機械系のための関数論入門　章末問題の略解またはヒント

1章

[2] (1) $23-14\mathrm{i}$　(2) $\dfrac{4-3\mathrm{i}}{25}$　(3) $\dfrac{-1+13\mathrm{i}}{10}$

[3] (1) $\dfrac{-y}{x^2+y^2}$　(2) $4x^3y-4xy^3$　(3) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$

[4] (1) $z=-3+\mathrm{i}$, $\overline{z}=-3-\mathrm{i}$, $\mathrm{Re}\,z=-3$, $\mathrm{Im}\,z=1$, $|z|=\sqrt{10}$
(2) $z=-3\mathrm{i}$, $\overline{z}=-3\mathrm{i}$, $\mathrm{Re}\,z=0$, $\mathrm{Im}\,z=-3$, $|z|=3$

[5] (1) 625　(2) 1　($|z_1z_2|=|z_1||z_2|$, $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$ $(z_2\neq 0)$ を繰り返し用いる。 (1) については $|z|=|\sqrt{2}+\sqrt{3}i|^8=\sqrt{5}^8=625$)

[6] 等式 $|z|^2=z\overline{z}$ および式 (1.13) を用いる。
(1) $|z+w|^2=(z+w)\overline{(z+w)}=(z+w)(\overline{z}+\overline{w})=|z|^2+z\overline{w}+w\overline{z}+|w|^2$. 同様に $|z-w|^2=|z|^2-z\overline{w}-w\overline{z}+|w|^2$ より $|z+w|^2+|z-w|^2=2((|z|^2+|w|^2)$

[8] $-3-4\mathrm{i}=5(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$, ただし $\theta=\arctan\dfrac{4}{3}$, $-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{2}$.
$3\mathrm{i}=3(\cos\dfrac{\pi}{2}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{2})$, $-3\mathrm{i}=3(\cos(-\dfrac{\pi}{2})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{2}))$.
(注: Euler の公式 $e^{\mathrm{i}y}=\cos y+\mathrm{i}\sin y$ (4 章, 式 (4.6)) を用いれば, $3\mathrm{i}=3e^{(\pi/2)\mathrm{i}}$ 等と表すことができる。)

[9] $1+\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos\dfrac{\pi}{4}+\mathrm{i}\sin\dfrac{\pi}{4})(=\sqrt{2}e^{(\pi/4)\mathrm{i}})$. 偏角の主値は $\dfrac{\pi}{4}$.
$1-\mathrm{i}=\sqrt{2}(\cos(-\dfrac{\pi}{4})+\mathrm{i}\sin(-\dfrac{\pi}{4}))(=\sqrt{2}e^{-(\pi/4)\mathrm{i}})$. 偏角の主値は $-\dfrac{\pi}{4}$.

[10] $(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)(\cos\pi+\mathrm{i}\sin\pi)=\cos 2\pi+\mathrm{i}\sin 2\pi$

[13] $2^{1/8}\left(\cos\left(\dfrac{3}{16}+\dfrac{n}{2}\right)\pi+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{3}{16}+\dfrac{n}{2}\right)\pi\right)$ $(n=0,1,2,3)$

[14] (1) $2^{1/6}\left(\cos\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{2n}{3}\right)\pi+\mathrm{i}\sin\left(\dfrac{1}{12}+\dfrac{2n}{3}\right)\pi\right)$ $(n=0,1,2)$
(2) $6\left(\cos\dfrac{2n}{3}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{2n}{3}\pi\right)$

[16] $z=\cos\dfrac{2n}{5}\pi+\mathrm{i}\sin\dfrac{2n}{5}\pi$ $(n=0,1,2,3,4)$

[17] (1) $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$, $y\geq 0$　(2) $x^2-y^2=1$

[19] $\overline{a_n\alpha^n+a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0}=a_n\overline{\alpha}^n+a_{n-1}\overline{\alpha}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\alpha}+a_0$ が成り立つことを用いる。

2 章

[2] (1) $u = x^2 - y^2 + 3x$, $v = 2xy + 3y$, $f(1+3\mathrm{i}) = -5 + 15\mathrm{i}$
(2) $u = 6x - 2y$, $v = 2x + 6y$, $f(\frac{1}{2} + 4\mathrm{i}) = -5 + 25\mathrm{i}$

