

章末問題略解

第1章

問題 1-1 $x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$, $x'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$ ですので

$$\begin{aligned}x^2 + (x')^2 &= (C_1 \cos t + C_2 \sin t)^2 + (-C_1 \sin t + C_2 \cos t)^2 \\&= C_1^2 \cos^2 t + 2C_1 C_2 \cos t \sin t + C_2^2 \sin^2 t \\&\quad + C_1^2 \sin^2 t - 2C_1 C_2 \sin t \cos t + C_2^2 \cos^2 t \\&= C_1^2 (\cos^2 t + \sin^2 t) + C_2^2 (\sin^2 t + \cos^2 t) \\&= C_1^2 + C_2^2\end{aligned}$$

となります。右辺を C とおくと C は 0 以上の定数になります。

問題 1-2 両辺を x で微分すると

$$3y^2 y' = C$$

となるので

$$y^3 = 3xy^2 y'$$

となります。これは

$$y^2(y - 3xy') = 0$$

と書き直せますので、 $y = 0$ であるか、 $y - 3xy' = 0$ を満たすこととなりますが、 $y - 3xy' = 0$ は、 $y = 0$ という定数関数を含みますので、求める微分方程式は

$$y - 3xy' = 0$$

となります。

問題 1-3

$$x(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

$$x'(t) = C_1 e^t - C_2 e^{-t}$$

$$x''(t) = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$$

となりますので

$$x''(t) = x(t)$$

が求める微分方程式になります。

問題 1-4 IPython でつぎのようにして計算できます。

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: x = np.array([-1, 3, 5, -7])
In[3]: x**3+2*x
Out[3]: array([ -3,  33, 135, -357])
```

問題 1-5 IPython でつぎのようにして計算できます。

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: x = np.array([-2, 1.2, 3.7, 5.1])
In[3]: np.exp(x**2)
Out[3]: array([5.45981500e+01, 4.22069582e+00, 8.82046452e+05,
 1.97696725e+11])
```

問題 1-6 IPython でつぎのようにして計算できます。

```
In[1]: z = np.array([-1 + 1j, 2 + 3j, -3 + 2j])
In[2]: np.exp(z)
Out[2]:
array([ 0.19876611+0.30955988j, -7.31511009+1.04274366j,
 -0.02071873+0.04527125j])
In[3]: np.exp(z.real)*(np.cos(z.imag)+np.sin(z.imag)*1j)
Out[3]:
array([ 0.19876611+0.30955988j, -7.31511009+1.04274366j,
 -0.02071873+0.04527125j])
```

問題 1-7 例えばつぎのようにすればよいでしょう。リスト A.1 のプログラムが Pyplot ベース、リスト A.2 がオブジェクト指向ベースのプログラムです。

リスト A.1 (prob1-7plt.py)

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 PI = np.pi
5 t = np.linspace(0, 4*PI, 1000)
6 plt.plot(t, np.abs(np.sin(t)))
7 plt.title('sample graph $x(t)=|\sin t|$')
8 plt.xlabel('t')
9 plt.ylabel('x')
10 plt.show()
```

リスト A.2 (prob1-7ax.py)

```
1 import numpy as np
2 import matplotlib.pyplot as plt
3
4 PI = np.pi
5 t = np.linspace(0, 4*PI, 1000)
6 x = np.abs(np.sin(t))
7
8 fig, ax = plt.subplots()
9 ax.plot(t, x)
10 ax.set_xlabel('t')
11 ax.set_ylabel('x')
12 ax.set_title('sample graph $x(t)=|\sin t|$')
13 plt.show()
```

問題 1-8 リスト 1.1 のプログラムの 4 行目において、例えば、つぎのようにすればよいでしょう。

```
plt.plot(t, np.exp(t)*np.sin(10*t), color = 'red',
         linestyle = 'dashed', linewidth = 3.0)
```

問題 1-9 例えば、リスト A.3 のプログラムのようになればよいでしょう。

リスト A.3 (prob1-9.py)

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 PI = np.pi
5 t = np.linspace(-PI, PI, 100)
6 plt.plot(t, np.sin(t))
7 plt.plot(t, np.cos(3*t))
8
9 plt.show()
```

問題 1-10 与えられた微分方程式を積分すると

$$EI \frac{dy}{dx} = \int q(l-x)dx = qlx - \frac{qx^2}{2} + C_1$$

$$EIy = \int (qlx - \frac{qx^2}{2} + C_1)dx = \frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1x + C_2$$

