章末問題略解

第 1 章

$\boxed{\text{問題 1-1}}$ $x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t$, $x'(t) = -C_1\sin t + C_2\cos t$ ですので

$$\begin{aligned} x^2 + (x')^2 =& (C_1\cos t + C_2\sin t)^2 + (-C_1\sin t + C_2\cos t)^2 \\ =& C_1^2\cos^2 t + 2C_1C_2\cos t\sin t + C_2^2\sin^2 t \\ & + C_1^2\sin^2 t - 2C_1C_2\sin t\cos t + C_2^2\cos^2 t \\ =& C_1^2(\cos^2 t + \sin^2 t) + C_2^2(\sin^2 t + \cos^2 t) \\ =& C_1^2 + C_2^2 \end{aligned}$$

となります。右辺を C とおくと C は 0 以上の定数になります。

$\boxed{\text{問題 1-2}}$ 両辺を x で微分すると

$$3y^2y' = C$$

となるので

$$y^3 = 3xy^2y'$$

となります。これは

$$y^2(y - 3xy') = 0$$

と書き直せますので，$y = 0$ であるか，$y - 3xy' = 0$ を満たすことになりますが，$y - 3xy' = 0$ は，$y = 0$ という定数関数を含みますので，求める微分方程式は

$$y - 3xy' = 0$$

となります。

$\boxed{\text{問題 1-3}}$

$$x(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

$$x'(t) = C_1e^t - C_2e^{-t}$$

$$x''(t) = C_1e^t + C_2e^{-t}$$

となりますので

$$x''(t) = x(t)$$

が求める微分方程式になります。

問題 1-4 IPython でつぎのようにして計算できます。

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: x = np.array([-1, 3, 5, -7])
In[3]: x**3+2*x
Out[3]: array([  -3,   33,  135, -357])
```

問題 1-5 IPython でつぎのようにして計算できます。

```
In[1]: import numpy as np
In[2]: x = np.array([-2, 1.2, 3.7, 5.1])
In[3]: np.exp(x**2)
Out[3]: array([5.45981500e+01, 4.22069582e+00, 8.82046452e+05,
          1.97696725e+11])
```

問題 1-6 IPython でつぎのようにして計算できます。

```
In[1]: z = np.array([-1 + 1j, 2 + 3j, -3 + 2j])
In[2]: np.exp(z)
Out[2]:
array([ 0.19876611+0.30955988j, -7.31511009+1.04274366j,
       -0.02071873+0.04527125j])
In[3]: np.exp(z.real)*(np.cos(z.imag)+np.sin(z.imag)*1j)
Out[3]:
array([ 0.19876611+0.30955988j, -7.31511009+1.04274366j,
       -0.02071873+0.04527125j])
```

問題 1-7 例えばつぎのようにすればよいでしょう。 **リスト A.1** のプログラムが Pyplot ベース，**リスト A.2** がオブジェクト指向ベースのプログラムです。

リスト A.1 （prob1-7plt.py）

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

PI = np.pi
t = np.linspace(0, 4*PI, 1000)
plt.plot(t, np.abs(np.sin(t)))
plt.title('sample graph $x(t)=|\sin t|$')
plt.xlabel('t')
plt.ylabel('x')
plt.show()
```

リスト A.2 (prob1-7ax.py)

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

PI = np.pi
t = np.linspace(0, 4*PI, 1000)
x = np.abs(np.sin(t))

fig, ax = plt.subplots()
ax.plot(t, x)
ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('x')
ax.set_title('sample graph $x(t)=|\sin t|$')
plt.show()
```

問題 1-8 リスト 1.1 のプログラムの 4 行目において，例えば，つぎのようにすればよいでしょう。

```
plt.plot(t, np.exp(t)*np.sin(10*t), color = 'red',
                  linestyle = 'dashed', linewidth = 3.0)
```

問題 1-9 例えば、**リスト A.3** のプログラムのようにすればよいでしょう。

リスト A.3 (prob1-9.py)

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

PI = np.pi
t = np.linspace(-PI, PI, 100)
plt.plot(t, np.sin(t))
plt.plot(t, np.cos(3*t))

plt.show()
```

問題 1-10 与えられた微分方程式を積分すると

$$EI\frac{dy}{dx} = \int q(l-x)dx = qlx - \frac{qx^2}{2} + C_1$$

$$EIy = \int (qlx - \frac{qx^2}{2} + C_1)dx = \frac{qx^2}{2} - \frac{qx^3}{6} + C_1x + C_2$$

となります。境界条件から，$C_1 = C_2 = 0$ となりますから，求める方程式は，つぎのようになることがわかります。

$$y = \frac{q}{6EI}x^2(3l - x)$$

よって，最大の変位は，$x = l$ のときの値ですから，つぎのようになります。

$$y^*_{\max} = \frac{ql^3}{3EI}$$

$\boxed{\text{問題 1-11}}$ 式 (1.34) の両辺を m で割って 2 回積分するだけです。まず，式 (1.34) を 1 回積分すると

$$\frac{dx}{dt} = \int g dt = C + gt$$

となります。左辺は物体の速度 v を表しています。初速，つまり，時刻 0 での速度を v_0 とすれば

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + gt$$

となります。もう 1 度積分して

$$x = \int (v_0 + gt) dt = C + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

となります。初期の変位を 0 とすれば，$C = 0$ ですので，結局，変位 x は

$$x = v_0 t + \frac{1}{2} g t^2$$

となるわけです。

$\boxed{\text{問題 1-12}}$ 部分分数分解

$$\frac{1}{x^2(1-x)} = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x}$$

を用いれば

$$\begin{aligned}\int \frac{1}{x^2(1-x)} dx &= \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} \right) dx \\ &= -\frac{1}{x} + \log|x| - \log|1-x| \\ &= -\frac{1}{x} + \log\left|\frac{x}{1-x}\right|\end{aligned}$$

が得られます。よって，初期値 $x(0) = x_0$ に対する解は

$$-\frac{1}{x} + \log\left|\frac{x}{1-x}\right| = t + C$$

となりますので，求める解は，つぎのようになります。これもまた，x イコールの式に直さなくても結構です。

$$-\frac{1}{x} + \log\left|\frac{x}{1-x}\right| = t - \frac{1}{x_0} + \log\left|\frac{x_0}{1-x_0}\right|$$

$\boxed{\text{問題 1-13}}$ 両辺を（t で）積分して

$$\frac{x^2}{2} = -\frac{t^2}{2} + C$$

となります。

$$\frac{x^2}{2} + \frac{t^2}{2} = C$$

となるので，積分定数 C は正でなければなりません。これは円の方程式です。

$\boxed{\text{問題 1-14}}$ 両辺を x で割って積分すると

$$\log|x| = \frac{t^2}{2} + C$$

となるので，整理して

$$x(t) = Ce^{\frac{t^2}{2}}$$

となります。$x(0) = 2$ となるのは，$x(0) = C = 2$ のときなので，求める解は $x(t) = 2e^{\frac{t^2}{2}}$ です。

$\boxed{\text{問題 1-15}}$

$$\int \frac{1}{1+x^2}dx = -\int tdt$$

となるので，積分を実行すると

$$\tan^{-1} x = -\frac{1}{2}t^2 + C$$

となります。整理して，つぎの解を得ます。

$$x = \tan\left(-\frac{1}{2}t^2 + C\right)$$

$\boxed{\text{問題 1-16}}$ 両辺を $1 + x^2$ で割って積分すると

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \int \cos t$$

となります。積分を実行すると

$$\frac{1}{2}\log(1+x^2) = \sin t + C$$

が得られます。x イコールの式に直さなくても結構です。

$\boxed{\text{問題 1-17}}$

$$1979 - \left(-\frac{5730 \times \log(0.85)}{\log 2}\right) \approx 635.5$$

となります。3%の誤差を考慮すると，616 年から 655 年ということになります。これは飛鳥時代ですから，ひらがなは使われておらず，木片の文字は漢字であったと推測されます。

問題 1-18 例えば，**リスト A.4** のプログラムのようにすればいいでしょう。

リスト A.4 （logistic.py）

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig, ax = plt.subplots()
ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('N')
ax.set_title('logistic curve')
ax.grid()

N0 = 1; K = 10; r = 1
t = np.linspace(0, 7, 400)
N = K*N0/(N0+(K-N0)*np.exp(-r*t))