[3] (1) 存在しない（3 章, 例題 3.1 参照） (2) $\frac{3}{2}$ (3) 存在しない

[4] $||f(z)| - |f(z_0)|| \leq |f(z) - f(z_0)| \to 0$ $(z \to z_0)$

[5] (1) 連続でない (2) 連続である

3 章

[1] $\lim_{z\to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z\to z_0} \left(-\dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{(z - z_0)\overline{zz_0}} \right)$ において, $\lim_{z\to z_0} \dfrac{\overline{z} - \overline{z_0}}{z - z_0}$ は例題 3.1 より存在しないから, この極限は存在しない。したがって $f(z)$ はどの z においても微分可能でない。

[3] (1) $\mathrm{Re}\, f = x^2 - y^2 + 2x + 2$, $\mathrm{Im}\, f = 2y(x+1)$ より $(\mathrm{Re} f)(1-\mathrm{i}) = 4$, $(\mathrm{Im} f)(1-\mathrm{i}) = -4$
(2) $(\mathrm{Re} f)(4\mathrm{i}) = \frac{3}{5}$, $(\mathrm{Im} f)(4\mathrm{i}) = \frac{4}{5}$

[4] (1) 連続でない (2) 連続である

[5] 与えられた関数を $f(z)$ とおく。(1) $f'(z) = \dfrac{2\mathrm{i}}{(z+\mathrm{i})^2}$ より $f'(\mathrm{i}) = -\dfrac{\mathrm{i}}{2}$
(2) $f'(z) = -2(5+3\mathrm{i})z^{-3}$ より $f'(2+\mathrm{i}) = \dfrac{-86+98\mathrm{i}}{125}$
(3) $f'(z) = 4z^3 - 4z^{-5}$, $-1-\mathrm{i} = \sqrt{2}(\cos\frac{5}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{5}{4}\pi)$ だから, de Moivre の定理を用いて

$$f'(-1-\mathrm{i}) = 8\sqrt{2}(\cos\frac{15}{4}\pi + \mathrm{i}\sin\frac{15}{4}\pi) - \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos\frac{25}{4}\pi - \mathrm{i}\sin\frac{25}{4}\pi) = \frac{15}{2}(1-\mathrm{i})$$

[6] (1) どの領域でも正則でない（$z = x + \mathrm{i}y$, $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ として $u(x,y) = x$, $v(x,y) = -y$. $u_x(x,y) = 1 \neq -1 = v_y(x,y)$ より, どの (x,y) でも Cauchy-Riemann の方程式が成り立たないので, $f(z)$ はどの z でも微分可能でない。）
(2) 平面全体で正則（$u(x,y) = x^3 - 3xy^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3$ より, すべての x, y に対して $u_x(x,y) = 3x^2 - 3y^2 = v_y(x,y)$, $u_y(x,y) = -6xy = -v_x(x,y)$）
(3) どの領域でも正則でない（$u(x,y) = x^2 + y^2, v(x,y) = 0$ より $u_x(x,y) = 2x, u_y(x,y) = 2y, v_x(x,y) = v_y(x,y) = 0$. これらは連続関数で, $(x,y) = (0,0)$ のとき, かつそのときに限り Cauchy -Riemann の方程式が成り立つ。したがって $f(z)$ は $z = 0$ でのみ微分可能）
(4) 平面全体で正則
(5) どの領域でも正則でない（注：$z = 0$ でのみ微分可能）
(6) どの領域でも正則でない

[7] 求める関数を $f(z) = u(x,y) + \mathrm{i}v(x,y)$ $(z = x + \mathrm{i}y)$ とおく。$u = x^2 - y^2$ より $u_x = 2x$, $u_y = -2y$ だから Cauchy–Riemann の方程式より $v_y = 2x \cdots$ ①, $v_x = 2y \cdots$ ②. ① より $v = 2xy + h(x)$ ($h(x)$ は x の実数値関数). $v_x = 2y + h'(x)$ と ② より $h'(x) = 0$, したがって $h(x) = a$（実数）だから $f(z) = x^2 - y^2 + \mathrm{i}(2xy + a) = z^2 + a\mathrm{i}$.

