第１章．ベクトルに関する基本事項

１．１

問 1.1

スカラー量：電荷、質量、エネルギー、温度

ベクトル量：力、速度、加速度、運動量、電場、モーメント

１．２

問 1.2

$\dfrac{\boldsymbol{A}}{A}$ は明らかに点Pの位置ベクトル $\boldsymbol{A}$ と同じ方向を向く。単位ベクトルの大きさは１であるから、その点Pの位置ベクトルを自身の大きさで割ることにより、$\boldsymbol{A}$ 方向の単位ベクトルを得る。

問 1.3

$$\boldsymbol{e}_r = \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{r}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right) = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k}$$

$$e_r = \left|\boldsymbol{e}_r\right| = \sqrt{\frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2}} = 1$$

よって、大きさ 1 であることが確かめられる。

問 1.4

$\boldsymbol{A} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ より $\boldsymbol{A} = K\boldsymbol{r}$ とおける。（$K \neq 0$）

$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ より

$$\boldsymbol{A} = K\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right) \Rightarrow A = \sqrt{\left(Kx\right)^2 + \left(Ky\right)^2 + \left(Kz\right)^2} = K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

また、$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ より

$$A\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = K\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\,\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right)$$

$$= K\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right) = K\boldsymbol{r} = \boldsymbol{A}$$

問 1.5

$$\boldsymbol{A} = A\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) \quad \text{また} \quad A = \frac{K}{r^2} \quad \text{なので} \quad \boldsymbol{A} = A\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = \frac{K}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

問 1.6

$$\boldsymbol{r}_1 = \overrightarrow{\mathrm{OP}} = x_1\boldsymbol{i} + y_1\boldsymbol{j} + z_1\boldsymbol{k}$$
$$\boldsymbol{r}_2 = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = x_2\boldsymbol{i} + y_2\boldsymbol{j} + z_2\boldsymbol{k}$$

（1）

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} - \overrightarrow{\mathrm{OP}} = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$$

$$\therefore \overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1$$

（2）

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1 = (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}$ より

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right| = |\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

点Pと点Qとの距離は点と点の距離の公式より $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

よって、(1.10)式は確かめられた。

（3）

$\boldsymbol{A} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ なので $\boldsymbol{A} = A\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|}$ また $\boldsymbol{A} = A\dfrac{K}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2}$ より

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A} &= \frac{K}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|^2}\frac{\overrightarrow{\mathrm{PQ}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\right|} \\
&= \frac{K}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|^2}\frac{(\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1)}{|\boldsymbol{r}_2 - \boldsymbol{r}_1|} \\
&= \frac{K}{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}\frac{(x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}} \\
&= K\frac{(x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}}{\left\{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2\right\}^{3/2}}
\end{aligned}$$

１．３

問 1.7

$$\boldsymbol{A} = 3\boldsymbol{i} + (-1)\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k},$$
$$\boldsymbol{B} = (-2)\boldsymbol{i} + (-5)\boldsymbol{j} + 6\boldsymbol{k}$$

（１）　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 3\cdot(-2) + (-1)\cdot(-5) + 2\cdot 6 = 11$

（２）　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 2\cdot 5 + 1\cdot 1 + (-3)\cdot 2 = 5$

問 1.8

（１）　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k}$　よって　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 1,\ |\boldsymbol{A}| = \sqrt{2},\ |\boldsymbol{B}| = 1$　$\therefore \cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

（２）　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B} = \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j} + (-1)\boldsymbol{k}$　よって　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 1,\ |\boldsymbol{A}| = \sqrt{3},\ |\boldsymbol{B}| = \sqrt{3}$　$\therefore \cos\theta = \dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|} = \dfrac{1}{3}$

問 1.9

$\boldsymbol{A} = 4\boldsymbol{i} + (-2)\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k},\ \boldsymbol{B} = 3\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j} + (-6)\boldsymbol{k}$　よって　$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} = 12 - 6 - 6 = 0$

$\therefore \cos\theta = 0$ このとき $\theta = 90^\circ$

問 1.10

交換法則：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} &= (A_x, A_y, A_z)\cdot(B_x, B_y, B_z) \\
&= A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z \\
&= B_xA_x + B_yA_y + B_zA_z \\
&= (B_x, B_y, B_z)\cdot(A_x, A_y, A_z) = \boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{A}
\end{aligned}$$

分配法則：

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C}) &= (A_x, A_y, A_z)\cdot(B_x + C_x, B_y + C_y, B_z + C_z) \\
&= A_xB_x + A_xC_x + A_yB_y + A_yC_y + A_zB_z + A_zC_z \\
&= (A_x, A_y, A_z)\cdot(B_x, B_y, B_z) + (A_x, A_y, A_z)\cdot(C_x, C_y, C_z) = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B} + \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

問 1.11

x 方向への仕事　$F_x\Delta x$ 、y 方向への仕事　$F_y\Delta y$ 、z 方向への仕事　$F_z\Delta z$ 、

以上より $\Delta W = F_x\Delta x + F_y\Delta y + F_z\Delta z = \left(F_x, F_y, F_z\right)\cdot\left(\Delta x, \Delta y, \Delta z\right) = \boldsymbol{F}\cdot\Delta r$

問 1.12

（1）$\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\boldsymbol{B}}{B} = \left(1,1,2\right)\cdot\dfrac{\left(1,1,0\right)}{\sqrt{1^2+1^2+0}} = \dfrac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$

（2）$\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{\boldsymbol{B}}{B} = \left(2,1,-2\right)\cdot\dfrac{\left(0,0,2\right)}{\sqrt{0+0+2^2}} = \dfrac{-4}{2} = -2$

問 1.13

ベクトル $\boldsymbol{A}$ を平行方向と垂直方向に分解して　$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}_{\parallel} + \boldsymbol{A}_{\perp}$

したがって、$\boldsymbol{A}_{\perp} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{\parallel}$　ここで、$\boldsymbol{A}_{\parallel} = \left|\boldsymbol{A}\right|\cos\theta\boldsymbol{e}_B = \left(\dfrac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\left|\boldsymbol{B}\right|}\right)\boldsymbol{e}_B$

$$\therefore \boldsymbol{A}_{\perp} = \boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}_{\parallel} = \boldsymbol{A} - \left(\frac{\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}}{\left|\boldsymbol{B}\right|}\right)\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{A} - \left(\boldsymbol{A}\cdot\frac{\boldsymbol{B}}{\left|\boldsymbol{B}\right|}\right)\boldsymbol{e}_B = \boldsymbol{A} - \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_B\right)\boldsymbol{e}_B$$

問 1.14

（1）$\boldsymbol{F}$ を単位接線ベクトル $\boldsymbol{t}$ に投影する。$F_t = \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}$

（2）問 1.13 の概念を使う。$\boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F} - \boldsymbol{F}_t = \boldsymbol{F} - \left(\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{t}\right)\boldsymbol{t}$

問 1.15

$\boldsymbol{F}$ を位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の方向に投影する。つまり、$\boldsymbol{F}$ と $\boldsymbol{r}$ 方向の単位ベクトルとの内積をとればよいので　$F_r = \boldsymbol{F}\cdot\dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = F_x\dfrac{x}{r} + F_y\dfrac{y}{r} + F_z\dfrac{z}{r}$

問 1.16

$\boldsymbol{h}$ の屋根に垂直な成分 h_n は、$\boldsymbol{h}$ を屋根に垂直な単位ベクトル $\boldsymbol{n}$ に投影すればよいので、$h_n = \boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}$

1．4

問 1.17

（1）
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & -5 & 6\end{vmatrix}=\{-6-(-10)\}\boldsymbol{i}+\{-4-18\}\boldsymbol{j}+\{-15-(+2)\}\boldsymbol{k}$$
$$=4\boldsymbol{i}-22\boldsymbol{j}-17\boldsymbol{k}=(4,\ -22,\ -17)$$

（2）
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 2 & 1 & -3\\ 5 & 1 & 2\end{vmatrix}=\{2-(-3)\}\boldsymbol{i}+\{-15-4\}\boldsymbol{j}+\{2-5\}\boldsymbol{k}$$
$$=5\boldsymbol{i}-19\boldsymbol{j}-3\boldsymbol{k}=(5,\ -19,\ -3)$$

問 1.18

外積の大きさについて　$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\theta$　が成立するので　$\sin\theta=\dfrac{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$

により計算する。

（1）
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=(1,\ -1,\ 0),\quad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\sqrt{2},\quad |\boldsymbol{A}|=\sqrt{2},\quad |\boldsymbol{B}|=1,$$
$$\sin\theta=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot 1}=1$$

（2）
$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & -1\end{vmatrix}=(-2,\ 2,\ 0),\quad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=2\sqrt{2},\quad |\boldsymbol{A}|=\sqrt{3},\quad |\boldsymbol{B}|=\sqrt{3},\ ,$$
$$\sin\theta=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

問 1.19

両方のベクトル$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$に垂直な方向を向くベクトルは、それらの外積をとることにより得られる。その方向は2種類あり、互いに逆向きの方向をもつ。

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ 3 & -1 & 2\\ -2 & -5 & 6\end{vmatrix}=(4,\ -22,\ -17)\,,\qquad |\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=\sqrt{789}$$

$$\therefore\ \boldsymbol{n}_1=\frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}=\frac{(4,\ -22,\ -17)}{\sqrt{789}}=\left(\frac{4}{\sqrt{789}},\ \frac{-22}{\sqrt{789}},\ \frac{-17}{\sqrt{789}}\right)$$