ax.plot(t, N)
plt.show()
```

問題 1-19 $k > 0$ を比例定数として，つぎの微分方程式が得られます。

$$\frac{dx}{dt} = kx(N-x)$$

両辺を $x(N-x)$ で割って積分すると

$$\int \frac{1}{x(N-x)} dx = kt + C$$

左辺の積分を求めるため，部分分数分解をすると

$$\frac{1}{x(N-x)} = \frac{1}{N}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right)$$

となるので

$$\frac{1}{N}\int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{N-x}\right) dx = kt + C$$

$$\frac{1}{N}\log\left(\frac{x}{N-x}\right) = kt + C$$

となります。$t = 0$ で $x = 1$ ですから

$$C = -\frac{1}{N}\log(N-1)$$

となるので，解を整理すると

$$x(t) = \frac{Ne^{kNt}}{(N-1)+e^{kNt}}$$

が得られます。噂の伝播速度に関する研究は数多く存在します。SNS 上での拡散はもっと複雑な過程を辿るようです。

問題 1-20 「抵抗力の大きさは雨滴の落下速度の 2 乗と断面積との積に比例する」とありますので，これは雨滴が大きい場合に相当します。つまり，雨滴の落下速度は，雨滴の半径の平方根に比例していますから，(a) の答え

は，雨滴の落下速度は半径の 1/2 乗に比例する，ということになります。
(b) 半径が半分になるので

$$8.8/\sqrt{2} \approx 6.22\mathrm{m/s}$$

となります。

$\boxed{\text{問題 1-21}}$ 運動方程式は，つぎのようになります。

$$9m\frac{dv}{dt} = mg - kv^{\alpha}$$

よって，終端速度 v_{term} は，$mg - kv_{\mathrm{term}}^{\alpha} = 0$ を満たすので

$$v_{\mathrm{term}} = \left(\frac{mg}{k}\right)^{1/\alpha}$$

となります。ただし，この推論は数学的には十分厳密ではなく，もし，速度が $t \to \infty$ である速度に近づくのであればこの値である，ということがわかっただけだということには注意しましょう。

$\boxed{\text{問題 1-22}}$ 終端では，加速度は 0 になるので，終端速度 v は

$$mg - \gamma_1 v_{\mathrm{term}} - \gamma_2 v_{\mathrm{term}}^2 = 0 \tag{A.1}$$

を満たします。この 2 次方程式の解のうち，正の解が終端速度ですから

$$v_{\mathrm{term}} = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4mg\gamma_2}}{2\gamma_2}$$

となります。つぎに，与えられた微分方程式を解きます。両辺を $mg - \gamma_1 v - \gamma_2 v^2$ で割って積分すると

$$\int \frac{m}{mg - \gamma_1 v - \gamma_2 v^2} dv = t + C$$

左辺の積分は，式 (A.1) の解を α, β とすると重解ではないので，$\alpha < \beta$ とすると

$$-\frac{m}{(\alpha - \beta)\gamma_2} \int \left(\frac{1}{v - \alpha} - \frac{1}{v - \beta}\right) dv = t + C$$

積分を実行して

$$-\frac{m}{(\alpha - \beta)\gamma_2} \log \left|\frac{v - \alpha}{v - \beta}\right| = t + C$$

を得ますが，仮定より初速は 0 なので

$$C = \frac{m}{(\beta - \alpha)\gamma_2} \log \left|\frac{\alpha}{\beta}\right|$$

よって，$\alpha < 0 < \beta$ であることに注意すると

$$v(t) = \alpha\beta \frac{1 + e^{\frac{(\beta - \alpha)\gamma_2}{m} t}}{\beta + \alpha e^{\frac{(\beta - \alpha)\gamma_2}{m} t}}$$

となることがわかります。よって

$$v(t) \to \beta = \frac{-\gamma_1 + \sqrt{\gamma_1^2 + 4mg\gamma_2}}{2\gamma_2} \quad (t \to \infty)$$

となり，先ほど求めた値と一致しています。これが求める終端速度になります。

$\boxed{\text{問題 1-23}}$ 40°C のときの電線の長さは

$$L = S + \frac{8D^2}{3S} = 50 + \frac{8 \times 1^2}{3 \times 50} \approx 50.053$$

です。70°C のときの電線の長さは

$$50.0533 \times (1 + 0.000017 \times (70 - 40)) \approx 50.079$$

$$50.079 = 50 + \frac{8D^2}{3 \times 50}$$

を解いて

$$D \approx 1.216$$

となります。

$\boxed{\text{問題 1-24}}$ すでに導いた公式 $D \approx \dfrac{W}{8T}S^2$ を使いましょう。径間が 90 m，たるみが 3.0 m のときの電線の最下点における張力を T_1，径間が 100 m，たるみが 3.5 m のときの電線の最下点における張力を T_2 とすると，1 m 当りの過重を W として，以下の式が成り立ちます。

$$\frac{W}{8T_1} \times 90^2 = 3$$

$$\frac{W}{8T_2} \times 100^2 = 3.5$$

両者の比を取れば

$$\frac{T_2}{T_1} \times \frac{90^2}{100^2} = \frac{3}{3.5}$$

となりますので

$$\frac{T_2}{T_1} = \frac{3}{3.5} \times \frac{100^2}{90^2} \approx 1.058$$

が得られます。つまり，求める水平張力は，105.8%になります。

$\boxed{\text{問題 1-25}}$

$$D = \frac{WS^2}{8T} = \frac{20 \times 250^2}{8 \times 40 \times 10^3} = 3.90625$$

となります。

第2章

$\boxed{\text{問題 2-26}}$ $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと

$$u + x\frac{du}{dx} = u + \frac{1}{u}$$

となります。よって，$x\frac{du}{dx} = \frac{1}{u}$ となりますから，両辺に u/x を掛けて

$$u\frac{du}{dx} = \frac{1}{x}$$

と変形できます。この両辺を積分すれば

$$\frac{u^2}{2} = \log|x| + C$$

となり，$u = \dfrac{y}{x}$ に戻して

$$\frac{y^2}{2x^2} = \log|x| + C$$

となります。

$\boxed{\text{問題 2-27}}$ $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{u^2}{1+u}$$

となり

$$\frac{u^2}{1+u} - u = -\frac{u}{1+u}$$

を解けばよいことになります。

$$\frac{u^2}{1+u} - u = -\frac{u}{1+u}$$

に注意すれば，$u = 0(y = 0)$ は解になっていることがわかるので，$u \neq 0$ とすれば

$$\frac{1+u}{u}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

となります。両辺を積分して

$$\log|u| + u = -\log|x| + C$$

$u = \dfrac{y}{x}$ に戻して

$$\log\left|\frac{y}{x}\right| + \frac{y}{x} = -\log|x| + C$$

となります。もう少し変形して，$\log|y| + y/x = C$ とすると若干きれいでしょう。

$\boxed{\text{問題 2-28}}$ $u = \dfrac{y}{x}$ とおくと

$$u + x\frac{du}{dx} = \frac{-2+u}{4+u}$$

となります。

$$x\frac{du}{dx} = \frac{-2+u}{4+u} - u = -\frac{u^2+3u+2}{4+u}$$

となりますので，$u^2+3u+2 \neq 0$ のとき

$$\frac{4+u}{u^2+3u+2}\frac{du}{dx} = -\frac{1}{x}$$

この両辺を x で積分するため，左辺の被積分関数を部分分数分解すれば，以下のようになります。

$$\begin{aligned}\int \frac{4+u}{u^2+3u+2}du &= \int \left(\frac{3}{u+1} - \frac{2}{u+2}\right) du \\ &= 3\log|u+1| - 2\log|u+2| \\ &= \log\left|\frac{(u+1)^3}{(u+2)^2}\right|\end{aligned}$$

よって

$$\log\left|\frac{(u+1)^3}{(u+2)^2}\right| = -\log|x| + C$$

となります。ここで，$u = y/x$ を代入して整理すれば，求める微分方程式の解は

$$\log\left|\frac{(x+y)^3}{(2x+y)^2}\right| = C$$

となります。もう少し変形して

$$(x+y)^3 = C(2x+y)^2$$

としてもよいでしょう。

$\boxed{\text{問題 2-29}}$ $2x-y-3=0,\ x-2y=0$ を解くと，この連立方程式の解は，$(x,y)=(2,1)$ となりますので，$X = x-2,\ Y = y-1$ とおけば

$$\frac{dY}{dX} = \frac{2X-Y}{X-2Y}$$

となります。$u = \frac{Y}{X}$ とおけば

$$u + X\frac{du}{dX} = \frac{2X-Y}{X-2Y} = \frac{2-u}{1-2u}$$

となるので

$$X\frac{du}{dX} = \frac{2-u}{1-2u} - u = \frac{2(1-u+u^2)}{1-2u}$$

となり

$$\frac{1-2u}{1-u+u^2}\frac{du}{dX}=\frac{2}{X}$$

が得られますので，両辺を積分して

$$-\int\frac{2u-1}{1-u+u^2}du=-\int\frac{(1-u+u^2)'}{1-u+u^2}du=2\log|X|+C$$

となります。つまり

$$-\log(1-u+u^2)=2\log|X|+C$$

となります。$u=Y/X$ を代入して整理すると，$X^2-XY+Y^2=C$ となります。$X=x-2$, $Y=y-1$ を代入し

$$(x-2)^2-(x-2)(y-1)+(y-1)^2=C$$

となります。

問題 2-30

$$e^{\int\frac{4x^3}{x^4+1}dx}=e^{\log(x^4+1)}=x^4+1$$

となりますので，もとの方程式の両辺に x^4+1 を掛けて積の微分法を使えば

$$((x^4+1)y)'=x^4+1$$

となります。両辺を積分して

$$(x^4+1)y=\frac{1}{5}x^5+x+C$$

となり，両辺を x^4+1 で割れば

$$y=\frac{x^5}{5(x^4+1)}+\frac{x}{x^4+1}+\frac{C}{x^4+1}$$

が得られます。

問題 2-31 両辺に e^{3x} を掛けて積の微分法を使うと

$$(e^{3x}y)'=xe^{3x}$$

となります。この両辺を積分して

$$\begin{aligned}e^{3x}y&=\int xe^{3x}dx\\&=\frac{1}{3}xe^{3x}-\int\frac{e^{3x}}{3}dx\\&=\frac{1}{3}xe^{3x}-\frac{1}{9}e^{3x}+C\end{aligned}$$

となりますから，求める解は

$$y=\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}+Ce^{-3x}$$

となります。

問題 2-32

$$e^{-\int \tan x dx} = e^{-\int \frac{\sin x}{\cos x} dx} = e^{\log(\cos x)} = \cos x$$

となりますので，もとの方程式の両辺に $\cos x$ を掛けて積の微分法を使えば

$$(y\cos x)' = y'\cos x - y\sin x = x\cos x$$

となります。この両辺を積分して

$$\begin{aligned} y\cos x &= \int x\cos x \\ &= x\sin x - \int \sin x dx \\ &= x\sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

となりますから，求める解は

$$y = x\tan x + 1 + \frac{C}{\cos x}$$

となります。

問題 2-33 これは，$p(x) = x$, $q(x) = x$, $\alpha = 4$ の場合のベルヌーイ方程式にあたります。$z = y^{1-\alpha} = \frac{1}{y^3}$ とおくと

$$z' - 3xz = -3x$$

となります。これは 1 階線形方程式ですので（変数分離形でもありますが），両辺に $e^{-3x^2/2}$ を掛けて，積の微分法を使うと

$$(e^{-3x^2/2}z)' = -3xe^{-3x^2/2}$$

となります。両辺を積分して

$$e^{-3x^2/2}z = e^{-3x^2/2} + C$$

となり

$$z = 1 + Ce^{3x^2/2}$$

が得られます。よって

$$y = \frac{1}{(1+Ce^{3x^2/2})^{1/3}}$$

となります。

問題 2-34 方程式はリカッチの方程式になっています。

$$y = \frac{2}{x} + u$$

とおくと

$$\begin{aligned}
y' + y^2 &= -\frac{2}{x^2} + u' + \left(\frac{2}{x} + u\right)^2 \\
&= -\frac{2}{x^2} + u' + \frac{4}{x^2} + \frac{4u}{x} + u^2 \\
&= \frac{2}{x^2} + u' + \frac{4u}{x} + u^2
\end{aligned}$$

これが $\frac{2}{x^2}$ に等しいのですから

$$u' + \frac{4u}{x} = -u^2 \tag{A.2}$$

となります。期待通りベルヌーイの方程式が得られました。$v = u^{1-2} = \frac{1}{u}$ とおけば，$u' = -\frac{v'}{v^2}$ となります。これを式 (A.2) に代入すると

$$-\frac{v'}{v^2} + \frac{4}{xv} = -\frac{1}{v^2}$$

となるので

$$v' - \frac{4}{x}v = 1$$

が得られます。これは 1 階線形方程式ですので，両辺に $e^{-4\int\frac{dx}{x}} = \frac{1}{x^4}$ を掛けて積の微分法を使うと

$$\left(\frac{v}{x^4}\right)' = \frac{1}{x^4}$$

となります。両辺を積分して

$$\frac{v}{x^4} = \int \frac{dx}{x^4} = -\frac{1}{3x^3} + C$$

となり，$\frac{1}{u} = v = -\frac{x}{3} + Cx^4$ が得られ

$$\begin{aligned}
y &= \frac{2}{x} + u \\
&= \frac{2}{x} + \frac{1}{-\frac{x}{3} + Cx^4} \\
&= \frac{2}{x} + \frac{3}{Cx^4 - x}
\end{aligned}$$

となることがわかります。ここで $3C$ をあらためて C とおきました。

問題 2-35　例えば，**リスト A.5** のプログラムのようにすればいいでしょう。

リスト A.5 （Bessel.py）

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
from scipy import special

x = np.linspace(0, 25, 1000)

fig, ax = plt.subplots()
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_title('The Bessel functions of the first kind')
```

```python
ax.grid()

ax.plot(x, special.jv(1, x), label='$y=J_1(x)$', color="black")
ax.plot(x, special.jv(3, x), label='$y=J_3(x)$', linestyle="dotted",
  color="black")
ax.set_ylim(-0.75, 0.75)
ax.legend()
plt.show()
```