[8] $c_1 = 4$, $c_2 = -4$, $f(z) = z^4$

[11] (1) 調和関数, $f(z) = \dfrac{1}{z}$ (2) 調和関数, $f(z) = \log z$ (3) 調和関数, $f(z) = -e^{-z}$

4章

[7] (1) $\dfrac{e^{\mathrm{i}-1} + e^{1-\mathrm{i}}}{2}$ (2) $-\dfrac{e^{-1} + e}{2}$ (3) $\dfrac{e^{\mathrm{i}-1} - e^{1-\mathrm{i}}}{2\mathrm{i}}$ (4) $\dfrac{e^{-1} + e}{2}$

[8] $(\tan z)' = \dfrac{1}{\cos^2 z}$, $(\cot z)' = -\dfrac{1}{\sin^2 z}$, $(\sec z)' = \dfrac{\sin z}{\cos^2 z}$, $(\csc z)' = -\dfrac{\cos z}{\sin^2 z}$

[12] (1) $\dfrac{\mathrm{i}(e - e^{-1})}{2}$ (2) $\dfrac{e^{\pi+\mathrm{i}} + e^{-\pi-\mathrm{i}}}{2}$ (3) $\dfrac{\mathrm{i}(e + e^{-1})}{2}$ (4) $\dfrac{e^{(\pi/2)+\mathrm{i}} - e^{-(\pi/2)-\mathrm{i}}}{2}$

[13] $z = x + \mathrm{i}y$ として $|\cos z|^2 = \cos^2 x + \sinh^2 y$, $|\sin z|^2 = \sin^2 x + \sinh^2 y$

[16] (1) $\log(-1) = (2n+1)\pi\mathrm{i}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, $\mathrm{Log}\,(-1) = -\pi\mathrm{i}$
(2) $\log(3+4\mathrm{i}) = \log 5 + (\theta + 2n\pi)\mathrm{i}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, $\mathrm{Log}(3+4\mathrm{i}) = \log 5 + \mathrm{i}\theta$, ただし $\theta = \arctan\dfrac{4}{3}$, $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$
(3) $\log(1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\log 2 + (\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi)\mathrm{i}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, $\mathrm{Log}(1+\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\log 2 + \dfrac{\pi}{4}\mathrm{i}$,
$\log(1-\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\log 2 + (-\dfrac{\pi}{4} + 2n\pi)\mathrm{i}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, $\mathrm{Log}(1-\mathrm{i}) = \dfrac{1}{2}\log 2 - \dfrac{\pi}{4}\mathrm{i}$
(4) $\log(-10+5\mathrm{i}) = \log 5\sqrt{5} + (\theta + 2n\pi)\mathrm{i}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$, $\mathrm{Log}(-10+5\mathrm{i}) = \log 5\sqrt{5} + \mathrm{i}\theta$, ただし $\theta = \arctan(-\dfrac{1}{2})$, $\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$

[17] (1) $e^{(\pi/4)\mathrm{i}}$, $e^{-(3/4)\pi\mathrm{i}}$ (2) $\sqrt{2}e^{((8n+1)/4)\pi}e^{(-\log\sqrt{2}+((8n+1)/4)\pi)\mathrm{i}}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$
(3) $5^{1/3}e^{((\theta+2n\pi)/3)\mathrm{i}}$ $(n = 0, 1, 2)$, ただし $\theta = \arctan(-\dfrac{4}{3})$, $-\dfrac{\pi}{2} < \theta < 0$
(4) $e^{((4n-1)/2)\pi}$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \cdots)$

5章

[2] (1) $C : z(t) = 1 + 2e^{\mathrm{i}t}$ $(0 \le t \le 2\pi)$. $z'(t) = 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}$. $\int_C \overline{z}\,dz = \int_0^{2\pi}(1 + 2e^{-\mathrm{i}t}) \cdot 2\mathrm{i}e^{\mathrm{i}t}\,dt = 8\pi\mathrm{i}$
(2) 例題 5.2 より $C : z(t) = t(2+\mathrm{i}) + (1-t)\cdot 1 = (1+t) + t\mathrm{i}$ $(0 \le t \le 1)$. $z'(t) = 1 + \mathrm{i}$. $\int_C \mathrm{Im}\,z\,dz = \int_0^1 t(1+\mathrm{i})\,dt = \dfrac{1+\mathrm{i}}{2}$
(3) C_1 を 0 から 2 に至る線分, C_2 を 2 から i に至る線分とすると $C_1 : z = t$ $(0 \le t \le 2)$, $C_2 : z = 2(1-t) + t\mathrm{i}$ $(0 \le t \le 1)$. $\int_{C_1} |z|^2 dz = \int_0^2 t^2\,dt = \dfrac{8}{3}$, $\int_{C_2} |z|^2 dz = (\mathrm{i}-2)\int_0^1 \{4(1-t)^2 + t^2\}\,dt = \dfrac{5\mathrm{i}-10}{3}$. よって $\int_C |z|^2 dz = \int_{C_1} |z|^2\,dz + \int_{C_2} |z|^2\,dz = \dfrac{5\mathrm{i}-2}{3}$
(4) $C : z = 2e^{\mathrm{i}t}$ $(0 \le t \le \pi)$. $\int_C (z + 1/z)\,dz = \int_0^\pi (2e^{\mathrm{i}t} + 2^{-1}e^{-\mathrm{i}t})2ie^{\mathrm{i}t}\,dt = \pi\mathrm{i}$