逆向きのベクトル $\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ も考えて、

$$\therefore\ \boldsymbol{n}_2=-\boldsymbol{n}_1=\left(\frac{-4}{\sqrt{789}},\ \frac{22}{\sqrt{789}},\ \frac{17}{\sqrt{789}}\right)$$

問 1.20

（1）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=(-6,\ 0,\ -3)$，　面積：$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=3\sqrt{5}$

（2）内側を向くベクトルを得るためには、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$という順序で外積をとらなくてはならない。$\boldsymbol{n}=\dfrac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}=\dfrac{(-6,\ 0,\ -3)}{3\sqrt{5}}=\left(-\dfrac{2}{\sqrt{5}},\ 0,\ -\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)$

問 1.21

図にあるように、θ方向の接線ベクトルは$\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$である。

問 1.22

（解１）

粒子の速度を $\boldsymbol{v}$ で表すと、その大きさは v となる。

$v =$ （円軌道の半径）・（単位時間当たりの回転角）で表され、

（円軌道の半径） $= r\sin\alpha$ （ただし、α は粒子の位置ベクトルと z 軸とのなす角）

（単位時間当たりの回転角） $= \omega$

ゆえに　$v = r\omega\sin\alpha$ 。一方、$\boldsymbol{v}$ の方向は円軌道の接線方向。問 1.21 から接線方向の単位ベクトルは、$\dfrac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}|}$ である。

以上から　$\boldsymbol{v} = v\dfrac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}|} = r\omega\sin\alpha\dfrac{\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}}{|\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}|} = \dfrac{r\omega\sin\alpha(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r})}{r\sin\alpha} = \omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r}$

（解２）

粒子の速度 $\boldsymbol{v}$ は位置ベクトル $\boldsymbol{r}$ の時間変化と捉えることができるので、$\boldsymbol{r}$ を円柱座標系で表せば、速度ベクトルは

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}\right) \\
&= -\frac{d\theta}{dt}r\sin\theta\boldsymbol{i} + \frac{d\theta}{dt}r\cos\theta\boldsymbol{j} \qquad \text{となる。} \\
&= -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

確かめたい式は、$\boldsymbol{v} = \omega\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = (-\omega y, \omega x, 0)$　であり、先の式と一致する。

問 1.23

角運動量、力のモーメント、ポインティングベクトルなど。

問 1.24

$$
\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x+C_x & B_y+C_y & B_z+C_z \end{vmatrix}
$$

$$
\begin{aligned}
&=\left(A_yB_z+A_yC_z-A_zB_y-A_zC_y\right)\boldsymbol{i} \\
&\quad+\left(A_zB_x+A_zC_x-A_xB_z-A_xC_z\right)\boldsymbol{j} \\
&\quad+\left(A_xB_y+A_xC_y-A_yB_x-A_yC_x\right)\boldsymbol{k} \\
&=\left\{\left(A_yB_z-A_zB_y\right)\boldsymbol{i}+\left(A_zB_x-A_xB_z\right)\boldsymbol{j}+\left(A_xB_y-A_yB_x\right)\boldsymbol{k}\right\} \\
&\quad+\left\{\left(A_yC_z-A_zC_y\right)\boldsymbol{i}+\left(A_zC_x-A_xC_z\right)\boldsymbol{j}+\left(A_xC_y-A_yC_x\right)\boldsymbol{k}\right\} \\
&=\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}
\end{aligned}
$$

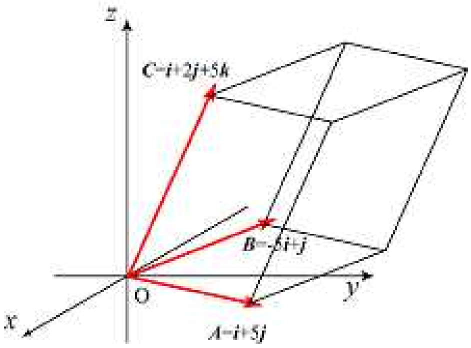
1．5

1．5．1

問 1.25

$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{i}+5\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{B}=-5\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j},\quad \boldsymbol{C}=\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}+5\boldsymbol{k}$

（1）



（2）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ -1 & 0 & 2\\ 0 & 3 & 0\end{vmatrix}=(-6,\ 0,\ -3)$，$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|=26$

（3）高さ：$h=\boldsymbol{C}\cdot\dfrac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}|}=(1,\ 2,\ 5)\cdot\dfrac{(0,\ 0,\ 26)}{\sqrt{0^2+0^2+26^2}}=5$

（4）体積：$V=130$　（5）$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=(0,\ 0,\ 26)\cdot(1,\ 2,\ 5)=130$

１．５．２

問 1.26

（1） $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} = \left(B_yC_z - B_zC_y,\ B_zC_x - B_xC_z,\ B_xC_y - B_yC_x\right)$

（2）

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{A}\times\boldsymbol{P} \\
&= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_yC_z - B_zC_y & B_zC_x - B_xC_z & B_xC_y - B_yC_x \end{vmatrix} \\
&= \left(A_yB_xC_y - A_yB_yC_x - A_zB_zC_x + A_zB_xC_z\right)\boldsymbol{i} \\
&\quad + \left(A_zB_yC_z - A_zB_zC_y - A_xB_xC_y + A_xB_yC_x\right)\boldsymbol{j} \\
&\quad + \left(A_xB_zC_x - A_xB_xC_z - A_yB_yC_z + A_yB_zC_y\right)\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

（3）

$$\begin{aligned}
&\boldsymbol{Q} + \left\{\left(A_xB_xC_x - A_xB_xC_x\right)\boldsymbol{i} + \left(A_yB_yC_y - A_yB_yC_y\right)\boldsymbol{j} + \left(A_zB_zC_z - A_zB_zC_z\right)\boldsymbol{k}\right\} \\
&= \left\{\left(A_xB_xC_x + A_yB_xC_y + A_zB_xC_z\right) - \left(A_xB_xC_x + A_yB_yC_x + A_zB_zC_x\right)\right\}\boldsymbol{i} \\
&+ \left\{\left(A_yB_yC_y + A_zB_yC_z + A_xB_yC_x\right) - \left(A_yB_yC_y + A_zB_zC_y + A_xB_xC_y\right)\right\}\boldsymbol{j} \\
&+ \left\{\left(A_zB_zC_z + A_xB_zC_x + A_yB_zC_y\right) - \left(A_zB_zC_z + A_xB_xC_z + A_yB_yC_z\right)\right\}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\right)B_x\boldsymbol{i} - \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)C_x\boldsymbol{i} + \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\right)B_y\boldsymbol{j} - \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)C_y\boldsymbol{j} + \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}\right)B_z\boldsymbol{k} - \left(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}\right)C_z\boldsymbol{k} \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\left(B_x\boldsymbol{i} + B_y\boldsymbol{j} + B_z\boldsymbol{k}\right) - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\left(C_x\boldsymbol{i} + C_y\boldsymbol{j} + C_z\boldsymbol{k}\right) \\
&= (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C})\boldsymbol{B} - (\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}
\end{aligned}$$

$\boxed{\textbf{問 1.27}}$

$$\left(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}\times\boldsymbol{B}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}+\left(\boldsymbol{v}\times\boldsymbol{B}\right)\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}+\left(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{B}-\left(\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{B}\right)\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}=B^2\boldsymbol{v}$$

$$\therefore \boldsymbol{v}=\frac{\boldsymbol{E}\times\boldsymbol{B}}{B^2}$$

第２章．ベクトルの微分

２．１

問 2.1

（１）$\dfrac{f(2)-f(1)}{4-1}=\dfrac{8-2}{2}=3$

（２）

$$\begin{aligned}\Delta s &= s(t+\Delta t)-s(t)\\ &=\frac{1}{2}(t+\Delta t)^2-\frac{1}{2}t^2\\ &=t\Delta t+\frac{1}{2}\left(\Delta t\right)^2\end{aligned}$$

（３）$\dfrac{ds}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{t\Delta t+\frac{1}{2}\left(\Delta t\right)^2}{\Delta t}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\left\{t+\dfrac{1}{2}\Delta t\right\}=t$

（４）$\dfrac{ds}{dt}=\dfrac{d\left(\frac{1}{2}t^2\right)}{dt}=t$

（５）（瞬間の速さ）$=t$ よりそれぞれ、2、4。これらの平均は $\dfrac{2+4}{2}=3$ となる。

問 2.2

（１）$\left(t,\, f\left(t\right)\right)$ における微分係数 $\dfrac{df\left(t\right)}{dt}$ は、$\left(t,\, f\left(t\right)\right)$ における接線の傾きを表す。

Δt が十分に小さいとき $\left(t,\, f\left(t\right)\right)$ および $\left(t+\Delta t,\, f\left(t+\Delta t\right)\right)$ を通る直線の傾き

$\dfrac{f\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)}{\Delta t}$ は、$\dfrac{df\left(t\right)}{dt}$ とほぼ等しいと見ることができる。したがって、

$$\frac{df\left(t\right)}{dt}\approx\frac{f\left(t+\Delta t\right)-f\left(t\right)}{\Delta t}\quad\Rightarrow\quad f(t+\Delta t)\approx f(t)+\frac{df(t)}{dt}\Delta t$$

（２）(2.6)式を用いる。$f\left(\theta\right)$ の微分係数を求め、$t=0$，$\Delta t=\theta$ を代入する。

$$\frac{df\left(\theta\right)}{d\theta}=\frac{d\sin\theta}{d\theta}=\cos\theta,\quad \sin\theta=f(0+\theta)\approx\sin 0+\cos 0\cdot\theta=0+1\cdot\theta=\theta$$