問題 2-36 $f(x,y)=x^2+y^2$, $g(x,y)=2xy-3$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial y}=2y=\frac{\partial g}{\partial x}$$

となりますから，この微分方程式は完全微分方程式になっています。また

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int f(x,y)dx\\&=\int(x^2+y^2)dx\\&=\frac{x^3}{3}+xy^2+p(y)\end{aligned}$$

とし，この $U(x,y)$ を $\dfrac{\partial U}{\partial y}=g(x,y)$ に代入すると

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3}{3}+xy^2+p(y)\right)\\&\quad=2xy+p'(y)\\&\quad=2xy-3\end{aligned}$$

となるので

$$p'(y)=-3$$

ですから，$p(y)=-3y$ となり，求める解が

$$\frac{x^3}{3}+xy^2-3y=C$$

ということになります。

問題 2-37 $f(x,y)=x^2y+2x^2+y^2$, $g(x,y)=\frac{x^3}{3}+2xy+5$ とすると

$$\frac{\partial f}{\partial y}=x^2+2y=\frac{\partial g}{\partial x}$$

となりますから，この微分方程式は完全微分方程式になっています。また

$$\begin{aligned}U(x,y)&=\int f(x,y)dx\\&=\int(x^2y+2x^2+y^2)dx\\&=\frac{x^3y}{3}+\frac{2x^2}{3}+xy^2+p(y)\end{aligned}$$

とし，この $U(x,y)$ を $\dfrac{\partial U}{\partial y} = g(x,y)$ に代入すると

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^3y}{3} + \frac{2x^2}{3} + xy^2 + p(y)\right)\\
&\quad = \frac{x^3}{3} + 2xy + p'(y)\\
&\quad = \frac{x^3}{3} + 2xy + 5
\end{aligned}$$

となるので

$$p'(y) = 5$$

ですから，$p(y) = 5y$ となり，求める解が

$$\frac{x^3y}{3} + \frac{2x^2}{3} + xy^2 + 5y = C$$

ということになります。$U(x,y)$ をつぎのように直接積分で求めてもよいでしょう。

$$\begin{aligned}
U(x,y) &= \int_0^x (x^2y + 2x^2 + y^2)dx + \int_0^y 5dy\\
&= \frac{x^3y}{3} + \frac{2x^2}{3} + xy^2 + 5y
\end{aligned}$$

グラフは，リスト 2.2 のプログラムの 11 行目をつぎのように変えて，x, y の範囲はもっと広げるとよいでしょう。

```
z = x**3*y/3 + 2*x**2/3 + x*y**2 + 5*y
```

問題 2-38 $a < 0 < b$ となるような任意の a, b に対して

$$x(t) = \begin{cases} -(t-a)^3 & (t \leq a)\\ 0 & (a < t \leq b)\\ (t-b)^3 & (t > b)\end{cases}$$

という関数を考えれば，これらは，a, b の値によらず初期値問題の解になっています。よって，一意性は成り立ちません。

問題 2-39 この初期値問題を積分方程式に直すと，つぎのようになります。

$$x(t) = 1 + \int_0^t x(s)ds \tag{A.3}$$

となります。式 (A.3) より，ピカールの逐次近似解は，$x_0(t) = 1$ として

$$x_n(t) = 1 + \int_0^t x_{n-1}(s)ds \quad (n \geq 1) \tag{A.4}$$

により構成できます。いくつか計算してみると

$$x_1(t) = 1 + \int_0^t x_0(s)ds = 1 + \int_0^t ds = 1 + t$$

$$x_2(t) = 1 + \int_0^t x_1(s)ds = 1 + \int_0^t (1+s)ds = 1 + t + \frac{t^2}{2}$$

$$\begin{aligned} x_3(t) &= 1 + \int_0^t x_2(s)ds \\ &= 1 + \int_0^t \left(1 + s + \frac{s^2}{2}\right) ds \\ &= 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6} \end{aligned}$$

のようになります。数学的帰納法により，つぎのように書けることを示しましょう。

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \frac{t^k}{k!} \tag{A.5}$$

$n = 0$ のときは $x_0(t) = 1$ で正しいことがただちにわかります。n で正しいとしましょう。このとき

$$\begin{aligned} x_{n+1}(t) &= 1 + \int_0^t x_n(s)ds \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \int_0^t \frac{s^k}{k!} ds \\ &= 1 + \sum_{k=0}^{n} \frac{s^{k+1}}{(k+1)!} \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} \frac{t^k}{k!} \end{aligned}$$

となり，$n+1$ のときも正しいことがわかります。数学的帰納法より，式 (A.5) が正しいことがわかりました。この $n \to \infty$ における極限が解であることがわかっていますから

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}$$

となることが示されました。これは，e^t のマクローリン展開になっています。

問題 2-40 $F(t) = \int_{t_0}^t g(s)u(s)ds$ とおくと，与えられた不等式は，$u(t) - F(t) \leq f(t)$ と書くことができます。この両辺に $g(t)(\geq 0)$ を掛けると

$$g(t)u(t) - g(t)F(t) \leq g(t)f(t)$$

となりますが，$F'(t) = g(t)u(t)$ ですので

$$F'(t) - g(t)F(t) \leq g(t)f(t)$$

となります。両辺に $\exp\left(-\int_{t_0}^t g(s)ds\right)$ を掛けて積の微分公式を使えば

$$\frac{d}{dt}\left(F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t g(s)ds\right)\right) \leq g(t)f(t)\exp\left(-\int_{t_0}^t g(s)ds\right)$$

$$(A.6)$$

式 (A.6) の両辺を t_0 から t まで積分すれば

$$F(t)\exp\left(-\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right) \leq \int_{t_0}^{t} g(\zeta)f(\zeta)\exp\left(-\int_{t_0}^{\zeta} g(s)ds\right)d\zeta$$

この両辺に $\exp\left(\int_{t_0}^{t} g(s)ds\right)$ を掛けて

$$F(t) \leq \int_{t_0}^{t} g(\zeta)f(\zeta)\exp\left(\int_{\zeta}^{t} g(s)ds\right)d\zeta \tag{A.7}$$

が得られ，式 (A.7) をもとの不等式 $u(t) \leq f(t) + F(t)$ に代入すれば

$$u(t) \leq f(t) + \int_{t_0}^{t} g(\zeta)f(\zeta)\exp\left(\int_{\zeta}^{t} g(s)ds\right)d\zeta$$

が得られます。

$\boxed{\text{問題 2-41}}$

$$\left|\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sin nt\right| \leq \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = M_n$$

とすれば，$\sum_{n=1}^{\infty} M_n = 1 < \infty$ ですから，M_n は優級数になっていますので，M-test より，与えられた級数は一様収束します。

第 3 章

問題 3-42 特性方程式は

$$\lambda^2 - 2 = 0$$

となりますので，$\lambda = \pm\sqrt{2}$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{\sqrt{2}t} + C_2 e^{-\sqrt{2}t}$$

問題 3-43 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

となります。因数分解すれば，$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0$ となるので，$\lambda = -2, 1$ となり，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{t}$$

