 \\ &= P(2) + P'(2)(x-2) + \frac{P''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{6}(x-2)^3 \\ &= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 \end{aligned}$$

$\boxed{\text{問題 3-57}}$ 特性方程式は $P(\lambda) = (\lambda+1)^3 = 0$ となりますから，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$w(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

しかし，非斉次項の指数部の t の係数 -1 は，特性方程式の 3 重解になっていますので

$$x_0(t) = \frac{1}{P'''(-1)} t^3 e^{-t} = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$$

となり，もとの微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} + (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-58}}$ 特性方程式は，$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda+2)(\lambda+1)^2 = 0$ となりますので，$\lambda = -1$ が 2 重解になっています。よって，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$w(t) = C_1 e^{-2t} + (C_2 + C_3 t)e^{-t}$$

非斉次項の指数部の t の係数 -1 は，特性方程式の 2 重解になっているので

$$x_0(t) = \frac{1}{P''(-1)} t^2 e^{-t} = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

となり，もとの微分方程式の解は，つぎのようになることがわかります。

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + C_1 e^{-2t} + (C_2 + C_3 t)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-59}}$ すでに例題 3.6 で斉次方程式は解いてありますから

$$w(t) = C_1 \cos\omega t + C_2 \sin\omega t$$

です。$P(i\omega) = 0,\ P'(i\omega) = 2i\omega \neq 0$ となるので

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P'(i\omega)} t e^{i\omega t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i\omega} t e^{i\omega t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{t}{2i\omega}(\cos\omega t + i\sin\omega t)\right) \\ &= \frac{1}{2\omega} t \sin\omega t \end{aligned}$$

つまり，一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

$\boxed{\text{問題 3-60}}$ 斉次方程式は例題 3.7 と同じ単振動の方程式ですから，特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ であり，斉次方程式の解は，$w(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ となります。非斉次項をつぎのように指数関数の虚部とみなします。

$$e^{-t} \sin t = e^{-t} \mathrm{Im}(e^{it}) = \mathrm{Im}(e^{(-1+i)t})$$

となるので $P(-1+i) = (-1+i)^2 + 1 = 1 - 2i \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{P(-1+i)} e^{(-1+i)t}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-2i} e^{(-1+i)t}\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{5} \mathrm{Im}\left((\cos t - 2\sin t) + i(\sin t + 2\cos t)\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{5} (\sin t + 2\cos t) \end{aligned}$$

よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{5} (\sin t + 2\cos t) + C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

$\boxed{\text{問題 3-61}}$ 特性多項式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ の解は，$\lambda = -1, -2$ ですから，斉次方程式の解は

$$w(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

となります。$x_0(t) = at^2 + bt + c$ とすると

$$\begin{aligned} x_0'' + 3x_0' + 2x_0 &= 2a + 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) \\ &= 2at^2 + (6a + 2b)t + (2a + 3b + 2c) \end{aligned}$$

となるので，これが恒等的に t^2 に一致するには，$2a = 1$, $6a + 2b = 0$, $2a + 3b + 2c = 0$ となるように，a, b, c を取ればいいことになります。この連立方程式を解くと $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{4}$ となります。よって

$$x_0(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} t + \frac{7}{4}$$

となるので，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} t + \frac{7}{4} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

$\boxed{\text{問題 3-62}}$ 周期 $T = 1$ ですので，$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ より

$$l = g \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \approx 0.2482368999 \cdots$$

となります。l は，約 24.8 cm になります。

問題 3-63

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\dot{Z}} &= \frac{1}{R+i\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} \\
&= \frac{1}{R+i\omega L} + i\omega C \\
&= \frac{1+i\omega C(R+i\omega L)}{R+i\omega L} \\
&= \frac{1-\omega^2 LC + i\omega CR}{R+i\omega L} \\
&= \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\right)
\end{aligned}
$$

となります。虚部が 0 になる周波数 ω_0 が共振周波数で，つぎのようになります。

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}
$$

問題 3-64 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ となりますので，$\lambda = 2, 3$ です。よって，斉次方程式の解は

$$
w(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}
$$

となります。問題は $x_0(t)$ ですが，これはつぎのように考えればよいのです。

$$
\begin{aligned}
&x_1'' - 5x_1' + 6x_1 = e^t \\
&x_2'' - 5x_2' + 6x_2 = -e^{2t}
\end{aligned}
$$

を満たす x_1, x_2 を見つけて，$x_0 = x_1 + x_2$ とすれば，これが目的の解になっています。$P(1) = 2 \neq 0$, $P(2) = 0$, $P'(2) = -1 \neq 0$ となるので

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{P(1)} e^t = \frac{1}{2} e^t \\
x_2(t) &= -\frac{1}{P'(2)} t e^{2t} = t e^{2t}
\end{aligned}
$$

となり

$$
x_0(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{1}{2} e^t + t e^{2t}
$$

が得られます。よって，求める一般解はつぎのようになります。

$$
x(t) = \frac{1}{2} e^t + t e^{2t} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}
$$

問題 3-65 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ なので，$\lambda = -1 \pm i$ となりますから，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$
w(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)
$$