真値との比較は三角比の表を参照のこと。

2．2

$\boxed{\text{問 2.3}}$

（1）

$$\frac{dA_x}{dt}=2t,\ \frac{dA_y}{dt}=a\omega\cos\omega t$$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=2t\boldsymbol{i}+a\omega\cos\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\frac{dB_x}{dt}=1,\ \frac{dB_y}{dt}=-b\exp(-t),\ \frac{dB_z}{dt}=-\omega\sin\omega t$$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\boldsymbol{i}-b\exp(-t)\,\boldsymbol{j}-\omega\sin\omega t\boldsymbol{k}$$

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=(2t+1)\boldsymbol{i}+\left\{a\omega\cos\omega t-b\exp(-t)\right\}\boldsymbol{j}-\omega\sin\omega t\boldsymbol{k}$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\right|=\sqrt{4t^2+a^2\omega^2\cos^2\omega t}\ ,$$

$$\left|\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\right|=\sqrt{1+b^2\exp(-2t)+\omega^2\cos^2\omega t}$$

（2）$\boldsymbol{C}=(t^2+t)\boldsymbol{i}+\left\{a\sin\omega t+b\exp(-t)\right\}\boldsymbol{j}+\cos\omega t\boldsymbol{k}$

$$\frac{d\boldsymbol{C}}{dt}=(2t+1)\boldsymbol{i}+\left\{a\omega\cos\omega t-b\exp(-t)\right\}\boldsymbol{j}-\omega\sin\omega t\boldsymbol{k}\qquad\therefore \frac{d\boldsymbol{C}}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}+\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

（3）

$$\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=2\boldsymbol{i}+2\pi\cos\pi\cdot1\cdot\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-2\pi\boldsymbol{j}\qquad,\qquad\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\boldsymbol{i}-\pi\sin\pi\cdot1\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{i}$$

$$\therefore \frac{d\boldsymbol{A}}{dt}=2\boldsymbol{i}-2\pi\boldsymbol{j}\qquad\qquad\therefore \frac{d\boldsymbol{B}}{dt}=\boldsymbol{i}$$

問 2.4

（1）

$$\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}=r\frac{d\left(\cos\theta\right)}{dr}\boldsymbol{i}+r\frac{d\left(\sin\theta\right)}{dr}\boldsymbol{j}$$

$$=r\frac{d\theta}{dr}\left(-\sin\theta\right)\boldsymbol{i}+r\frac{d\theta}{dr}\cos\theta\boldsymbol{j}$$ を計算する。

$$=r\omega\left(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}\right)$$

（2） $\boldsymbol{r}\left(t\right)\cdot\boldsymbol{u}\left(t\right)=r^2\omega\left(-\cos\theta\sin\theta+\sin\theta\cos\theta\right)=0 \quad \therefore \boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{u}$

（3）

$$\boldsymbol{\alpha}\left(t\right)=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=r\omega\frac{d}{dt}\left\{-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}\right\}=r\omega\frac{d\theta}{dt}\frac{d\left\{-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}\right\}}{d\theta}$$

$$=-r\omega^2\left(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}\right)=-\omega^2\left(r\cos\theta\boldsymbol{i}+r\sin\theta\boldsymbol{j}\right)=-\omega^2\boldsymbol{r}\left(t\right)$$

問 2.5

（1）

$$\boldsymbol{u}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt},\quad \frac{dx}{dt}=v,\ \frac{dy}{dt}=gt$$ より

$$\boldsymbol{u}=v\boldsymbol{i}+gt\boldsymbol{j}$$

（2） $\boldsymbol{a}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=g\boldsymbol{j} \quad \therefore \boldsymbol{a}=g\boldsymbol{j}$

（3） $\boldsymbol{u}=\boldsymbol{i}+\left(9.8\times1\right)\boldsymbol{j} \quad \therefore u=\sqrt{1^2+\left(9.8\right)^2}\approx9.9$、$\alpha=g=9.8$

（4）

$$t=\frac{x}{v}\rightarrow y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 \quad \therefore y=\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2=\left(\frac{1}{2v^2}\right)gx^2$$

2．3

2．3．1

$\boxed{\text{問 2.6}}$

$$\frac{df}{dt} = -ae^{-at}$$

$$\frac{dA}{dt} = \omega\cos\omega t\boldsymbol{i} - \omega\sin\omega t\boldsymbol{j}$$

$$\begin{aligned}
\frac{d(f\boldsymbol{A})}{dt} &= \frac{df}{dt}\boldsymbol{A} + f\frac{d\boldsymbol{A}}{dt} \\
&= -ae^{-at}\left(\sin\omega t\boldsymbol{i} + \cos\omega t\boldsymbol{j}\right) + e^{-at}\omega\left(\cos\omega t\boldsymbol{i} - \sin\omega t\boldsymbol{j}\right) \\
&= e^{-at}\left\{-a\left(\sin\omega t\boldsymbol{i} + \cos\omega t\boldsymbol{j}\right) + \omega\left(\cos\omega t\boldsymbol{i} - \sin\omega t\boldsymbol{j}\right)\right\}
\end{aligned}$$

$\boxed{\text{問 2.7}}$

（1） $\boldsymbol{r}(t) = r(t)\boldsymbol{e}_r$

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$$

（2）極座標系では　$\boldsymbol{r} = r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}$

よって　$\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}}{r} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$

（3）

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} &= \frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_r}{d\theta} = \frac{d\theta}{dt}\frac{d\left(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}\right)}{d\theta} \\
&= \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\right) = -\sin\theta\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \cos\theta\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{j}
\end{aligned}$$

（4）

$$\begin{aligned}
\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} &= -\sin\theta\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \cos\theta\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{j} = \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\right) \\
&= \left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{e}_\theta
\end{aligned}$$

$\boldsymbol{e}_\theta = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$

$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$　より

$$\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_r = \left(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}\right)$$
$$= -\sin\theta\cos\theta + \cos\theta\sin\theta = 0$$

（5）（1）より $\boldsymbol{u} = \dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \dfrac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}$

（3）より $\dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt} = -\sin\theta\cdot\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \cos\theta\cdot\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{j}$　よって

$$\boldsymbol{u} = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\left(-\sin\theta\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{i} + \cos\theta\cdot\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{j}\right)$$
$$= \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\left(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\right) = \frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r + r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{e}_\theta$$

（6）一定半径であるから $\dfrac{dr}{dt} = 0$　さらに　$\omega = \dfrac{d\theta}{dt}$　なので　$\boldsymbol{u} = r\omega\boldsymbol{e}_\theta$

問 2.8

（1）

$$\alpha=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dr}{dt}\boldsymbol{e}_r+r\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}\right)=\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt}$$

（2）(2.42)式より　$\dfrac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta$　これを（1）の右辺に代入して

$$\begin{aligned}\alpha&=\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{e}_r+\frac{dr}{dt}\boxed{\frac{d\boldsymbol{e}_r}{dt}}+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt}\\&=\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{e}_r+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta+\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt}\\&=\frac{d^2r}{dt^2}\boldsymbol{e}_r+2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d^2\theta}{dt^2}\boldsymbol{e}_\theta+r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt}\end{aligned}$$

（3）$\dfrac{d\boldsymbol{e}_\theta}{dt}=\dfrac{d\theta}{dt}\dfrac{d}{d\theta}\left(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}\right)=\dfrac{d\theta}{dt}\left(-\cos\theta\boldsymbol{i}-\sin\theta\boldsymbol{j}\right)=-\dfrac{d\theta}{dt}\boldsymbol{e}_r$

（4）$\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=2r\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r^2\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$　より　$\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=2\dfrac{dr}{dt}\dfrac{d\theta}{dt}+r\dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

（5）$m\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=F_\theta$　において　$F_\theta=0$　のとき、$\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=0$

よって　$r^2\dfrac{d\theta}{dt}=const$

$$\frac{dS}{dt}=\frac{1}{2}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)=const$$

（6）（5）より$\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=const.$、一定半径を考慮し、(2.47)式に適用する。

$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\left[\dfrac{d^2r}{dt^2}-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r+\dfrac{1}{r}\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)\boldsymbol{e}_\theta$　において

$\dfrac{d}{dt}\left(r^2\dfrac{d\theta}{dt}\right)=0$、$\dfrac{d^2r}{dt^2}=0$　なので　$\boldsymbol{a}=\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\left[-r\left(\dfrac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\boldsymbol{e}_r=-r\omega^2\boldsymbol{e}_r=-\omega^2\boldsymbol{r}$

２．３．２

問 2.9

（１） $\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)=\left(\exp(-t)\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(t\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}t^3\boldsymbol{j}\right)=t\exp\left(-t\right)+\frac{1}{3}t^5$，

$$\frac{d\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right)}{dt}=\frac{d}{dt}\left\{t\exp\left(-t\right)+\frac{1}{3}t^5\right\}=\left(1-t\right)\exp\left(-t\right)+\frac{5}{3}t^4$$

（２） $\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}=-\exp\left(-t\right)\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}$， $\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}=\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}$，

$$\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}$$

$$=\left(-\exp\left(-t\right)\boldsymbol{i}+2t\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(t\boldsymbol{i}+\frac{1}{3}t^3\boldsymbol{j}\right)+\left(\exp(-t)\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(\boldsymbol{i}+t^2\boldsymbol{j}\right)$$

$$=\left\{-t\exp\left(-t\right)+\frac{2}{3}t^4\right\}+\left\{\exp\left(-t\right)+t^4\right\}$$

$$=\left(1-t\right)\exp\left(-t\right)+\frac{5}{3}t^4$$

（３） $\frac{d(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$

（１）より $\frac{d\left(\boldsymbol{A}(t)\cdot\boldsymbol{B}(t)\right)}{dt}=\left(1-t\right)\exp\left(-t\right)+\frac{5}{3}t^4$