[3] (1) $f(z) = \sin z$ は z 平面全体で正則だから, Cauchy の定理より 0.

(2) $f(z)=\dfrac{z^2}{z-3}$ は C と C の内部で正則である ($f(z)$ の微分可能でない点 $z=3$ が C の外部にある) から, Cauchy の定理より 0.

(3) $f(z)=e^{\pi z}$ は z 平面全体で正則で, $-\mathrm{i}$ は C の内部にある. (与式) $=2\pi\mathrm{i}\cdot f(-\mathrm{i})=-2\pi\mathrm{i}$

(4) $f(z)=\dfrac{z^3+1}{z+2}$ とおくと (与式) $=\int_C \dfrac{f(z)}{z-2}\,dz=2\pi\mathrm{i}f(2)=\dfrac{9}{2}\pi\mathrm{i}$ (2 は C の内部にある)

(5) $\dfrac{1}{z^2+9}=\dfrac{1}{(z+3\mathrm{i})(z-3\mathrm{i})}$. $-3\mathrm{i}$ が C の内部にあるから $f(z)=\dfrac{1}{z-3\mathrm{i}}$ として (与式) $=2\pi\mathrm{i}f(-3\mathrm{i})=-\dfrac{\pi}{3}$

(6) 0

(7) $C_1:|z|=1/3$, $C_2:|z-1|=1/3$ (正の向き) とおくと, 定理 5.6 より (与式) $=\int_{C_1}\dfrac{e^z}{z(z-1)}\,dz+\int_{C_2}\dfrac{e^z}{z(z-1)}\,dz=-2\pi\mathrm{i}+2\pi\mathrm{i}e=2\pi(e-1)\mathrm{i}$. あるいは (与式) $=\int_C\dfrac{e^z}{z-1}dz-\int_C\dfrac{e^z}{z}\,dz=2\pi\mathrm{i}e-2\pi\mathrm{i}=2\pi(e-1)\mathrm{i}$

(8) $f(z)=e^{2z}$ とおく. 2 が C の内部にあるから, 定理 5.8 より (与式) $=\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{3!}f'''(2)=\dfrac{8e^4\pi\mathrm{i}}{3}$

(9) $-12\pi\mathrm{i}$

(10) $-\dfrac{2}{3}\pi\mathrm{i}$ ($f(z)=\overline{z}$ はどの z でも微分可能でない (3 章, 章末問題 [6]). $|z|=1$ のとき $\overline{z}=1/z$ に注意。)

(11) $9\pi\mathrm{i}$ ($f(z)=(\mathrm{Re}\,z)^2$ は $z=0$ でのみ微分可能だから, Cauchy の積分公式は使えない。C をパラメータ表示して計算する。)

(12) $\dfrac{2}{25}\pi\mathrm{i}$ (-2 が C の内部にある。)

(13) $-\dfrac{2}{25}\pi\mathrm{i}$ ($\dfrac{1}{2}$ が C の内部にあるから $f(z)=\dfrac{1}{4(z+2)}$ とおくと, (与式) $=\int_C\dfrac{f(z)}{(z-1/2)^2}\,dz=\dfrac{2\pi\mathrm{i}}{1!}f'(\dfrac{1}{2})=-\dfrac{2}{25}\pi\mathrm{i}$)

6 章

[1] (1) $-\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}2^nz^n$, $R=\dfrac{1}{2}$ (2) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\mathrm{i}^{n-1}(z-\mathrm{i})^n$, $R=1$ (3) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}z^{2n+3}$, $R=1$