問題 3-44 特性方程式は

$$\lambda^3 + 6\lambda^2 + 11\lambda + 6 = 0$$

となります。因数分解して，$(\lambda+1)(\lambda+2)(\lambda+3) = 0$ となるので，$\lambda = -1, -2, -3$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t} + C_3 e^{-3t}$$

問題 3-45 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda = 0$$

となり，$\lambda = 0, -1$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 e^{0t} + C_2 e^{-t} = C_1 + C_2 e^{-t}$$

問題 3-46 特性方程式は

$$\lambda^4 + 5\lambda^2 + 6 = 0$$

となります。因数分解して，$(\lambda^2+2)(\lambda^2+3) = 0$ となるので，$\lambda = \pm\sqrt{2}i, \pm\sqrt{3}i$ であることがわかります。よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x = C_1 \cos\sqrt{2}t + C_2 \sin\sqrt{2}t + C_3 \cos\sqrt{3}t + C_4 \sin\sqrt{3}$$

$\boxed{\text{問題 3-47}}$ 特性方程式は

$$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda + 1)^3 = 0$$

ですので，$\lambda = -1$ が 3 重解になります。よって，微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-48}}$ 特性方程式は

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = (\lambda + 2)(\lambda + 5) = 0$$

ですから，$\lambda = -2, -5$ が解になります。よって，微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{-2t} + C_2 e^{-5t}$$

$\boxed{\text{問題 3-49}}$ 特性方程式は

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = 0$$

ですから，$\lambda = \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ が根になります。よって，微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = e^{-\frac{1}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{3}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

$\boxed{\text{問題 3-50}}$ 特性方程式は

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0$$

です。判別式は，$a^2 - 4$ ですから，$a^2 > 4$ のとき，すなわち，$|a| > 2$ のときは，$\lambda = \frac{-a\pm\sqrt{a^2-4}}{2}$ であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{\frac{-a+\sqrt{a^2-4}}{2}t} + C_2 e^{\frac{-a-\sqrt{a^2-4}}{2}t}$$

$a^2 = 4$ のとき，すなわち，$a = \pm 2$ のときは，$\lambda = -a/2$（2 重根）であり，解は

$$x(t) = (C_0 + C_1 t)e^{-\frac{a}{2}t}$$

となります。$a^2 < 4$ のとき，$|a| < 2$ のときは，$\lambda = \frac{-a\pm\sqrt{4-a^2}i}{2}$ であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = e^{-\frac{a}{2}t}\left(C_1 \cos\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t + C_2 \sin\frac{\sqrt{4-a^2}}{2}t\right)$$

$\boxed{\text{問題 3-51}}$ 特性方程式は

$$\lambda^4 - 1 = (\lambda + 1)(\lambda - 1)(\lambda + i)(\lambda - i) = 0$$

ですから，$\lambda = \pm 1, \pm i$ であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{t} + C_3 \cos t + C_4 \sin t$$

$\boxed{\text{問題 3-52}}$ 特性方程式は

$$\lambda^4 + 7\lambda^3 + 17\lambda^2 + 17\lambda + 6 = (\lambda+3)(\lambda+2)(\lambda+1)^2 = 0$$

ですから，$\lambda = -3, -2, -1$（2 重根）であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{-2t} + (C_3 + C_4 t)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-53}}$ 特性方程式は

$$\lambda^4 + 6\lambda^3 + 13\lambda^2 + 12\lambda + 4 = (\lambda+2)^2(\lambda+1)^2 = 0$$

ですから，$\lambda = -2, -1$（ともに 2 重根）であり，解は，つぎのようになります。

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)e^{-2t} + (C_3 + C_4 t)e^{-t}$$

$\boxed{\text{問題 3-54}}$ 特性方程式は，$\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ となるので，$\lambda = -2 \pm i$ となります。よって，斉次方程式の解は

$$w(t) = e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

になります。$P(-2) = (-2)^2 + 4 \times (-2) + 5 = 1 \neq 0$ ですから

$$x_0(t) = e^{-2t}$$

となり，もとの微分方程式の解は

$$x(t) = e^{-2t} + e^{-2t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)$$

となります。

$\boxed{\text{問題 3-55}}$ 特性方程式は，$\lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1 = (\lambda+1)^3 = 0$ となるので，$\lambda = -1$ が 3 重解になっています。よって，斉次方程式の解は

$$w(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

になります。$P(2) = (2+1)^2 = 27 \neq 0$ ですから

$$x_0(t) = \frac{1}{27}e^{2t}$$

となり，もとの微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{27}e^{2t} + (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

$\boxed{問題 3-56}$ $P(2) = 2^3 = 8,\ P'(2) = 3 \times 2^2 = 12,\ P''(2) = 6 \times 2 = 12,\ P'''(x) = 6$ となりますので，$P(x)$ の $x = 2$ のまわりでのテイラー展開は，つぎのようになります。

$$\begin{aligned} P(x) &= x^3 \\ &= P(2) + P'(2)(x-2) + \frac{P''(2)}{2}(x-2)^2 + \frac{P'''(2)}{6}(x-2)^3 \\ &= 8 + 12(x-2) + 6(x-2)^2 + (x-2)^3 \end{aligned}$$

$\boxed{問題 3-57}$ 特性方程式は $P(\lambda) = (\lambda + 1)^3 = 0$ となりますから，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$w(t) = (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

しかし，非斉次項の指数部の t の係数 -1 は，特性方程式の 3 重解になっていますので

$$x_0(t) = \frac{1}{P'''(-1)} t^3 e^{-t} = \frac{1}{6} t^3 e^{-t}$$

となり，もとの微分方程式の解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{6} t^3 e^{-t} + (C_0 + C_1 t + C_2 t^2)e^{-t}$$

$\boxed{問題 3-58}$ 特性方程式は，$\lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 2)(\lambda + 1)^2 = 0$ となりますので，$\lambda = -1$ が 2 重解になっています。よって，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$w(t) = C_1 e^{-2t} + (C_2 + C_3 t)e^{-t}$$

非斉次項の指数部の t の係数 -1 は，特性方程式の 2 重解になっているので

$$x_0(t) = \frac{1}{P''(-1)} t^2 e^{-t} = \frac{1}{2} t^2 e^{-t}$$

となり，もとの微分方程式の解は，つぎのようになることがわかります。

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 e^{-t} + C_1 e^{-2t} + (C_2 + C_3 t)e^{-t}$$

$\boxed{問題 3-59}$ すでに例題 3.6 で斉次方程式は解いてありますから

$$w(t) = C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

です。$P(i\omega) = 0,\ P'(i\omega) = 2i\omega \neq 0$ となるので

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P'(i\omega)} t e^{i\omega t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i\omega} t e^{i\omega t}\right) \\ &= \mathrm{Re}\left(\frac{t}{2i\omega}(\cos \omega t + i \sin \omega t)\right) \\ &= \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t \end{aligned}$$

つまり，一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{2\omega} t \sin \omega t + C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t$$

問題 3-60 斉次方程式は例題 3.7 と同じ単振動の方程式ですから，特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 1 = 0$ であり，斉次方程式の解は，$w(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ となります。非斉次項をつぎのように指数関数の虚部とみなします。

$$e^{-t} \sin t = e^{-t} \mathrm{Im}(e^{it}) = \mathrm{Im}(e^{(-1+i)t})$$

となるので $P(-1+i) = (-1+i)^2 + 1 = 1 - 2i \neq 0$ から

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{P(-1+i)} e^{(-1+i)t}\right) \\ &= \mathrm{Im}\left(\frac{1}{1-2i} e^{(-1+i)t}\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{5} \mathrm{Im}\left((\cos t - 2\sin t) + i(\sin t + 2\cos t)\right) \\ &= \frac{e^{-t}}{5} (\sin t + 2\cos t) \end{aligned}$$

よって，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{e^{-t}}{5} (\sin t + 2\cos t) + C_1 \cos t + C_2 \sin t$$

問題 3-61 特性多項式 $P(\lambda) = \lambda^2 + 3\lambda + 2 = (\lambda+1)(\lambda+2) = 0$ の解は，$\lambda = -1, -2$ ですから，斉次方程式の解は

$$w(t) = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

となります。$x_0(t) = at^2 + bt + c$ とすると

$$\begin{aligned} x_0'' + 3x_0' + 2x_0 &= 2a + 3(2at + b) + 2(at^2 + bt + c) \\ &= 2at^2 + (6a + 2b)t + (2a + 3b + 2c) \end{aligned}$$

となるので，これが恒等的に t^2 に一致するには，$2a = 1$, $6a + 2b = 0$, $2a + 3b + 2c = 0$ となるように，a, b, c を取ればいいことになります。この連立方程式を解くと $a = \frac{1}{2}$, $b = -\frac{3}{2}$, $c = \frac{7}{4}$ となります。よって

$$x_0(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} t + \frac{7}{4}$$

となるので，求める一般解は，つぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{2} t^2 - \frac{3}{2} t + \frac{7}{4} + C_1 e^{-t} + C_2 e^{-2t}$$

問題 3-62 周期 $T = 1$ ですので，$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$ より

$$l = g \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \approx 0.2482368999 \cdots$$

となります。l は，約 24.8 cm になります。

問題 3-63

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{\dot{Z}} &= \frac{1}{R+i\omega L} + \frac{1}{\frac{1}{i\omega C}} \\
&= \frac{1}{R+i\omega L} + i\omega C \\
&= \frac{1+i\omega C(R+i\omega L)}{R+i\omega L} \\
&= \frac{1-\omega^2 LC + i\omega CR}{R+i\omega L} \\
&= \frac{R}{R^2+\omega^2 L^2} + i\left(\omega C - \frac{\omega L}{R^2+\omega^2 L^2}\right)
\end{aligned}
$$