（２）より $\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\cdot\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\cdot\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}=\left(1-t\right)\exp\left(-t\right)+\frac{5}{3}t^4$

$$\therefore\frac{d(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

問 2.10

(2.51)式において、$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{u}$， $\boldsymbol{B}=\boldsymbol{u}$， $u^2=const$ とする。

$$\frac{d(\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{u})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\Rightarrow\frac{du^2}{dt}=\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\Rightarrow 0=2\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}$$

$$\therefore\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=0$$

$\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}=0$ の両辺に質量 m をかけて　$\boldsymbol{u}\cdot\left(m\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=0\Rightarrow\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{F}=0$

よって　$\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{F}$

問 2.11

運動方程式より $\boldsymbol{F}=m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}$ **両辺に$\boldsymbol{u}$を内積して、**$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}$

$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}=\dfrac{1}{2}m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}+\dfrac{1}{2}m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}$ **とし、**

(2.51)**式** $\dfrac{d(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{A}}{dt}\cdot\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\cdot\dfrac{d\boldsymbol{B}}{dt}$ **を適用すると、**

$$\boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{u}=\frac{1}{2}m\left(\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\cdot\boldsymbol{u}+\boldsymbol{u}\cdot\frac{d\boldsymbol{u}}{dt}\right)=\frac{1}{2}m\frac{du^2}{dt}=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}mu^2\right)$$

２．３．３

問 2.12

（１） $\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)=\left(-\frac{1}{2}t^2\cos t\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{1}{2}t^2\sin t-t\exp(t)\right)\boldsymbol{j}+t\cos t\boldsymbol{k}$,

$$\frac{d\boldsymbol{C}(t)}{dt}=\left(-t\cos t+\frac{1}{2}t^2\sin t\right)\boldsymbol{i}+\left(t\sin t+\frac{1}{2}t^2\cos t-\exp(t)-t\exp(t)\right)\boldsymbol{j}+(\cos t-t\sin t)\boldsymbol{k}$$

（２） $\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}=\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{k}$,　 $\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}=\cos t\boldsymbol{i}-\sin t\boldsymbol{j}+\exp(t)\boldsymbol{k}$,

$$\begin{aligned}\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\times\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\times\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}&=(-t\cos t)\boldsymbol{i}+\{t\sin t-\exp(t)\}\boldsymbol{j}+(\cos t)\boldsymbol{k}\\&\quad+\left(\frac{1}{2}t^2\sin t\right)\boldsymbol{i}+\left\{\frac{1}{2}t^2\cos t-t\exp(t)\right\}\boldsymbol{j}+(-t\sin t)\boldsymbol{k}\\&=\left(-t\cos t+\frac{1}{2}t^2\sin t\right)\boldsymbol{i}+\left\{t\sin t+\frac{1}{2}t^2\cos t-\exp(t)-t\exp(t)\right\}\boldsymbol{j}+(\cos t-t\sin t)\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

（３）（１）（２）より右辺共通なので

$$\frac{d\boldsymbol{C}(t)}{dt}=\frac{d\left(\boldsymbol{A}(t)\times\boldsymbol{B}(t)\right)}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}(t)}{dt}\times\boldsymbol{B}(t)+\boldsymbol{A}(t)\times\frac{d\boldsymbol{B}(t)}{dt}$$

$$\therefore\frac{d(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}\times\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}$$

問 2.13

$$\frac{d}{dt}\left[\boldsymbol{A}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})\right]=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{A}\times\frac{d(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})}{dt}=\frac{d\boldsymbol{A}}{dt}\times(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})+\boldsymbol{A}\times\left\{\frac{d\boldsymbol{B}}{dt}\times\boldsymbol{C}+\boldsymbol{B}\times\frac{d\boldsymbol{C}}{dt}\right\}$$

問 2.14

（1） $\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}=\dfrac{d\left(\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\right)}{dt}=\dfrac{d\boldsymbol{r}}{dt}\times m\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}\times m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}=\boldsymbol{u}\times m\boldsymbol{u}+\boldsymbol{r}\times m\dfrac{d\boldsymbol{u}}{dt}$

（2） $\boldsymbol{F}=s\boldsymbol{r}$ （s は定数）とおき、$\dfrac{d\boldsymbol{L}}{dt}$ を考えると、

$$\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}=\boldsymbol{N}=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{F}=\boldsymbol{r}\times s\boldsymbol{r}=\boldsymbol{0}$$ よって $\boldsymbol{L}=const$

（3）中心力を考えると $\boldsymbol{F}$ の方向は $\boldsymbol{r}$ 方向である。ゆえに（2）と同様に考えることができるので $\boldsymbol{L}=const$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{L}&=\boldsymbol{r}\times\boldsymbol{p}\\&=r\boldsymbol{e}_r\times mr\omega\boldsymbol{e}_u\\&=mr^2\omega\left(\boldsymbol{e}_r\times\boldsymbol{e}_u\right)=mr^2\omega\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

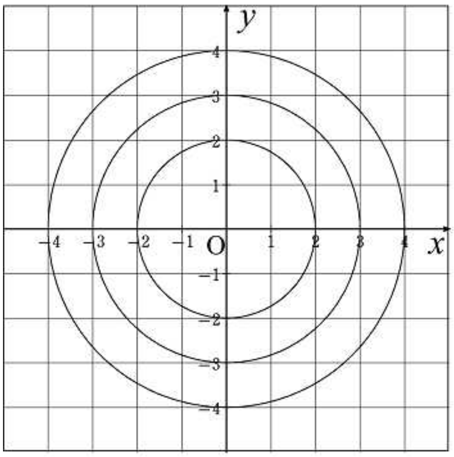
第３章．場の考え方と流束の概念

３．１

問 3.1　スカラー場の１つとして、温度分布がある。温度は場所によって変化し、空間分布をもつので「場」を形成している。他にも、圧力、密度なども空間に遍在しているのでスカラー場を形成する。

問 3.2　ベクトル場の１つとして、風などの速度分布がある。風は、場所によって大きさだけでなく、全ての場所で向きも変化する。大きさと向きの空間分布をもつので「場」を形成している。ベクトル場の例は、他に電場、磁場などが挙げられる。

問 3.3



$\varphi = 0$ ： $x^2 + y^2 = 16$　　$\varphi = 7$ ： $x^2 + y^2 = 9$　　$\varphi = 12$ ： $x^2 + y^2 = 4$

３．２

３．２．１

問 3.6

（１）$W_f = hS = 5\times 10 = 50$　　（２）$h = \dfrac{W_f}{S} = \dfrac{100}{5} = 20$

問 3.7

（１）半径 a の円だから、$\Delta S = \pi a^2$,

図より、その円の法線ベクトルは x 軸の正方向であるから、

$$\boldsymbol{n} = (1)\boldsymbol{i} + (0)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k}$$

（２）$\mathrm{P}(1,0,0)$、$\mathrm{Q}(0,2,0)$、$\mathrm{R}(0,0,1)$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \boldsymbol{A} = (0,2,0) - (1,0,0) = (-1,2,0)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{QR}} = \boldsymbol{B} = (0,0,1) - (0,2,0) = (0,-2,1)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{PR}} = \boldsymbol{C} = (0,0,1) - (1,0,0) = (-1,0,1)$$

二つのベクトルについて

$$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (2,1,2)$$

$$|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}| = 3$$

外積の計算によって三角形の面積を求めると　$\Delta S = \dfrac{1}{2}|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}| = \dfrac{3}{2}$

法線ベクトルは、$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}$ 方向の単位ベクトルであるから

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}|} = \frac{(2,1,2)}{3} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right)$$

$$\boldsymbol{n} = \left(\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{1}{3}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{2}{3}\right)\boldsymbol{k}$$

問 3.8

（1） $\Delta \boldsymbol{S}_1 = +\Delta x \Delta y \boldsymbol{k}, \quad \Delta \boldsymbol{S}_2 = -\Delta x \Delta y \boldsymbol{k}, \quad \Delta \boldsymbol{S}_3 = +\Delta z \Delta x \boldsymbol{j}, \quad \Delta \boldsymbol{S}_4 = -\Delta z \Delta x \boldsymbol{j}$

$\Delta \boldsymbol{S}_5 = +\Delta y \Delta z \boldsymbol{i}, \quad \Delta \boldsymbol{S}_6 = -\Delta y \Delta z \boldsymbol{i}$

（2）

$$\Delta W_f^1 = \boldsymbol{h}_1 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_1 = (0, 0, 2)\cdot(0, 0, 1) = 2,$$

$$\Delta W_f^2 = \boldsymbol{h}_2 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_2 = (0, 0, 5)\cdot(0, 0, -1) = -5,$$

$$\Delta W_f^3 = \boldsymbol{h}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_3 = (0, -10, 0)\cdot(0, 1, 0) = -10,$$

$$\Delta W_f^4 = \boldsymbol{h}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_4 = (0, -10, 0)\cdot(0, -1, 0) = 10,$$

$$\Delta W_f^5 = \boldsymbol{h}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_5 = (10, 0, 0)\cdot(1, 0, 0) = 10,$$

$$\Delta W_f^6 = \boldsymbol{h}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_6 = (20, 0, 0)\cdot(-1, 0, 0) = -20$$

（3） $\Delta W_f = \Delta W_f^1 + \Delta W_f^2 + \Delta W_f^3 + \Delta W_f^4 + \Delta W_f^5 \Delta W_f^6 = -13$