となります。境界条件から、 $C_1 = C_2 = 0$ となりますから、求める方程式は、つぎのようになることがわかります。

$$y = \frac{q}{6EI}x^2(3l-x)$$

よって、最大の変位は、 $x = l$ のときの値ですから、つぎのようになります。

$$y_{\max}^* = \frac{ql^3}{3EI}$$

問題 1-11 式 (1.34) の両辺を m で割って 2 回積分するだけです。まず、式 (1.34) を 1 回積分すると

$$\frac{dx}{dt} = \int g dt = C + gt$$

となります。左辺は物体の速度 v を表しています。初速、つまり、時刻 0 での速度を v_0 とすれば

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + gt$$

となります。もう 1 度積分して

$$x = \int (v_0 + gt) dt = C + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

となります。初期の変位を 0 とすれば、 $C = 0$ ですので、結局、変位 x は

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

となるわけです。

問題 1-12 部分分数分解

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

を用いれば

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x^2(1-x)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x} + \log|x| - \log|1-x| \\ &= -\frac{1}{x} + \log \left| \frac{x}{1-x} \right| \end{aligned}$$

が得られます。よって、初期値 $x(0) = x_0$ に対する解は

$$-\frac{1}{x} + \log \left| \frac{x}{1-x} \right| = t + C$$

となりますので、求める解は、つぎのようになります。これもまた、 x イコールの式に直さなくても結構です。

$$-\frac{1}{x} + \log \left| \frac{x}{1-x} \right| = t - \frac{1}{x_0} + \log \left| \frac{x_0}{1-x_0} \right|$$

問題 1-13 両辺を (t で) 積分して

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C$$

となります。

$$\frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2} = C$$

となるので、積分定数 C は正でなければなりません。これは円の方程式です。

問題 1-14 両辺を x で割って積分すると

$$\log|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

となるので、整理して

$$x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

となります。 $x(0) = 2$ となるのは、 $x(0) = C = 2$ のときなので、求める解は $x(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}$ です。

問題 1-15

$$\int \frac{1}{1+x^2} dx = -\int t dt$$

となるので、積分を実行すると

$$\tan^{-1} x = -\frac{1}{2}t^2 + C$$

となります。整理して、つぎの解を得ます。

$$x = \tan\left(-\frac{1}{2}t^2 + C\right)$$

問題 1-16 両辺を $1+x^2$ で割って積分すると

$$\int \frac{x}{1+x^2} dx = \int \cos t$$

となります。積分を実行すると

$$\frac{1}{2} \log(1+x^2) = \sin t + C$$

が得られます。 x イコールの式に直さなくても結構です。

問題 1-17

$$1979 - \left(-\frac{5730 \times \log(0.85)}{\log 2} \right) \approx 635.5$$

となります。3%の誤差を考慮すると、616年から655年ということになります。これは飛鳥時代ですから、ひらがなは使われておらず、木片の文字は漢字であったと推測されます。

問題 1-18) 例えば, リスト A.4 のプログラムのようによればいいでしょう。

リスト A.4 (logistic.py)

```
1 import matplotlib.pyplot as plt
2 import numpy as np
3
4 fig, ax = plt.subplots()
5 ax.set_xlabel('t')
6 ax.set_ylabel('N')
7 ax.set_title('logistic curve')
8 ax.grid()
9
10 N0 = 1; K = 10; r = 1
11 t = np.linspace(0, 7, 400)
12 N = K*N0/(N0+(K-N0)*np.exp(-r*t))
13
14 ax.plot(t, N)
15 plt.show()
```

問題 1-19) $k > 0$ を比例定数として, つぎの微分方程式が得られます。

$$\frac{dx}{dt} = kx(N - x)$$

両辺を $x(N - x)$ で割って積分すると

$$\int \frac{1}{x(N-x)} dx = kt + C$$

左辺の積分を求めるため, 部分分数分解をすると

$$\frac{1}{x(N-x)} = \frac{1}{N} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x} \right)$$