$e^t \cos t = \mathrm{Re}(e^{(1+i)t})$ となること，$P(1+i) = (1+i)^2 + 2(1+i) + 2 = 2i + 2 + 2i + 2 = 4(1+i)$ を利用して

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P(1+i)}e^{(1+i)t}\right) \\
&= e^t \mathrm{Re}\left(\frac{1}{4(1+i)}e^{it}\right) \\
&= \frac{e^t}{8}\mathrm{Re}\left((1-i)(\cos t + i\sin t)\right) \\
&= \frac{e^t}{8}\mathrm{Re}\left((1-i)(\cos t + i\sin t)\right) \\
&= \frac{e^t}{8}\mathrm{Re}\left((\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t)\right) \\
&= \frac{e^t}{8}(\cos t + \sin t)
\end{aligned}
$$

が得られます。よって，求める一般解はつぎのようになります。

$$
x(t) = \frac{e^t}{8}(\cos t + \sin t) + e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)
$$

$\boxed{\text{問題 3-66}}$ 左辺は問題 3-65 と同じですので，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$
w(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)
$$

$e^{-t} \cos t = \mathrm{Re}(e^{(-1+i)t})$ となること，$P(-1+i) = 0$, $P'(-1+i) = 2(-1+i) + 2 = 2i$ を利用して

$$
\begin{aligned}
x_0(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P'(-1+i)}te^{(-1+i)t}\right) \\
&= te^{-t}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}e^{it}\right) \\
&= te^{-t}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}(\cos t + i\sin t)\right) \\
&= \frac{1}{2}te^{-t}\sin t
\end{aligned}
$$

が得られます。よって，求める一般解はつぎのようになります。

$$
x(t) = \frac{1}{2}te^{-t}\sin t + e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)
$$

$\boxed{\text{問題 3-67}}$ 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ なので，$\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$ となりますから，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$
w(t) = C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}
$$

$x_0(t) = at^2 + bt + c$ とおいて係数を求めます。

$$
\begin{aligned}
x_0'' + 2x_0' - x_0 &= 2a + 2(2at + b) - (at^2 + bt + c) \\
&= -at^2 + (4a - b)t + (2a + 2b - c)
\end{aligned}
$$

これが t^2 に恒等的に一致するには，$-a = 1$, $4a - b = 0$, $2a + 2b - c = 0$ とならなければなりませんので，$a = -1$, $b = -4$, $c = -10$ となります。つまり

$$x_0(t) = -t^2 - 4t - 10$$

となりますので，求める一般解はつぎのようになります。

$$x(t) = -t^2 - 4t - 10 + C_1 e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2 e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

問題 3-68 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 4 = 0$ なので，$\lambda = -1 \pm \sqrt{3}i$ となりますから，斉次方程式の解はつぎのようになります。

$$w(t) = e^{-t}(C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t)$$

問題は x_0 をどう求めるかです。$x_0(t) = z(t)e^{-t}$ とおいてみることにしましょう。

$$x_0'' + 2x_0' + 4x_0 = (z''(t) + 3z(t))e^{-t} = te^{-t}$$

となります。よって

$$z''(t) + 3z(t) = t$$

となるように $z(t)$ を決めればいいのですが，$z(t) = \frac{t}{3}$ とすればよいことがわかりますので

$$x_0(t) = \frac{t}{3}e^{-t}$$

となります。一般解はつぎのようになることがわかります。

$$x(t) = \frac{t}{3}e^{-t} + e^{-t}(C_1 \cos\sqrt{3}t + C_2 \sin\sqrt{3}t)$$

問題 3-69 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ ですので，$\lambda = -1$(二重根) となります。よって，斉次方程式の解はつぎのようになります。

$$w(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-t}$$

問題は x_0 をどう求めるかですが，$x_0(t) = z(t)e^{-t}$ とおいてみることにしましょう。

$$x_0'' + 2x_0' + x_0 = z''(t)e^{-t} = te^{-t}$$

となります。よって

$$z''(t) = t$$

となるように $z(t)$ を決めればいいのですが，2 回積分して，$z(t) = \frac{t^3}{6}$ とすればよいことがわかりますので

$$x_0(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t}$$

となります。一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{t^3}{6}e^{-t} + (C_1 + C_2 t)e^{-t}$$

問題 3-70 特性方程式は，$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$ となるので，$\lambda=-1$ が 3 重解になっています。よって，斉次方程式の解はつぎのようになります。

$$w(t)=(C_0+C_1t+C_2t^2)e^{-t}$$

問題は x_0 をどう求めるかですが，$P(D)=(D+1)^3$ ですので，$x_0(t)=z(t)e^{-t}$ とおくと

$$(D+1)^3x_0=z'''(t)e^{-t}$$

となります。これが te^{-t} になるように z を選べばいいので，$z'''(t)=t$ を 3 回積分して，$z(t)=\frac{t^4}{24}$ となります。よって

$$x_0(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}$$

となります。求める一般解はつぎのようになることがわかります。

$$x(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}+(C_0+C_1t+C_2t^2)e^{-t}$$