（4）面積ベクトルのとり方を考えると、$\Delta W_f > 0$ は流出、$\Delta W_f < 0$ は流入を表す。

したがって、$\Delta W_f = -13 < 0$ より、エネルギーは流入しているので増える。

問 3.9

（1）

消滅項として、$\left(\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{cell}$ **を** $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = -\Delta W_f$ **の右辺に加えると** $\dfrac{\Delta Q}{\Delta t} = -\Delta W + \left(\dfrac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{cell}$

（2）

上面部への流入は、面積が πa_1^2 **であるので、**

$$\Delta W_f^{TOP} = \boldsymbol{h}_T \cdot \Delta \boldsymbol{S}^{TOP} = -10\pi a_1^2,$$

下面部からの流出は、光吸収セルの面積分を除いた面積を考えて、

$$\Delta W_f^{BOTTOM} = \boldsymbol{h}_T \cdot \Delta \boldsymbol{S}^{BOTTOM} = 10\pi\left(a_1^2 - a_2^2\right)$$

（3）

$$\Delta W_f = \Delta W_f^{TOP} + \Delta W_f^{BOTTOM} = -10\pi a_1^2 + 10\pi\left(a_1^2 - a_2^2\right) = -10\pi a_2^2$$

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = -\Delta W + \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{cell} \Rightarrow 0 = -\left(-10\pi a_2^2\right) + \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{cell}$$

$$\therefore \left(\frac{\Delta Q}{\Delta t}\right)_{cell} = -10\pi a_2^2$$

問 3.10

（1）外積を用いて法線ベクトルを表現できるように、ベクトル $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{B}$ を定める。$\boldsymbol{A}$ を屋根沿い登りのベクトル、$\boldsymbol{B}$ を屋根の下端沿い左方向へとる。

$$\boldsymbol{A} = \left(-\cos\alpha, 0, \sin\alpha\right), \quad \boldsymbol{B} = \left(0, -1, 0\right)$$

$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B} = \left(\sin\alpha, 0, \cos\alpha\right)$　これは屋根表面に垂直なベクトルであるので、その法線ベクトルは

$$\boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}}{\left|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\right|} = \frac{\left(\sin\alpha, 0, \cos\alpha\right)}{\sqrt{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha}} = \sin\alpha\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + \cos\alpha\boldsymbol{k} = \sin\alpha\boldsymbol{i} + \cos\alpha\boldsymbol{k}$$

（2）

$$\begin{aligned} W_e &= \eta W_f = \eta\boldsymbol{h}\cdot\left(-\boldsymbol{S}\right) = \eta\boldsymbol{h}\cdot S\left(-\boldsymbol{n}\right) \\ &= \eta\left(h_x, 0, -h_z\right)\cdot\left(-\sin\alpha, 0, -\cos\alpha\right)S \\ &= \eta S\left(-h_x\sin\alpha + h_z\cos\alpha\right) \end{aligned}$$

ただし、前問で法線ベクトルをパネルの外側向きに定義したため、$\boldsymbol{n}$ ではなく $-\boldsymbol{n}$ を使う必要が生じる。その理由は太陽光線の向きを考慮したからである。

（3）$W_f = \boldsymbol{h}\cdot\left(-\boldsymbol{S}\right) = -\boldsymbol{h}\cdot\boldsymbol{n}S = -\left(0, 0, -5\right)\cdot\left(\sin 30^\circ, 0, \cos 30^\circ\right) = 25\sqrt{3}$

電気への変換効率 $\eta = 0.2$ を考慮すると

$$W_e = \eta W_f = 0.2\times\left(25\sqrt{3}\right) = 5\sqrt{3}$$

問 3.11

（1）点光源から発生するエネルギーは、W_f である。そのエネルギーは球の表面積 $4\pi r^2$ を通過する。したがって、球面上でのエネルギー流速密度は、$h = \dfrac{W_f}{4\pi r^2}$

（2）球面上での単位面積ベクトルは球面に垂直なので、$\boldsymbol{n} = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ とおける。エネルギー流速密度の大きさは（1）で求めてあるので、エネルギー流速密度ベクトルは、

$$\boldsymbol{h} = h\boldsymbol{n} = \frac{W_f}{4\pi r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

３．２．２

問 3.12

x 軸に垂直な面を横切るということは、x 軸方向のみを考えればよい。その流束は、

$$\boldsymbol{f}\cdot\boldsymbol{i}=\left(f_x, f_y, f_z\right)\cdot(1,0,0)=f_x$$

$$\therefore\ f_x=\frac{\Delta M_x}{\Delta t}=\frac{\rho\left\{\left(v_x\Delta t\right)\left(\Delta y\Delta z\right)\right\}}{\Delta t}=\rho v_x\Delta y\Delta z$$

問 3.13

領域中で湧き出し、吸い込みはないとしているから、その領域に対する流出入について考えればよい。次の図１．１から１．３はその様子を表す。

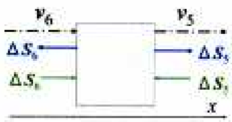


図 1.1: x 方向における箱への流入

面積ベクトル外向き	
流入	$\boldsymbol{v}_6\cdot\Delta\boldsymbol{S}_6=(+v_6)(-\Delta S_6)<0$
流出	$\boldsymbol{v}_5\cdot\Delta\boldsymbol{S}_5=(+v_5)(+\Delta S_5)>0$
⇒	$\frac{\Delta M}{\Delta t}=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

面積ベクトル内向き	
流入	$\boldsymbol{v}_6\cdot\Delta\boldsymbol{S}_6=(+v_6)(+\Delta S_6)>0$
流出	$\boldsymbol{v}_5\cdot\Delta\boldsymbol{S}_5=(+v_5)(-\Delta S_5)<0$
⇒	$\frac{\Delta M}{\Delta t}=+\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

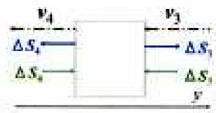


図 1.2: y 方向における箱への流入

面積ベクトル外向き	
流入	$\boldsymbol{v}_3\cdot\Delta\boldsymbol{S}_3=(-v_3)(+\Delta S_3)<0$
流出	$\boldsymbol{v}_4\cdot\Delta\boldsymbol{S}_4=(-v_4)(-\Delta S_4)>0$
⇒	$\frac{\Delta M}{\Delta t}=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

面積ベクトル内向き	
流入	$\boldsymbol{v}_3\cdot\Delta\boldsymbol{S}_3=(-v_3)(-\Delta S_3)>0$
流出	$\boldsymbol{v}_4\cdot\Delta\boldsymbol{S}_4=(-v_4)(+\Delta S_4)<0$
⇒	$\frac{\Delta M}{\Delta t}=+\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

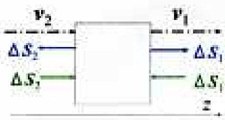


図 1.3: z 方向における箱への流入

面積ベクトル内向き	
流入	$\boldsymbol{v}_2\cdot\Delta\boldsymbol{S}_2=(+v_2)(-\Delta S_2)<0$
流出	$\boldsymbol{v}_1\cdot\Delta\boldsymbol{S}_1=(+v_1)(+\Delta S_1)>0$
⇒	$\frac{\Delta M}{\Delta t}=-\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

面積ベクトル内向き	
流入	$\boldsymbol{v}_2\cdot\Delta\boldsymbol{S}_2=(+v_2)(+\Delta S_2)>0$
流出	$\boldsymbol{v}_1\cdot\Delta\boldsymbol{S}_1=(+v_1)(-\Delta S_1)<0$
⇒	$\frac{\Delta M}{\Delta t}=+\rho\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

問 3.12 からわかるように i 番目の壁における時間当たりの質量変化は、

$$\frac{\Delta M}{\Delta t}=\rho\boldsymbol{v}_i\cdot\Delta\boldsymbol{S}_i$$

で表される。しかし、この式は面積ベクトルのとり方によって右辺に正負の符号をつかる必要がある。図１．１から１．３を参考にすれば、

面積ベクトルが外向きの場合：$\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{6}\left(-\rho \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i\right)$

面積ベクトルが内向きの場合：$\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = \sum_{i=1}^{6}\left(+\rho \boldsymbol{v}_i \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i\right)$

問 3.14

水の外部からの流入と、内部の湧き出し、吸い込みは独立におきると考える。したがって、各々の効果を重ね合わせればよい。

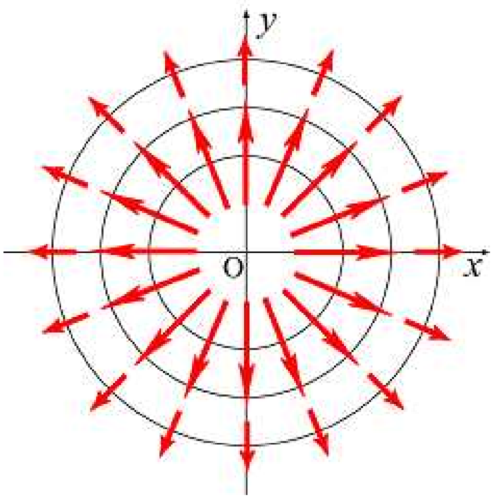
$$\frac{\Delta M}{\Delta t} = \sum_i \boldsymbol{f}_i \cdot \Delta \boldsymbol{S}_i + \left(\frac{\Delta M}{\Delta t}\right)_{source}$$

第２項（湧き出し・吸い込み）の符号については、第１項（流れの項）を 0 として考えればよい。例えば、水の流れがない場合には、内部から湧き出しがあれば質量は増える。したがって、第２項の符号は正とすればよいことがわかる。