となります。虚部が 0 になる周波数 ω_0 が共振周波数で，つぎのようになります。

$$
\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} - \frac{R^2}{L^2}}
$$

問題 3-64 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda-2)(\lambda-3) = 0$ となりますので，$\lambda = 2, 3$ です。よって，斉次方程式の解は

$$
w(t) = C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}
$$

となります。問題は $x_0(t)$ ですが，これはつぎのように考えればよいのです。

$$
\begin{aligned}
x_1'' - 5x_1' + 6x_1 &= e^t \\
x_2'' - 5x_2' + 6x_2 &= -e^{2t}
\end{aligned}
$$

を満たす x_1, x_2 を見つけて，$x_0 = x_1 + x_2$ とすれば，これが目的の解になっています。$P(1) = 2 \neq 0$, $P(2) = 0$, $P'(2) = -1 \neq 0$ となるので

$$
\begin{aligned}
x_1(t) &= \frac{1}{P(1)} e^t = \frac{1}{2} e^t \\
x_2(t) &= -\frac{1}{P'(2)} t e^{2t} = t e^{2t}
\end{aligned}
$$

となり

$$
x_0(t) = x_1(t) + x_2(t) = \frac{1}{2} e^t + t e^{2t}
$$

が得られます。よって，求める一般解はつぎのようになります。

$$
x(t) = \frac{1}{2} e^t + t e^{2t} + C_1 e^{2t} + C_2 e^{3t}
$$

問題 3-65 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ なので，$\lambda = -1 \pm i$ となりますから，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$
w(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t)
$$

$e^t\cos t = \mathrm{Re}(e^{(1+i)t})$ となること，$P(1+i) = (1+i)^2 + 2(1+i) + 2 = 2i + 2 + 2i + 2 = 4(1+i)$ を利用して

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P(1+i)}e^{(1+i)t}\right) \\ &= e^t\mathrm{Re}\left(\frac{1}{4(1+i)}e^{it}\right) \\ &= \frac{e^t}{8}\mathrm{Re}\left((1-i)(\cos t + i\sin t)\right) \\ &= \frac{e^t}{8}\mathrm{Re}\left((1-i)(\cos t + i\sin t)\right) \\ &= \frac{e^t}{8}\mathrm{Re}\left((\cos t + \sin t) + i(\sin t - \cos t)\right) \\ &= \frac{e^t}{8}(\cos t + \sin t) \end{aligned}$$

が得られます。よって，求める一般解はつぎのようになります。

$$x(t) = \frac{e^t}{8}(\cos t + \sin t) + e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

$\boxed{\text{問題 3-66}}$ 左辺は問題 3-65 と同じですので，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$w(t) = e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

$e^{-t}\cos t = \mathrm{Re}(e^{(-1+i)t})$ となること，$P(-1+i) = 0$，$P'(-1+i) = 2(-1+i) + 2 = 2i$ を利用して

$$\begin{aligned} x_0(t) &= \mathrm{Re}\left(\frac{1}{P'(-1+i)}te^{(-1+i)t}\right) \\ &= te^{-t}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}e^{it}\right) \\ &= te^{-t}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{2i}(\cos t + i\sin t)\right) \\ &= \frac{1}{2}te^{-t}\sin t \end{aligned}$$

が得られます。よって，求める一般解はつぎのようになります。

$$x(t) = \frac{1}{2}te^{-t}\sin t + e^{-t}(C_1\cos t + C_2\sin t)$$

$\boxed{\text{問題 3-67}}$ 特性方程式は，$P(\lambda) = \lambda^2 + 2\lambda - 1 = 0$ なので，$\lambda = -1 \pm \sqrt{2}$ となりますから，斉次方程式の解は，つぎのようになります。

$$w(t) = C_1e^{(-1+\sqrt{2})t} + C_2e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

$x_0(t) = at^2 + bt + c$ とおいて係数を求めます。

$$\begin{aligned} x_0'' + 2x_0' - x_0 &= 2a + 2(2at + b) - (at^2 + bt + c) \\ &= -at^2 + (4a - b)t + (2a + 2b - c) \end{aligned}$$

これが t^2 に恒等的に一致するには，$-a=1$, $4a-b=0$, $2a+2b-c=0$ とならなければなりませんので，$a=-1$, $b=-4$, $c=-10$ となります。つまり

$$x_0(t)=-t^2-4t-10$$

となりますので，求める一般解はつぎのようになります。

$$x(t)=-t^2-4t-10+C_1e^{(-1+\sqrt{2})t}+C_2e^{(-1-\sqrt{2})t}$$

$\boxed{\text{問題 3-68}}$ 特性方程式は，$P(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+4=0$ なので，$\lambda=-1\pm\sqrt{3}i$ となりますから，斉次方程式の解はつぎのようになります。

$$w(t)=e^{-t}(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)$$

問題は x_0 をどう求めるかです。$x_0(t)=z(t)e^{-t}$ とおいてみることにしましょう。

$$x_0''+2x_0'+4x_0=(z''(t)+3z(t))e^{-t}=te^{-t}$$

となります。よって

$$z''(t)+3z(t)=t$$

となるように $z(t)$ を決めればいいのですが，$z(t)=\frac{t}{3}$ とすればよいことがわかりますので

$$x_0(t)=\frac{t}{3}e^{-t}$$

となります。一般解はつぎのようになることがわかります。

$$x(t)=\frac{t}{3}e^{-t}+e^{-t}(C_1\cos\sqrt{3}t+C_2\sin\sqrt{3}t)$$

$\boxed{\text{問題 3-69}}$ 特性方程式は，$P(\lambda)=\lambda^2+2\lambda+1=(\lambda+1)^2=0$ ですので，$\lambda=-1$(二重根) となります。よって，斉次方程式の解はつぎのようになります。

$$w(t)=(C_1+C_2t)e^{-t}$$

問題は x_0 をどう求めるかですが，$x_0(t)=z(t)e^{-t}$ とおいてみることにしましょう。

$$x_0''+2x_0'+x_0=z''(t)e^{-t}=te^{-t}$$

となります。よって

$$z''(t)=t$$

となるように $z(t)$ を決めればいいのですが，2 回積分して，$z(t)=\frac{t^3}{6}$ とすればよいことがわかりますので

$$x_0(t)=\frac{t^3}{6}e^{-t}$$

となります。一般解は，つぎのようになります。

$$x(t)=\frac{t^3}{6}e^{-t}+(C_1+C_2t)e^{-t}$$

問題 3-70 特性方程式は，$\lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1=(\lambda+1)^3=0$ となるので，$\lambda=-1$ が 3 重解になっています。よって，斉次方程式の解はつぎのようになります。

$$w(t)=(C_0+C_1t+C_2t^2)e^{-t}$$

問題は x_0 をどう求めるかですが，$P(D)=(D+1)^3$ ですので，$x_0(t)=z(t)e^{-t}$ とおくと

$$(D+1)^3x_0=z'''(t)e^{-t}$$

となります。これが te^{-t} になるように z を選べばいいので，$z'''(t)=t$ を 3 回積分して，$z(t)=\frac{t^4}{24}$ となります。よって

$$x_0(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}$$

となります。求める一般解はつぎのようになることがわかります。

$$x(t)=\frac{t^4}{24}e^{-t}+(C_0+C_1t+C_2t^2)e^{-t}$$

第 4 章

問題 4-71 直接計算で証明します。

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}t^n e^{at}dt &= \int_0^\infty t^n e^{-(s-a)t}dt \\ &= \int_0^\infty \left(\frac{u}{s-a}\right)^n e^{-u}\frac{du}{s-a} \\ &= \frac{1}{(s-a)^{n+1}}\int_0^\infty u^n e^{-u}du \\ &= \frac{1}{(s-a)^{n+1}}\Gamma(n+1) = \frac{n!}{(s-a)^{n+1}}\end{aligned}$$

第 2 の等式以降 $u=(s-a)t$ と置換積分しました。この計算を見れば，n が正の整数であることは本質的ではなく，$x(t)=t^b e^{at}$ のラプラス変換が，つぎのようになることもわかります。

$$X(s) = \frac{\Gamma(b+1)}{(s-a)^{b+1}}$$

問題 4-72 $a=\alpha+\beta i(\alpha,\beta$ は実数) とした場合の，$x(t)=e^{at}$ のラプラス変換は，表 4.1 の公式 3 より

$$\begin{aligned}X(s) &= \frac{1}{s-a} \\ &= \frac{1}{s-(\alpha+i\beta)} \\ &= \frac{(s-\alpha)+i\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2)} \\ &= \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} + i\frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\end{aligned}$$

となります。

$$x(t) = e^{at} = e^{(\alpha+i\beta)t} = e^{\alpha t}(\cos\beta t + i\sin\beta t)$$

ですから，実部と虚部を比較して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{e^{\alpha t}\cos\beta t\} &= \frac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2} \\ \mathcal{L}\{e^{\alpha t}\sin\beta t\} &= \frac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}\end{aligned}$$

を得ます。これは表 4.1 の公式 7，8 に対応し，特に $\alpha=0$ の場合が表 4.1 の公式 5，6 に対応します。

問題 4-73 $\mathcal{L}\{x'(t)\} = sX(s)-x(0) = sX(s)-1$, $\mathcal{L}\{x''(t)\} = s^2X(s)-x(0)s-x'(0) = s^2X(s)-s-1$ となるので，与式の両辺をラプラス変換すると

$$(s^2+1)X(s)-s-1 = \frac{s+1}{(s+1)^2+1}$$

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s+1}{s^2+1} + \frac{s+1}{(s^2+1)\{(s+1)^2+1\}} \\
&= \frac{s}{s^2+1} + \frac{1}{s^2+1} + \frac{3}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1} - \frac{1}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1} \\
&\quad + \frac{1}{5}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1} - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{4}{5}\cdot\frac{s}{s^2+1} + \frac{8}{5}\cdot\frac{1}{s^2+1} + \frac{1}{5}\cdot\frac{s+1}{(s+1)^2+1} \\
&\quad - \frac{2}{5}\cdot\frac{1}{(s+1)^2+1}
\end{aligned}
$$