となるので

$$\frac{1}{N} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x} \right) dx = kt + C$$

$$\frac{1}{N} \log \left(\frac{x}{N-x} \right) = kt + C$$

となります。 $t = 0$ で $x = 1$ ですから

$$C = -\frac{1}{N} \log(N-1)$$

となるので, 解を整理すると

$$x(t) = \frac{Ne^{kNt}}{(N-1) + e^{kNt}}$$

が得られます。噂の伝播速度に関する研究は数多く存在します。SNS 上での拡散はもっと複雑な過程を辿るようです。

問題 1-20) 「抵抗力の大きさは雨滴の落下速度の 2 乗と断面積との積に比例する」とありますので, これは雨滴が大きい場合に相当します。つまり, 雨滴の落下速度は, 雨滴の半径の平方根に比例していますから, (a) の答え

は、雨滴の落下速度は半径の $1/2$ 乗に比例する、ということになります。
 (b) 半径が半分になるので

$$8.8/\sqrt{2} \approx 6.22\text{m/s}$$

となります。

問題 1-21 運動方程式は、つぎのようになります。

$$9m \frac{dv}{dt} = mg - kv^\alpha$$

よって、終端速度 v_{term} は、 $mg - kv_{\text{term}}^\alpha = 0$ を満たすので

$$v_{\text{term}} = \left(\frac{mg}{k}\right)^{1/\alpha}$$

となります。ただし、この推論は数学的には十分厳密ではなく、もし、速度が $t \rightarrow \infty$ である速度に近づくのであればこの値である、ということがわかっただけだということには注意しましょう。

問題 1-22 終端では、加速度は 0 になるので、終端速度 v は

$$mg - \gamma_1 v_{\text{term}} - \gamma_2 v_{\text{term}}^2 = 0 \quad (\text{A.1})$$

を満たします。この 2 次方程式の解のうち、正の解が終端速度ですから

$$v_{\text{term}} = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4mg\gamma_2}}{2\gamma_2}$$

となります。つぎに、与えられた微分方程式を解きます。両辺を $mg - \gamma_1 v - \gamma_2 v^2$ で割って積分すると

$$\int \frac{m}{mg - \gamma_1 v - \gamma_2 v^2} dv = t + C$$

左辺の積分は、式 (A.1) の解を α, β とすると重解ではないので、 $\alpha < \beta$ とすると

$$-\frac{m}{(\alpha - \beta)\gamma_2} \int \left(\frac{1}{v - \alpha} - \frac{1}{v - \beta} \right) dv = t + C$$

積分を実行して

$$-\frac{m}{(\alpha - \beta)\gamma_2} \log \left| \frac{v - \alpha}{v - \beta} \right| = t + C$$

を得ますが、仮定より初速は 0 なので

$$C = \frac{m}{(\beta - \alpha)\gamma_2} \log \left| \frac{\alpha}{\beta} \right|$$

よって、 $\alpha < 0 < \beta$ であることに注意すると

$$v(t) = \alpha\beta \frac{1 + e^{\frac{(\beta - \alpha)\gamma_2}{m} t}}{\beta + \alpha e^{\frac{(\beta - \alpha)\gamma_2}{m} t}}$$

となることがわかります。よって

$$v(t) \rightarrow \beta = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4mg\gamma_2}}{2\gamma_2} \quad (t \rightarrow \infty)$$

となり、先ほど求めた値と一致しています。これが求める終端速度になります。

問題 1-23 40°C のときの電線の長さは

$$L = S + \frac{8D^2}{3S} = 50 + \frac{8 \times 1^2}{3 \times 50} \approx 50.053$$

です。70°C のときの電線の長さは

$$50.0533 \times (1 + 0.000017 \times (70 - 40)) \approx 50.079$$

$$50.079 = 50 + \frac{8D^2}{3 \times 50}$$

を解いて

$$D \approx 1.216$$

となります。

問題 1-24 すでに導いた公式 $D \approx \frac{W}{8T} S^2$ を使いましょう。径間が 90 m, たるみが 3.0 m のときの電線の最下点における張力を T_1 , 径間が 100 m, たるみが 3.5 m のときの電線の最下点における張力を T_2 とすると, 1 m 当りの過重を W として, 以下の式が成り立ちます。

$$\frac{W}{8T_1} \times 90^2 = 3$$

$$\frac{W}{8T_2} \times 100^2 = 3.5$$

両者の比を取れば

$$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{90^2}{100^2} = \frac{3}{3.5}$$

となりますので

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{3.5} \times \frac{100^2}{90^2} \approx 1.058$$

が得られます。つまり, 求める水平張力は, 105.8%になります。

問題 1-25

$$D = \frac{WS^2}{8T} = \frac{20 \times 250^2}{8 \times 40 \times 10^3} = 3.90625$$

となります。