問 3.15

（1）速度場は、z 軸上に一様に分布する湧き出し（線源）から、(x, y) 平面上で放射状に流れ出る速度場であり、原点から離れるほどベクトルの大きさは小さくなる。

$$\boldsymbol{v}(x,y,z) = v_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + v_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + v_z(x,y,z)\boldsymbol{k} = \left(K\frac{x}{r^2}, K\frac{y}{r^2}, 0\right)$$



（2）

（解1）速度ベクトルを円柱座標で表すと

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k} \\
&= \frac{K}{r}x\boldsymbol{i} + \frac{K}{r}y\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} \\
&= \frac{K}{r^2}\left\{r\cos\theta\left(\cos\theta\boldsymbol{e}_r - \sin\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) + r\sin\theta\left(\sin\theta\boldsymbol{e}_r + \cos\theta\boldsymbol{e}_\theta\right)\right\} \\
&= \frac{K}{r^2}\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\boldsymbol{e}_r = \frac{K}{r}\boldsymbol{e}_r \\
&\therefore v = \frac{K}{r}
\end{aligned}$$

（解2）速度ベクトル自身の内積を取ると

$$\begin{aligned}
v^2 &= \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v} \\
&= \frac{K^2}{r^4}(x,y,0)\cdot(x,y,0) = \frac{K^2}{r^4}r^2 = \frac{K^2}{r^2} \\
&\therefore v = \frac{K}{r}
\end{aligned}$$

（3）（2）より、 $\boldsymbol{v} = \dfrac{K}{r}\boldsymbol{e}_r$ 　また　$\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ 　なので　$\boldsymbol{v}(x,y,z) = \dfrac{K}{r}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$

（4）

$$\rho\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{S} = \rho\frac{K}{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\boldsymbol{S} = \rho\frac{K}{r}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot 2\pi rL\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$= 2\pi\rho KL\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right) = 2\pi\rho KL$$

したがって流束は、半径 r に依存しないことが示せた。

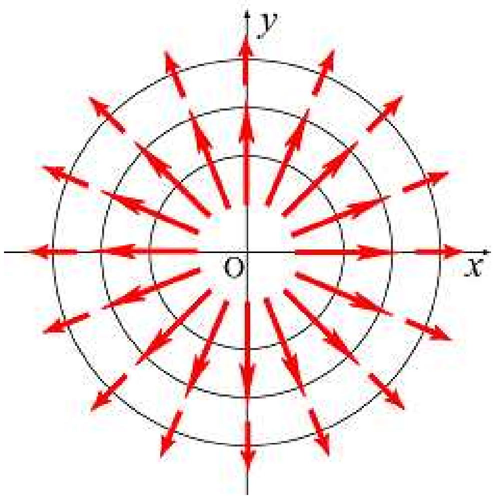
（5） z 軸上の長さ L の範囲から湧き出した水 M_f が前問で求めた高さ L の円筒形の側面を通過するので、

$$M_f = \frac{2\pi\rho KL}{L} = 2\pi\rho K$$

問 3.16

（1）速度場は、原点にある湧き出し（点源）から、空間に等方的に流れ出る速度場であり、原点から離れるほどベクトルの大きさは小さくなる。

$$\boldsymbol{v}(x,y,z)=v_x(x,y,z)\boldsymbol{i}+v_y(x,y,z)\boldsymbol{j}+v_z(x,y,z)\boldsymbol{k}=\left(K\frac{x}{r^3},K\frac{y}{r^3},K\frac{z}{r^3}\right)$$



（2）速度ベクトル自身の内積を取ると

$$v^2=\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{v}=\frac{K^2}{r^4}\frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{r}}{r^2}=\frac{K^2}{r^4}$$

$$\therefore v=\frac{K}{r^2}$$

（3）

$$\int_A \boldsymbol{f}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_A \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_A \rho\left(\frac{K}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(dS\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$$=\rho\frac{K}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\int_A dS=\rho\frac{K}{r^2}4\pi r^2=4\pi\rho K$$

（4）原点から湧き出した水は等方的に流れ出る。更に湧き出し・吸い込みがないことを考慮すると、（3）で求めたある任意の面を通る流束と同じであるといえる。

$$\therefore M_f=4\pi\rho K$$

第４章．場の微分

４．１

問 4.1

（１）$\dfrac{\partial f}{\partial x}=10xy^3+10y,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=15x^2y^2+10x+8y^3$

（２）$r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおく

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2x=6x\left(x^2+y^2\right)^2,\quad \frac{\partial f}{\partial y}=\frac{\partial f}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial y}=3\left(x^2+y^2\right)^2\cdot 2y$$

（３）$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\log y\left\{-\dfrac{\frac{1}{x}}{\left(\log x\right)^2}\right\}=-\dfrac{\log y}{x\left(\log x\right)^2},\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{1}{y\log x}$

（４）$\dfrac{\partial f}{\partial x}=2\sin x\cos x\cos 2y=\sin 2x\cos 2y,$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\sin^2 x\left(-2\sin 2y\right)=-2\sin^2 x\sin 2y$$

（５）$\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{y\left(x^2+y^2\right)-xy\cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\dfrac{y^3-x^2y}{\left(x^2+y^2\right)^2},$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x\left(x^2+y^2\right)-xy\cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^3-xy^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

問 4.2

（1） $\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{1}{2}\left(x^2+y^2\right)^{-\frac{1}{2}}2x=\dfrac{x}{r},\qquad \dfrac{\partial r}{\partial y}=\dfrac{y}{r}$

（2） $\dfrac{\partial f}{\partial x}=\dfrac{\partial r}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial r}=\dfrac{x}{r}\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{r^2}=\dfrac{x}{x^2+y^2},\qquad \dfrac{\partial f}{\partial y}=\dfrac{y}{x^2+y^2}$

（3）

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\left(x^2+y^2\right)^{-1}+x\left\{-\frac{1}{\left(x^2+y^2\right)^2}2x\right\}$$

$$=\frac{1}{x^2+y^2}-\frac{2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{x^2+y^2-2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=\frac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2},$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\frac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

（4） $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=\dfrac{y^2-x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{x^2-y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=0$

問 4.3

（1） $\dfrac{\partial X}{\partial x}=k,\qquad \dfrac{\partial X}{\partial t}=-\omega$

（2） $\dfrac{\partial u}{\partial x}=\dfrac{\partial X}{\partial x}\dfrac{\partial u}{\partial X}=kA\sin\left(kx-\omega t\right)=ku,$

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial X}{\partial t}\frac{\partial u}{\partial X}=-\omega A\sin\left(kx-\omega t\right)=-\omega u$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k\frac{\partial u}{\partial x}=k^2u,\qquad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=-\omega\frac{\partial u}{\partial x}=\omega^2 u$$

（3） （2）より $V=\dfrac{\omega}{k},\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=k^2u$、$V^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left(\dfrac{\omega}{k}\right)^2k^2u=\omega^2u\qquad \therefore V^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}$

したがって u は、$\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=V^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ を満たす。

問 4.4

$$\Delta V = \frac{\partial V}{\partial r}\Delta r + \frac{\partial V}{\partial h}\Delta h, \quad \frac{\partial V}{\partial r} = 2\pi rh, \quad \frac{\partial V}{\partial h} = \pi r^2$$

$$\therefore \Delta V = 2\pi rh\Delta r + \pi r^2 \Delta h$$

問 4.5

$$V\left(a,b,c\right) = abc$$

（1）

$$\begin{aligned}
\Delta V &= V\left(a+\Delta a, b+\Delta b, c+\Delta c\right) - V\left(a,b,c\right) \\
&= \left(a+\Delta a\right)\left(b+\Delta b\right)\left(c+\Delta c\right) - abc \\
&= abc + bc\Delta a + ca\Delta b + ab\Delta c + c\Delta a\Delta b + b\Delta a\Delta c + a\Delta b\Delta c + \Delta a\Delta b\Delta c - abc \\
&\approx bc\Delta a + ca\Delta b + ab\Delta c
\end{aligned}$$

（2）$\dfrac{\partial V}{\partial a} = bc, \quad \dfrac{\partial V}{\partial b} = ca, \quad \dfrac{\partial V}{\partial c} = ab$　を（1）に適用する。

$$\begin{aligned}
\Delta V &= bc\Delta a + ca\Delta b + ab\Delta c \\
&= \frac{\partial V}{\partial a}\Delta a + \frac{\partial V}{\partial b}\Delta b + \frac{\partial V}{\partial c}\Delta c
\end{aligned}$$

4．2

$\boxed{\textbf{問 4.6}}$

（1）$\nabla\varphi(x,y)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}=2x\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j},\quad |\nabla\varphi|=\sqrt{4x^2+1},\quad \boldsymbol{e}_\varphi=\dfrac{2x\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}}{\sqrt{4x^2+1}}$

$(x,y)=(0,0)$　において　$\boldsymbol{e}_\varphi=-\boldsymbol{j}$

（2）$\nabla\varphi(x,y)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}=\dfrac{2x}{a^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{2y}{b^2}\boldsymbol{j},\quad |\nabla\varphi|=2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}},\quad \boldsymbol{e}_\varphi=\dfrac{\dfrac{2x}{a^2}\boldsymbol{i}+\dfrac{2y}{b^2}\boldsymbol{j}}{2\sqrt{\dfrac{x^2}{a^4}+\dfrac{y^2}{b^4}}}$

$(x,y)=(a,0)$　において　$\boldsymbol{e}_\varphi=\dfrac{\dfrac{2a}{a^2}\boldsymbol{i}}{2\sqrt{\dfrac{a^2}{a^4}+0}}=\dfrac{\left(\dfrac{2}{a}\right)\boldsymbol{i}}{\left(\dfrac{2}{a}\right)}=\boldsymbol{i}$