となるので，ラプラス逆変換して，$x(t)$ がつぎのようになることがわかります。

$$
x(t) = \frac{4}{5}\cos t + \frac{8}{5}\sin t + \frac{1}{5}e^{-t}\cos t - \frac{2}{5}e^{-t}\sin t
$$

問題 4-74 まず，初期値問題：$z'' + 2z' + z = 1,\ z(0) = 1, z'(0) = 1$ を解きます。ラプラス変換は

$$
(s+1)^2 Z(s) - s - 3 = \frac{1}{s}
$$

となります。

$$
Z(s) = \frac{s+3}{(s+1)^2} + \frac{1}{s(s+1)^2} = \frac{1}{(s+1)^2} + \frac{1}{s}
$$

となるので，ラプラス逆変換すれば

$$
z(t) = te^{-t} + 1
$$

となります。よって $x(t)$ のラプラス変換は

$$
\begin{aligned}
X(s) &= \frac{s+3}{(s+1)^2} + \frac{F(s)}{(s+1)^2} \\
&= \frac{2}{(s+1)^2} + \frac{1}{s+1} + F(s)Z(s) - \frac{F(s)}{s}
\end{aligned}
$$

となり，この両辺をラプラス逆変換すると，以下のように，求める解が得られます。

$$
\begin{aligned}
x(t) &= 2te^{-t} + e^{-t} + (f*z)(t) - (f*1)(t) \\
&= 2te^{-t} + e^{-t} + \int_0^t f(\xi)((t-\xi)e^{-(t-\xi)} + 1)d\xi - \int_0^t f(\xi)d\xi \\
&= 2te^{-t} + e^{-t} + \int_0^t f(\xi)(t-\xi)e^{-(t-\xi)}d\xi
\end{aligned}
$$

問題 4-75 **リスト A.6** のプログラムのようにすればよいでしょう。

リスト A.6 （ProbSympy1.py）

```
import sympy as sym
t = sym.symbols('t')
x = sym.Function('x')(t)
eq = sym.Eq(sym.diff(x, t, 2) + sym.diff(x, t) + x, sym.cos(t))
print(sym.dsolve(eq))
```

答えはつぎのようになります。

$$x(t) = e^{-t/2}\left\{C_1 \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right) + C_2 \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)\right\} + \sin t$$

問題 4-76 **リスト A.7** のプログラムのようにすればよいでしょう。

リスト A.7 （ProbSympy2.py）

```
import sympy as sym
t = sym.symbols('t')
x = sym.Function('x')(t)
eq = sym.Eq(sym.diff(x, t, 3) + 3*sym.diff(x, t, 2) + 3*sym.diff(x, t) +
  x, t*sym.sin(t))
print(sym.dsolve(eq))
```

答えはつぎのようになります。

$$x(t) = -\frac{t\sin t}{4} - \frac{t\cos t}{4} + \frac{3}{4}\sin t + e^{-t}(C_1 + C_2 t + C_3 t^2)$$

問題 4-77 **リスト A.8** のプログラムのようにすればよいでしょう。

リスト A.8 （ProbSympy3.py）

```
import sympy as sym
t = sym.symbols('t')
x = sym.Function('x')(t)
eq = sym.Eq(sym.diff(x, t, 2) + sym.diff(x, t) + 3*x, sym.sin(t))
print(sym.dsolve(eq,ics={x.subs(t,0):0, sym.diff(x,t,1).subs(t,0):1}))
```

答えはつぎのようになります。

$$\begin{aligned} x(t) = e^{-t/2}&\left\{\frac{7\sqrt{11}}{55}\sin\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right) + \frac{1}{5}\cos\left(\frac{\sqrt{11}}{2}t\right)\right\} \\ &+ \frac{2}{5}\sin t - \frac{\cos t}{5} \end{aligned}$$

問題 4-78 リスト 4.5 のプログラムの 13 行目で，$E = 1$, $E = 1.5$ とすればいいだけですので，やってみてください。

問題 4-79

$$\begin{aligned} \left\|\left(I + \frac{t}{n}A\right)^n\right\| &\leq \left\|I + \frac{t}{n}A\right\|^n \\ &\leq \left(1 + \frac{|t|}{n}\|A\|\right)^n \end{aligned}$$

となりますが，ここで，$n \to \infty$ とすると，$\|e^{tA}\| \leq e^{|t|\|A\|}$ が得られます。

問題 4-80 例えば

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

としましょう。このとき

$$AB = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となって，$AB \neq BA$ です。先ほど計算したように

$$e^{t(A+B)} = \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t \\ \sin t & \cos t \end{pmatrix}$$

です。$A^2 = B^2 = O$ ですから

$$e^{tA} = I + tA = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tB} = I + tB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

となるので

$$e^{tA}e^{tB} = \begin{pmatrix} 1 & -t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ t & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-t^2 & -t \\ t & 1 \end{pmatrix}$$

となり，$e^{t(A+B)} \neq e^{tA}e^{tB}$ となっていることが確認できます。

問題 4-81 A の固有方程式は

$$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 5\lambda - 14 = (\lambda+2)(\lambda-7) = 0$$

ですので，固有値は，$\lambda = -2, 7$ です。対応する固有ベクトルは，それぞれ，$(-2I - A)\boldsymbol{u} = \boldsymbol{o}$, $(7I - A)\boldsymbol{v} = \boldsymbol{o}$ を解いて

$$\boldsymbol{u} = c_1 \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{v} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

となります。ここで，c_1, c_2 は 0 でない定数です。

$$P = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$$

とすれば

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

よって

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e^{-2t} & 0 \\ 0 & e^{7t} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4e^{-2t} + 5e^{7t} & -4e^{-2t} + 4e^{7t} \\ -5e^{-2t} + 5e^{7t} & 5e^{-2t} + 4e^{7t} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

問題 4-82 固有方程式は，$|\lambda I - A| = \lambda^2 - 2\lambda + 3 = 0$ ですので，固有値は，$\lambda = 1 \pm \sqrt{2}i$ となります。

$$\begin{aligned} \lambda\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \lambda-1 & -1 \\ 2 & \lambda-1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \pm\sqrt{2}i & 1 \\ -2 & \pm\sqrt{2}i \end{pmatrix} \end{aligned}$$

ですから，対応する固有ベクトルを 1 組求めると

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \mp\sqrt{2}i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} 0 \\ \mp\sqrt{2} \end{pmatrix}$$
$$= \boldsymbol{v}_R + i\boldsymbol{v}_I$$

となりますので

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

とすれば，確かに

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

となっています。これが求める実ジョルダン標準形です。

問題 4-83

(1)　例えば，**リスト A.9** のプログラムのようにすれば，**図 A.1** が描かれます。

リスト A.9　（Perko.py）

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

n = 1000
L = 2
x = np.linspace(-L, L, n)
y = np.linspace(-L, L, n)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

u = Y
v = X + X**2

plt.streamplot(X, Y, u, v, density = 1, linewidth=0.8)
plt.gca().set_aspect('equal')
plt.show()
```

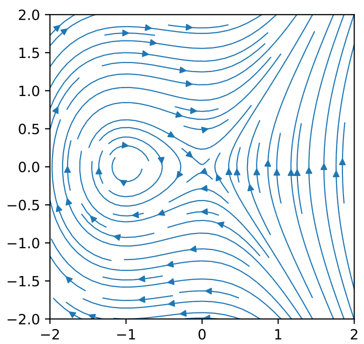

図 A.1　与えられた微分方程式で定まる相図

(2)　平衡点は，$y = 0, x + x^2 = 0$ を満たす点なので，$A(-1, 0)$, $O(0, 0)$ の 2 点です。原点における線形化行列は

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

であり，固有値は，± 1 となり，不安定であることがわかります。

(3)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left(\frac{y^2}{2} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right) &= y\frac{dy}{dt} - x\frac{dx}{dt} - x^2\frac{dx}{dt} \\ &= y(x + x^2) - xy - x^2 y \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので，$\dfrac{y^2}{2} - \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{3}$ が定数であることがわかります。

第 5 章

問題 5-84

$$\int \frac{dx}{x+1} = \int \cos t dt$$

の積分を実行して整理すると，$x = Ce^{\sin t} - 1$ となります。$x(0) = 1$ とすると，$C = 2$ であることがわかります。つまり，この初期値問題の解は，$x = 2e^{\sin t} - 1$ となります。

問題 5-85 リスト 5.1 のプログラムの 14 行目の後に，以下の 2 行を追加してください。

```
x_exact = 2*np.exp(np.sin(t)) - 1
plt.plot(t, x_exact)
```

問題 5-86

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = x + y - x(x^2 + y^2) \\ \frac{dy}{dt} & = -x + y - y(x^2 + y^2) \end{cases} \tag{A.8}$$

odeint 関数を使って解いてみましょう。**リスト A.10** のプログラムを実行すると，**図 A.2** が描かれます。初期値を $(x_0, y_0) = (0.0, 0.1)$ とした解（実線）2 初期値を $(x_0, y_0) = (2.0, 1.0)$ とした解（破線）を描いたものです。解曲線が円らしきものに近づいている様子がわかります。

リスト A.10 （limitcycle2.py）

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

# Limitcycle
# x = v[0], y = v[1], z = v[2]
def Cycleeq(v, t):
    dxdt =  v[0] + v[1] - v[0]*(v[0]**2+v[1]**2)
    dydt = -v[0] + v[1] - v[1]*(v[0]**2+v[1]**2)

    return [dxdt, dydt]

initvar = [0.0, 0.1]  # [x(0), y(0)]
t = np.linspace(0, 10, 400) # time
Clist = odeint(Cycleeq, initvar, t)

initvar2 = [2.0, 1.0]  # [x(0), y(0)]
Clist2 = odeint(Cycleeq, initvar2, t)


fig, ax = plt.subplots()
ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.grid()
ax.plot(Clist[:,0], Clist[:,1], color="black")
ax.plot(Clist2[:,0], Clist2[:,1], linestyle = "dashed", color="black")
fig.tight_layout()
plt.show()
```