(4) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n2^{2n+1}}{(2n+1)!}(z-\pi)^{2n+1}$, $R=\infty$

[2] $0<|z-1|<1$ のとき

$$\begin{aligned}\frac{1}{z(z-1)}&=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{z}\\&=\frac{1}{z-1}-\frac{1}{1+(z-1)}\\&=\frac{1}{z-1}-\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n(z-1)^n=\sum_{n=-1}^{\infty}(-1)^{n+1}(z-1)^n\end{aligned}$$

[3] (1) $z=0$, 2 位の極 (2) $z=0$, 3 位の極；$z=\mathrm{i}$, 1 位の極；$z=-\mathrm{i}$, 1 位の極 (3) $z=0$, 除去可能な特異点 (4) $z=0$, 除去可能な特異点; $z=2n\pi\mathrm{i}\,(n=\pm1,\pm2,\cdots)$, 1 位の極 (5) $z=0$, 除去可能な特異点; $z=n\pi\,(n=\pm1,\pm2,\cdots)$, 1 位の極

[4] (1) $\mathrm{Res}(0)=0$ (2) $\mathrm{Res}(0)=-1$, $\mathrm{Res}(\mathrm{i})=\dfrac{\mathrm{i}+1}{2}$, $\mathrm{Res}(-\mathrm{i})=\dfrac{1-\mathrm{i}}{2}$ (3) $\mathrm{Res}(0)=0$ (4) $\mathrm{Res}(0)=0$, $\mathrm{Res}(2n\pi\mathrm{i})=2n\pi\mathrm{i}\,(n=\pm1,\pm2,\cdots)$ (5) $\mathrm{Res}(0)=0$, $\mathrm{Res}(n\pi)=(-1)^n n\pi\,(n=\pm1,\pm2,\cdots)$

7章

[5] $\mathrm{Im}\,w=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(w-\overline{w})=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}\left(\dfrac{az+b}{cz+d}-\dfrac{a\overline{z}+b}{c\overline{z}+d}\right)=\dfrac{(ad-bc)(z-\overline{z})}{2\mathrm{i}|cz+d|^2}=\dfrac{(ad-bc)\mathrm{Im}\,z}{|cz+d|^2}$

１０章

[1] $\Phi(x,y)=U\Big(x+\dfrac{a^2x}{x^2+y^2}\Big)$, $\Psi(x,y)=U\Big(y-\dfrac{a^2y}{x^2+y^2}\Big)$

[2] $\Phi_x(x,y)=U\Big(1+\dfrac{a^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\Big)=\Psi_y(x,y)$
および $\Phi_y(x,y)=-U\dfrac{2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}=-\Psi_x(x,y)$
より正則である。

[3] $\mathrm{grad}\,\Phi=\Big(U\big(1+\dfrac{a^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\big),-U\dfrac{2a^2xy}{(x^2+y^2)^2}\Big)$
および $\mathrm{grad}\,\Psi=\Big(U\dfrac{2a^2xy}{(x^2+y^2)^2},U\big(1+\dfrac{a^2(y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^2}\big)\Big)$ より $\mathrm{grad}\,\Phi\cdot\mathrm{grad}\,\Psi=0$

[4] $\mathrm{grad}\,\Phi=\big(U\cos\alpha,U\sin\alpha\big)$ および $\mathrm{grad}\,\Psi=\big(-U\sin\alpha,U\cos\alpha\big)$ より
$\mathrm{grad}\,\Phi\cdot\mathrm{grad}\,\Psi=0$

１１章

[1] 温度分布 $T(x)=\dfrac{T_L-T_0}{L}x+T_0$
複素熱ポテンシャル $F(z)=\dfrac{T_L-T_0}{L}z+T_0+\mathrm{i}c$ (c は定数)

[2] 温度分布 $T(r)=\dfrac{T_L-T_0}{\log\ L}\log\ r+T_0$
複素熱ポテンシャル $F(z)=\dfrac{T_L-T_0}{\log\ L}\log\ z+T_0+\mathrm{i}c$ (c は定数)

１３章

[1] 10

[6] (1) $\dfrac{y-x}{(x+y)^2}$ (2) $\cos z + \log x - 2z$

[7] $\mathbf{0}$