（3）$\nabla\varphi(x,y)=\dfrac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\dfrac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}=2x\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j},\quad |\nabla\varphi|=2\sqrt{x^2+y^2},\quad \boldsymbol{e}_\varphi=\dfrac{2x\boldsymbol{i}-2y\boldsymbol{j}}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$(x,y)=(1,0)$　において$\boldsymbol{e}_\varphi=\dfrac{2\boldsymbol{i}}{\sqrt{4}}=\boldsymbol{i}$

問 4.7

$$T(x,y)=4T_0\left(1-\frac{r^2}{a^2}\right)=4T_0\left(1-\frac{x^2+y^2}{a^2}\right)$$ より

$$\frac{\partial T}{\partial x}=4T_0\left(-\frac{2x}{a^2}\right)=-\frac{8T_0}{a^2}x,\quad \frac{\partial T}{\partial y}=4T_0\left(-\frac{2y}{a^2}\right)=-\frac{8T_0}{a^2}y$$

$$\therefore \nabla T=\frac{\partial T}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial T}{\partial y}\boldsymbol{j}=-\frac{8T_0}{a^2}x\boldsymbol{i}-\frac{8T_0}{a^2}y\boldsymbol{j}=-\frac{8T_0}{a^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})$$

（1） $$T\left(\frac{a}{2},0\right)=4T_0\left\{1-\left(\frac{a/2}{a}\right)^2\right\}=4T_0\left(1-\frac{1}{4}\right)=3T_0$$

$$\nabla T=-\frac{8T_0}{a^2}\left(\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+0\right)=-\frac{4T_0}{a}\boldsymbol{i}\qquad \therefore -\boldsymbol{i}\ 方向$$

$$|\nabla T|=\frac{4T_0}{a}$$

（2）点 Q に変位したときの温度差

$$\Delta T_Q=T(a,0)-T\left(\frac{a}{2},0\right)=-3T_0$$

点 R に変位したときの温度差

トル

$$\Delta T_R=T\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)-T\left(\frac{a}{2},0\right)=-\boxed{2}T_0$$

点 Q に変位したときの方が T_0 だけ大きい温度差を感じる。

2

（3） $R\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}\right)$ において

$$\nabla T=-\frac{8T_0}{a^2}\left(\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right)=-\frac{4T_0}{a}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

$$|\nabla T|=\sqrt{\frac{16T_0^2}{a^2}+\frac{16T_0^2}{a^2}}=\frac{4\sqrt{2}T_0}{a}$$

$$\boldsymbol{e}_T = \frac{\nabla T}{|\nabla T|} = \frac{-\dfrac{4T_0}{a}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})}{\left(\dfrac{4\sqrt{2}T_0}{a}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j})$$

問 4.8

$$\nabla T(x,y) = -\frac{8T_0}{a^2}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}),\quad \boldsymbol{h} = -\kappa\nabla T$$

（1）

$$\nabla T\left(\frac{a}{2},0\right) = -\frac{8T_0}{a^2}\left(\frac{a}{2}\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}\right) = -\frac{4T_0}{a}\boldsymbol{i}$$

$$\therefore \boldsymbol{h} = +1.6\times10^{-2}\,\frac{4\times25}{1}\boldsymbol{i} = 1.6\boldsymbol{i}$$

$|\boldsymbol{h}| = 1.6$， $\boldsymbol{i}$ 方向

（2）

$$\nabla T\left(\frac{a}{2},-\frac{a}{2}\right) = -\frac{8T_0}{a^2}\left(\frac{a}{2}\boldsymbol{i}-\frac{a}{2}\boldsymbol{j}\right) = -\frac{4T_0}{a}(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

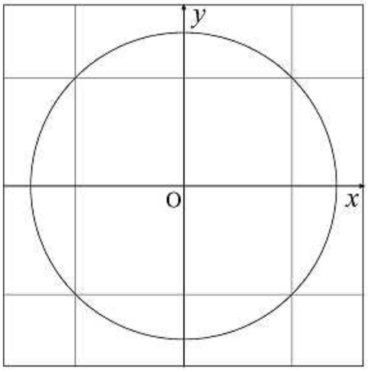
$$\therefore \boldsymbol{h} = +1.6\times10^{-2}\times100 = 1.6(\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j})$$

$|\boldsymbol{h}| = 1.6\sqrt{1^2+(-1)^2} = 1.6\sqrt{2}$， $\boldsymbol{i}-\boldsymbol{j}$ 方向

点光源から離れた点でのエネルギー流束密度は、$\boldsymbol{h} = \dfrac{W_f}{4\pi r^2}\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$ より $|\boldsymbol{h}| = \dfrac{100}{4\pi}$ として計算する。

問 4.9

（1）等高線は $x^2 + y^2 = 2$ の円となる。中心が原点、半径 $\sqrt{2}$ の円。



（2）$\nabla\varphi = -2x\boldsymbol{i} - 2y\boldsymbol{j}$

（3）$(x, y) = (\sqrt{2}, 0)$ では、　$\nabla\varphi = -2\sqrt{2}\boldsymbol{i}$　$\therefore -\boldsymbol{i}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

$(x, y) = (1, 1)$ では、　$\nabla\varphi = -2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$　$\therefore -\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

$(x, y) = (0, \sqrt{2})$ では、　$\nabla\varphi = -2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$　$\therefore -\boldsymbol{j}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

$(x, y) = (-1, 1)$ では、　$\nabla\varphi = 2\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$　$\therefore \boldsymbol{i} - \boldsymbol{j}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

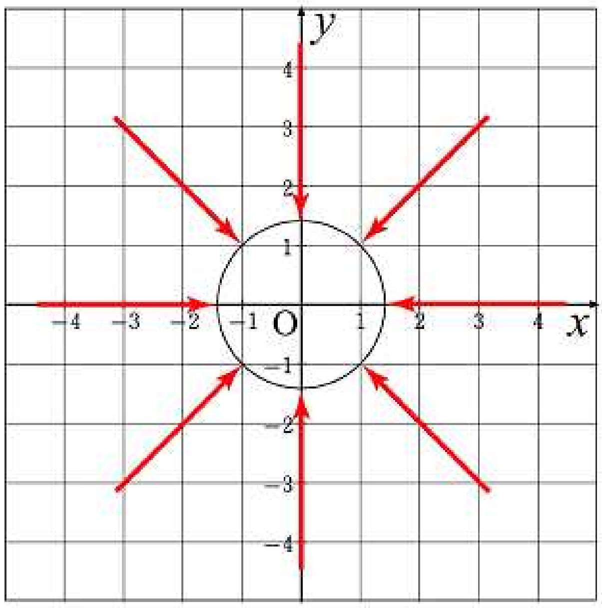
$(x, y) = (-\sqrt{2}, 0)$ では、　$\nabla\varphi = 2\sqrt{2}\boldsymbol{i}$　$\therefore -\boldsymbol{i}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

$(x, y) = (-1, -1)$ では、　$\nabla\varphi = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$　$\therefore \boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

$(x, y) = (0, -\sqrt{2})$ では、　$\nabla\varphi = 2\sqrt{2}\boldsymbol{j}$　$\therefore \boldsymbol{j}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

$(x, y) = (1, -1)$ では、　$\nabla\varphi = -2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j}$　$\therefore -\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$ 方向、$|\nabla\varphi| = 2\sqrt{2}$

（4）各点で勾配ベクトルは原点の方向を向く。



問 4.10

$(\partial T/\partial x)dx$ は、y と z を固定して x を dx だけ変化させたときの T の変化分である。
$(\partial T/\partial y)dy$ は、x と z を固定して y を dy だけ変化させたときの T の変化分である。
$(\partial T/\partial z)dz$ は、x と y を固定して z を dz だけ変化させたときの T の変化分である。
dx, dy, dz が十分小さければ、x, y, z を同時に dx, dy, dz だけ変化させたとき T の全体の変化分は、この３つの項の和で近似できる。

問 4.11

$$\nabla\varphi = (2x+2y)\boldsymbol{i} + (2y+2x)\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} = 2(x+y)\boldsymbol{i} + 2(x+y)\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k},$$

$$\left|\nabla\varphi\right|_{(x,y,z)=(1,1,1)} = \sqrt{4^2+4^2+2^2} = 4$$

問 4.12

$\varphi(x,y,z) = x^2+y^2+z^2-2x$ とおく $\varphi = 1$ は曲面の式を与える。

$$\nabla\varphi = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j} + 2z\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{i}$$

点 $(x,y,z) = (1,1,1)$ において $\nabla\varphi = 2\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k} - 2\boldsymbol{i} = 2\boldsymbol{j} + 2\boldsymbol{k}$

$$\left|\nabla\varphi\right| = \sqrt{2^2+2^2} = 2\sqrt{2}$$

$$\therefore \boldsymbol{e}_\varphi = \frac{\nabla\varphi}{\left|\nabla\varphi\right|} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(2\boldsymbol{j}+2\boldsymbol{k}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{j}+\boldsymbol{k})$$

問 4.13

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2x = \frac{x}{r} \quad \text{同様にして} \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r},\ \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\therefore \nabla r = \frac{x}{r}\boldsymbol{i} + \frac{y}{r}\boldsymbol{j} + \frac{z}{r}\boldsymbol{k} = \frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r} = \frac{\boldsymbol{r}}{r}$$

$\boxed{\textbf{問 4.14}}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{r}\right)=\frac{\partial r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^2}\frac{\partial r}{\partial x}$$