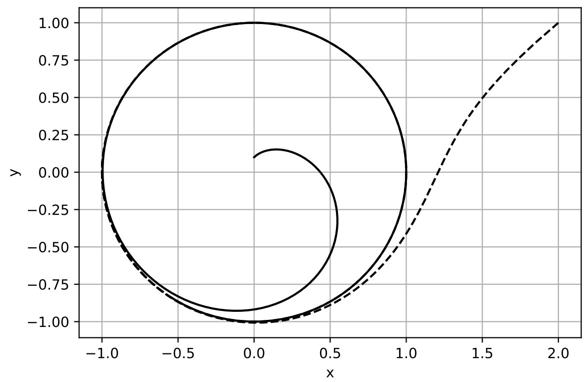

図 A.2 極限周期軌道（リミットサイクル）

極座標変換 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ を導入すると

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dr}{dt}\cos\theta - r\frac{d\theta}{dt}\sin\theta = r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\cos\theta$$
$$\frac{dy}{dt} = \frac{dr}{dt}\sin\theta + r\frac{d\theta}{dt}\cos\theta = -r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin\theta$$

となり，したがって

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{dr}{dt} \\ \frac{d\theta}{dt} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\cos\theta \\ -r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin\theta \end{pmatrix}$$

となりますから

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} r \\ \theta \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\cos\theta \\ -r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\cos\theta \\ -r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{r}\begin{pmatrix} r\cos\theta & r\sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\cos\theta \\ -r\cos\theta + r\sin\theta - r^3\sin\theta \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} r - r^3 \\ -1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

となり，$\theta = -t + \theta_0$ になることがすぐにわかります。また

$$\frac{1}{r - r^3}\frac{dr}{dt} = 1$$

は変数分離形ですので，$r \neq 0$ かつ $r \neq 1$ とし ($r \neq -1$ はつねに成り立ちます)，両辺を積分すれば

$$\begin{aligned}
\int \frac{1}{r(1-r^2)}dr &= \int\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{2}\frac{1}{1+r} + \frac{1}{2}\frac{1}{1-r}\right)dr \\
&= \frac{1}{2}\log\frac{r^2(1+r)}{|1-r|} = t + C
\end{aligned}$$

となるので

$$\frac{|1-r|}{r^2(1+r)} = Ce^{-2t}$$

となります。$t \to \infty$ では右辺は 0 に近づきますので，左辺において，$r \to 1$ であることがわかります。つまり，軌道は単位円に近づいていきます。

問題 5-87 定理 5.2 の条件 (1) から (4) が満たされることはすぐにわかります。$F(x) = \frac{x^3-x}{x^2+1}$ が $x > 0$ において一点 $x = 1$ でのみ 0 となり，$0 < x < 1$ では負，$x > 1$ では正の値を持つ非減少関数であり，$\lim_{x\to\infty} F(x) = \infty$ となりますから，条件 5 も満たされていることがわかります。よって，この微分方程式系は，原点を囲む安定な極限周期軌道をただ 1 つ持ちます。

問題 5-88 例えば，**リスト A.11** のプログラムのようにすればよいでしょう。実行すると**図 A.3** が描かれます。

リスト A.11 （Lienardflow.py）

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

PI = np.pi
n = 1000
x = np.linspace(-2*PI, 2*PI, n)
y = np.linspace(-PI, PI, n)

X, Y = np.meshgrid(x, y)

u = Y
v = -X - Y*(X**4 + 4*X**2-1)/((X**2+1)**2)

plt.streamplot(X, Y, u, v, density = 1.2, linewidth=0.8)
plt.show()
```

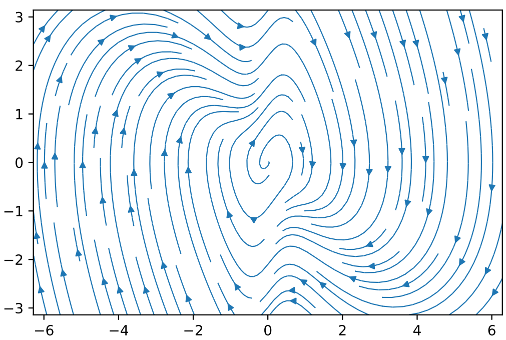

図 A.3 `streamplot` による相図

問題 5-89 図 5.15 は，リスト 5.5 のプログラムの 18 行目をつぎのようにして描きました。

```
t = np.linspace(0, 1000, 100000) # time
```

問題 5-90 連立方程式

$$\begin{cases} -\sigma x + \sigma y = 0 \\ -xz + rx - y = 0 \\ xy - bz = 0 \end{cases}$$

を解きます。$x = y$ ですから，これを第 2 式，第 3 式に代入して，y を消去すれば，$x(-z + r - 1) = 0$, $x^2 - bz = 0$ となります。$r \leq 1$ のときは $x = y = z = 0$(原点) のみが平衡点になります。$r > 1$ のときは，原点に加えて，$z = r - 1$, $x = \pm\sqrt{b(r-1)}$ となります。つまり，求める平衡点は，$r \leq 1$ のときは $(0, 0, 0)$ のみ，$r > 1$ のときは $(0, 0, 0)$, $(\pm\sqrt{b(r-1)}, \pm\sqrt{b(r-1)}, r-1)$(復号同順) の 3 つになります。

問題 5-91 リスト 5.5 のプログラムの 19 行目の r を例えば，$r = 0.5$ としてみてください。

問題 5-92 プログラムは，例えば**リスト A.12** のようにすればよいでしょう。なお，実行結果は**図 A.4** のようになります。このプログラムでは，`atol`, `rtol` はデフォルトのままになっています。変更すると違った軌道になると思いますが，ω 極限集合の様子は，`atol`, `rtol` をどのように設定しても同じように見えるはずです。

リスト A.12 （Rossler.py）

```
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt
# If your version of matplotlib is earlier than 3.2.0,
# the following import statement is required.
from mpl_toolkits.mplot3d import Axes3D

# Rossler equation
# x = R[0], y = R[1], z = R[2]
def Rosslereq(R, t, a, b, c):
    dxdt = - R[1] - R[2]
    dydt = R[0] + a*R[1]
    dzdt = b + R[0]*R[2] - c*R[2]
    return [dxdt, dydt, dzdt]

initvar = [0.5, 0.1, 0.2]  # [x(0), y(0), z(0)]
t = np.linspace(0, 200, 8000) # time
a = 0.2; b = 0.2; c = 5.7
Rlist = odeint(Rosslereq, initvar, t, args = (a, b, c))

fig = plt.figure()
ax = fig.gca(projection='3d')

ax.set_xlabel('x')
ax.set_ylabel('y')
ax.set_zlabel('z')
ax.plot(Rlist[:, 0], Rlist[:, 1], Rlist[:, 2])0
plt.show()
```

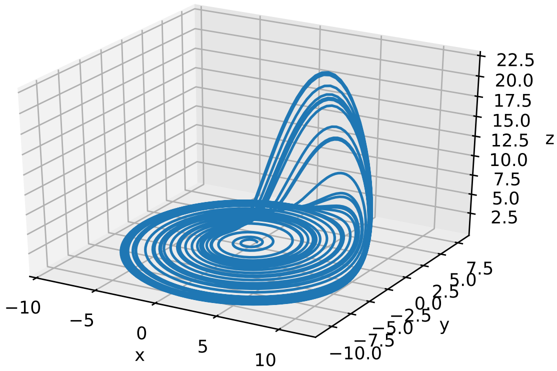

図 A.4 `odeint` によるレスラー方程式の数値解

このストレンジアトラクタはレスラー・アトラクタ（Rössler attractor）と呼ばれています。ローレンツ方程式よりも単純（非線形項が 1 つしかない）にもかかわらずストレンジアトラクタが出現する点が興味深いですね。

問題 5-93 **リスト A.13** のプログラムのようにすればよいでしょう。結果は実行してのお楽しみです。

リスト A.13 （Probfsolve.py）

```
from scipy import optimize
import numpy as np

def f(x):
    return x*np.exp(-x) + x - 1

print(optimize.fsolve(f,1))
```

問題 5-94 プログラムは，例えば，**リスト A.14** のようにすればよいでしょう。ここで，サンプルパラメータは，$m = 0.02$, $\beta_0 = 1.8$, $\beta_1 = 0.28$, $\gamma = 1.15$, $\epsilon = 35.84$ としました。

リスト A.14 （SEIR2.py）

```
##############################################################
# The SIER model in the paper:
# L. F. Olsen, W. M. Schaffer, Chaos Versus Periodicity:
# Alternative Hypothesis for Childhood Epidemics,
# Science, New Series, Vol. 249, No. 4968, pp. 499-504(1990)
##############################################################
import numpy as np
from scipy.integrate import odeint
import matplotlib.pyplot as plt

PI = np.pi
```

```python
# SEIR differential equation
# S = SEIR[0], E = SEIR[1], I = SEIR[2], R = SEIR[3]
def SEIReq(SEIR, t, m, beta0, beta1, gamma, epsilon):
    dSdt = m*(1-SEIR[0])-beta0*(1+beta1*np.cos(2*PI*t))*SEIR[0]*SEIR[2]
    dEdt = beta0*(1+beta1*np.cos(2*PI*t))*SEIR[0]*SEIR[2]-(m+epsilon)*SEIR[1]
    dIdt = epsilon*SEIR[1] - (m + gamma)*SEIR[2]
    dRdt = gamma*SEIR[2] - m*SEIR[3]

    return [dSdt, dEdt, dIdt, dRdt]

t = np.linspace(0, 160, 4000) # time
# parameters in the Olsen-Schaffer paper
# m = 0.02; beta0 = 1800; beta1 = 0.28; gamma = 100; epsilon = 35.84

# sample parameter
m = 0.02; beta0 = 1.8; beta1 = 0.28; gamma = 1.15; epsilon = 35.84

initvar = [0.99, 0, 0.01, 0]  # [S(0), E(0), I(0), R(0)]
SEIRlist = odeint(SEIReq, initvar, t, args=(m, beta0, beta1, gamma, epsilon))

fig, ax = plt.subplots()
ax.set_xlabel('time')
ax.set_ylabel('population')
ax.set_title(r'Time evolution of $(S(t), E(t), I(t), R(t))$')
ax.grid()
ax.plot(t, SEIRlist[:,0], linestyle="solid", label="S", color = "black")
ax.plot(t, SEIRlist[:,1], linestyle="dotted", label="E", color = "black")
ax.plot(t, SEIRlist[:,2], linestyle="dashed", label="I", color = "black")
ax.plot(t, SEIRlist[:,3], linestyle="dashdot", label="R", color = "black")
ax.legend(loc=0)
fig.tight_layout()
plt.show()
```

リスト A.14 のプログラムの実行結果を**図 A.5** に示します。

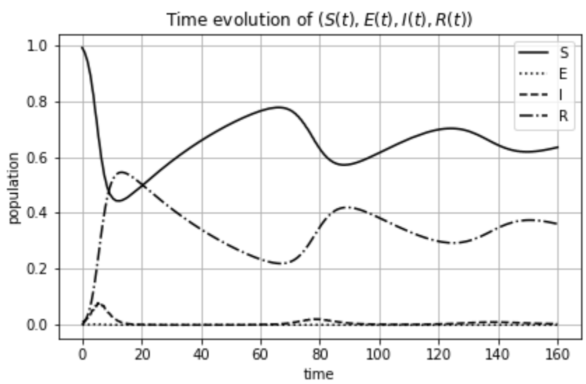

図 A.5　季節変動のある SEIR モデルにおける S, E, I, R の挙動

$I(t)$ の挙動をもう少し細かく見たものが，**図 A.6** になります。こちらを見ると，細かい振動成分があることがわかりますね。図 A.5 と図 A.6 からわかることは，細かい振動と大きな振動の成分があるということです。

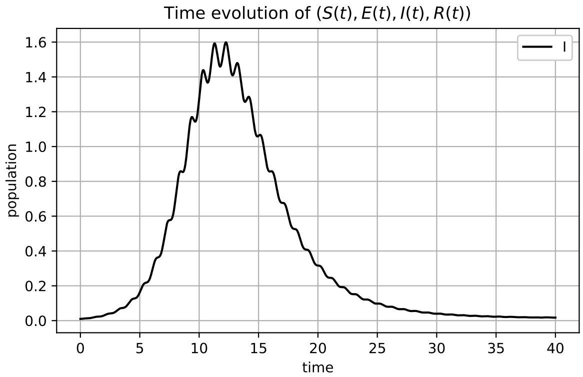

図 A.6 季節変動のある SEIR モデルにおける I の初期の挙動

第 6 章

問題 6-95 $x'' = -x$ ですので，一般解は，$x(t) = C_1 \cos t + C_2 \sin t$ です。$x(0) = C_1 = 0$，$x'(t) = -C_1 \sin t + C_2 \cos t$ から，$x'(0) = C_2 = 1$ ですから，求める厳密解は，$x(t) = \sin t$ となります。数値計算は，例えば**リスト A.15** のプログラムのようにすればよいでしょう。

リスト A.15 （Euler2.py）

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np

fig, ax = plt.subplots()

ax.set_xlabel('t')
ax.set_ylabel('x')
ax.set_title('central-difference method')
ax.grid()

def g(t, x):
    return -x

PI = np.pi
x0 = 0; y0 = 1
h = 0.5
t = np.arange(0, 2*PI, h)
x = []
x.append(x0)
x1 = x0 + y0*h + g(t[0], x0)*h**2/2
x.append(x1)

for j in range(1, len(t)-1):
    x.append(2*x[j] - x[j-1] + g(t[j], x[j])*h**2)

ax.plot(t, x)
ax.plot(t, np.sin(t),linestyle='dotted')
ax.legend(['numerical solution', 'exact solution'])
fig.tight_layout()
plt.show()
```

リスト A.15 のプログラムを実行すると**図 A.7** が描かれます。

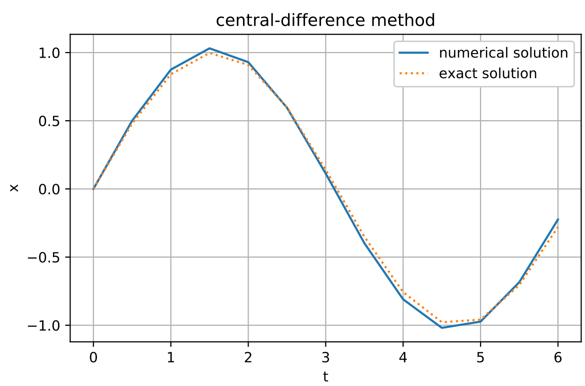

図 A.7　中心差分法による数値解と厳密解の比較 $(h = 0.5)$

問題 6-96 例えば，**リスト A.16** のプログラムのようにすればよいでしょう。14 行目がホイン法，コメントアウトされている 15 行目が改良オイラー法のパラメータセットです。

リスト A.16 （RK2.py）

```
1  import matplotlib.pyplot as plt
2  import numpy as np
3
4  fig, ax = plt.subplots()
5
6  ax.set_xlabel('t')
7  ax.set_ylabel('x')
8  ax.set_title('2nd order Runge-Kutta method')
9  ax.grid()
10
11 def f(t, x):
12     return x
13
14 alpha = 1/2; beta = 1/2; p = 1; q = 1 # Heun's method
15 #alpha = 0; beta = 1; p = 1/2; q = 1/2 # improved Euler method
16
17 x0 = 1; h = 0.1
18 t = np.arange(0, 3, h)
19 x = []
20 x.append(x0)
21 for j in range(len(t)-1):
22     k1 = f(t[j], x[j])
23     k2 = f(t[j] + p*h, x[j] + q*h*k1)
24     x.append(x[j] + h*(alpha*k1 + beta*k2))
25
26 ax.plot(t, x)
27 ax.plot(t, np.exp(t),linestyle='dotted')
28 ax.legend(['numerical solution', 'exact solution'])
29 fig.tight_layout()
30 plt.show()
```

問題 6-97

$$x_{j+1} = x_j + \int_{t_j}^{t_{j+1}} Q_2(t)dt$$

となります。ラグランジュの補間多項式 $Q_2(t)$ は

$$Q_2(t) = f_{j-2}L_{j-2}(t) + f_{j-1}L_{j-1}(t) + f_j L_j(t)$$

$$L_{j-2}(t) = \frac{(t-t_{j-1})(t-t_j)}{(t_{j-2}-t_{j-1})(t_{j-2}-t_j)} = \frac{1}{2h^2}(t-t_{j-1})(t-t_j)$$

$$L_{j-1}(t) = \frac{(t-t_{j-2})(t-t_j)}{(t_{j-1}-t_{j-2})(t_{j-1}-t_j)} = -\frac{1}{h^2}(t-t_{j-2})(t-t_j)$$

$$L_n(t) = \frac{(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})}{(t_j-t_{j-2})(t_j-t_{j-1})} = \frac{1}{2h^2}(t-t_{j-2})(t-t_{j-1})$$

となります。

$$\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{j-2}(t) &= \frac{1}{h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t-t_{j-1})(t-t_j)dt \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_0^{t_{j+1}-t_j} (s+t_j-t_{j-1})sds \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_0^h (s+h)sds \\
&= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{s^3}{3}+h\frac{s^2}{2}\right]_0^h \\
&= \frac{1}{2h^2}\frac{5}{6}h^3 = \frac{5}{12}h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_{j-1}(t) &= -\frac{1}{h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t-t_{j-2})(t-t_j)dt \\
&= -\frac{1}{h^2}\int_0^h (s+2h)sds \\
&= -\frac{1}{h^2}\left[\frac{s^3}{3}+hs^2\right]_0^h \\
&= -\frac{1}{h^2}\frac{4}{3}h^3 = -\frac{4}{3}h
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\int_{t_j}^{t_{j+1}} L_j(t) &= \frac{1}{2h^2}\int_{t_j}^{t_{j+1}} (t-t_{j-2})(t-t_{n-1})dt \\
&= \frac{1}{2h^2}\int_0^h (s+2h)(s+h)ds \\
&= \frac{1}{2h^2}\left[\frac{s^3}{3}+3h\frac{s^2}{2}+2h^2s\right]_0^h \\
&= \frac{1}{2h^2}\frac{23}{6}h^3 = \frac{23}{12}h
\end{aligned}$$

以上から，$x_{j+1} = x_j + \frac{h}{12}(5f_{j-2} - 16f_{j-1} + 23f_j)$ となります。

問題 6-98　リスト 6.5 のプログラムの 6 行目の `return` の直後をそれぞれ，`np.exp(-np.abs(x))`，`np.exp(-4*x**2)` とすればよいでしょう。前者ではルンゲ現象が起き，後者では起きません。

問題 6-99　リスト 6.1 のプログラムにおいて，12 行目を `return -30*x`，15 行目を `t = np.arange(0, 1, h)` とすればよいでしょう。

問題 6-100　テイラー展開の 2 次の項まで一致しますので，安定領域は

$$\left|1+h\lambda+\frac{(h\lambda)^2}{2}\right| < 1$$

となります。リスト 6.7 のプログラムの 9 行目を

```
stab = 1 + z + (z**2)/2
```

として実行すれば

```
x**4/4 + x**3 + x**2*y**2/2 + 2*x**2 + x*y**2 + 2*x + y**4/4 + 1
```

となります。よって，リスト 6.8 のプログラムの 12 行目をつぎのように書き直して実行すれば安定領域を描くことができます。安定領域がどんな形なのかは，実行してのお楽しみです。

```
z = x**4/4 + x**3 + x**2*y**2/2 + 2*x**2
     + x*y**2 + 2*x + y**4/4 + 1
```