$\dfrac{\partial r}{\partial x}=\dfrac{x}{r}$　 $\therefore \dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{x}{r^3}$　**同様にして**　$\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{y}{r^3}$，$\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{1}{r}\right)=-\dfrac{z}{r^3}$

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{1}{r^3}\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)=-\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

$\boxed{\textbf{問 4.15}}$

$$\boldsymbol{F}=-\nabla U \quad \Rightarrow \quad \boldsymbol{F}=-mg\boldsymbol{k}$$

$\boxed{\textbf{問 4.16}}$

（1）（2） $\boldsymbol{E}=-\nabla\phi=-\nabla\left(\dfrac{K}{r}\right)$　**問** 4.14 **の結果より** $\boldsymbol{E}=-\dfrac{K}{r^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$

よって方向 $\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}$**、大きさ** $E=\dfrac{K}{r^2}$

４．３

$\boxed{\textbf{問 4.17}}$

$$\varphi = a_x x + a_y y + a_z z$$

$$\nabla\varphi = a_x \frac{\partial x}{\partial x}\boldsymbol{i} + a_y \frac{\partial y}{\partial y}\boldsymbol{j} + a_z \frac{\partial z}{\partial z}\boldsymbol{k} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$$ **を得る。**

$\boxed{\textbf{問 4.18}}$

（1）

$$\boldsymbol{a} = \overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}} = \left(0, 0, \frac{d}{2}\right) - \left(0, 0, -\frac{d}{2}\right) = (0, 0, d)$$

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{d^2} = d$$

$|\boldsymbol{a}| = d$**，** $\boldsymbol{k}$ **方向**

（2） $\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r} = (0, 0, d)\cdot(x, y, z) = zd$

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = d\frac{\partial z}{\partial z}\boldsymbol{k} = d\boldsymbol{k}$$

（3） $\varphi = \dfrac{K}{r^3}(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{r}) = \dfrac{K}{r^3}zd = Kd\dfrac{z}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}} = Kd\cdot z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}$

$$\begin{aligned}
\nabla\varphi &= \frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k} \\
&= Kdz\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2x)\boldsymbol{i} + Kdz\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2y)\boldsymbol{j} \\
&\quad + Kd\left\{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} + \left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(2z)\right\}\boldsymbol{k} \\
&= -3Kdz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}) + Kd\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} \\
&= -3Kdzr^{-5}\boldsymbol{r} + Kdr^{-3}\boldsymbol{k}
\end{aligned}$$

４．４

問 4.19

（１）$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=2x+2y+2z \quad (x,y,z)=(1,\ 1,\ 1)$ において $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=6$

（２）$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0 \quad (x,y,z)=(1,0,0)$ において $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=0$

（３）$\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\dfrac{az}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{xz}{\lambda}\right)-\dfrac{bx}{\lambda}\exp\left(-\dfrac{xy}{\lambda}\right)-2cz$

$(x,y,z)=(0,\ 0,\ 1)$ において $\nabla\cdot\boldsymbol{A}=-\dfrac{a}{\lambda}-2c$

問 4.20

$$\nabla\cdot\boldsymbol{r}=\frac{\partial x}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial y}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial z}{\partial z}\boldsymbol{k}=3$$

問 4.21

（１）例えば電場ベクトル $\boldsymbol{E}=\dfrac{K}{r^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ など。

（２）$\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{x}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{y}{r^3}\right)+\dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{z}{r^3}\right)$

$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$ より

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)=\frac{1}{r^3}+x\left\{-\frac{3}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}2x\right\}=\frac{1}{r^3}-\frac{3x^2}{r^5}=\frac{r^2-3x^2}{r^5}$$

$y,\quad z$ についても同様に考える。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)=\frac{r^2-3y^2}{r^5},\quad \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=\frac{r^2-3z^2}{r^5}$$

$$\therefore\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)=\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5}=0$$

問 4.22

問 4.21 より $\nabla\cdot\boldsymbol{E}=K\nabla\cdot\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$

問 4.23

（1）面 S_3 上で流束密度は一様であるとする。

そこで $\boldsymbol{h}_3$ は面 S_3 上の点 $\left(x+\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z \right)$ における流束密度の値で評価する。

・ $\boldsymbol{h}_3 = \boldsymbol{h}\left(x+\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z \right)$

$$\begin{aligned}
\Delta W_f^3 &= \boldsymbol{h}_3 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_3 \\
&= \left(h_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} \right) \cdot \left(\Delta y \Delta z \boldsymbol{i} \right) \\
&= h_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

・ $\boldsymbol{h}_4 = \boldsymbol{h}\left(x-\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z \right)$

$$\begin{aligned}
\Delta W_f^4 &= \boldsymbol{h}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_4 \\
&= \left(h_x(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)\boldsymbol{i} + 0\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} \right) \cdot \left(-\Delta y \Delta z \boldsymbol{i} \right) \\
&= -h_x(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z)\Delta y \Delta z
\end{aligned}$$

$$\therefore \Delta W_f^3 + \Delta W_f^4 = \left\{ h_x(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z) - h_x(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z) \right\} \Delta y \Delta z$$

・ $\boldsymbol{h}_5 = \boldsymbol{h}\left(x,\quad y+\dfrac{\Delta y}{2},\quad z \right)$

$$\begin{aligned}
\Delta W_f^5 &= \boldsymbol{h}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_5 \\
&= \left(0\boldsymbol{i} + h_y(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} \right) \cdot \left(\Delta x \Delta z \boldsymbol{j} \right) \\
&= h_y(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x \Delta z
\end{aligned}$$

・ $\boldsymbol{h}_6 = \boldsymbol{h}\left(x,\quad y-\dfrac{\Delta y}{2},\quad z \right)$

$$
\begin{aligned}
\Delta W_f^6 &= \boldsymbol{h}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_6 \\
&= \left(0\boldsymbol{i} + h_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)\,\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} \right) \cdot \left(-\Delta x \Delta z \boldsymbol{j} \right) \\
&= -h_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z)\Delta x \Delta z
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \Delta W_f^5 + \Delta W_f^6 = \left\{ h_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - h_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \right\} \Delta x \Delta z
$$

（2）

$$
\begin{cases}
h_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) \approx h_x(x, y, z) + \frac{\partial h_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \\
h_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \approx h_x(x, y, z) - \frac{\partial h_x}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}
\end{cases}
$$

$$
\therefore h_x(x + \frac{\Delta x}{2}, y, z) - h_x(x - \frac{\Delta x}{2}, y, z) \approx \frac{\partial h_x}{\partial x}\Delta x
$$

$$
\therefore \Delta W_f^3 + \Delta W_f^4 \approx \frac{\partial h_x}{\partial x}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial h_x}{\partial x}\Delta V
$$

$$
\begin{cases}
h_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) \approx h_y(x, y, z) + \frac{\partial h_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} \\
h_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \approx h_y(x, y, z) - \frac{\partial h_y}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}
\end{cases}
$$

$$
\therefore h_y(x, y + \frac{\Delta y}{2}, z) - h_y(x, y - \frac{\Delta y}{2}, z) \approx \frac{\partial h_y}{\partial y}\Delta y
$$

$$
\therefore \Delta W_f^5 + \Delta W_f^6 \approx \frac{\partial h_y}{\partial y}\Delta x \Delta y \Delta z = \frac{\partial h_y}{\partial y}\Delta V
$$

（3）

$$\begin{cases} \Delta W_f^1 + \Delta W_f^2 = \dfrac{\partial h_z}{\partial z}\Delta V \\ \Delta W_f^3 + \Delta W_f^4 = \dfrac{\partial h_x}{\partial x}\Delta V \\ \Delta W_f^5 + \Delta W_f^6 = \dfrac{\partial h_y}{\partial y}\Delta V \end{cases}$$

$$\therefore \sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{h}_j \cdot \Delta \boldsymbol{S}_j = \Delta W_f^1 + \Delta W_f^2 + \cdots + \Delta W_f^6 = \left(\frac{\partial h_x}{\partial x} + \frac{\partial h_y}{\partial y} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right) \Delta V = (\nabla \cdot \boldsymbol{h}) \Delta V$$

$\Delta W_f^j = \boldsymbol{h}_j \cdot \Delta \boldsymbol{S}_j$　**より**　$\sum_{j=1}^{6} \boldsymbol{h}_j \cdot \Delta \boldsymbol{S}_j$

問 4.24

この点においてエネルギーの生成・消滅がある。

問 4.25

（1）$\rho \boldsymbol{v}$

（2）**エネルギー流束の場合（式(4.58)の導出）を参照のこと。**

（3）$(\nabla \cdot \boldsymbol{f})\Delta V$ **は、この微小体積の表面における「質量の単位当りの正味の流出」を表す。したがって、この微小体積内の質量は単位時間当たりこの分だけ減少する。**

式(4.60)と同様の考え方から　$\dfrac{\Delta M}{\Delta t} = -\Delta M_f$　**一方、**$\Delta M_f = -(\nabla \cdot \boldsymbol{f})\Delta V$

（4）$M = \rho \Delta V$

（5）**ヒント：（4）を（3）の式に代入すると**

$$\frac{\Delta(\rho \Delta V)}{\Delta t} = -(\nabla \cdot \boldsymbol{f})\Delta V \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta \rho}{\Delta t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{f}$$

$$\therefore \frac{\Delta \rho}{\Delta t} + \nabla \cdot \boldsymbol{f} = 0 \quad (\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{v})$$

（6）$\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \boldsymbol{v}) = S_M$

問 4.26

問 4.25（6）より S_M がある場合の密度連続の式は、$\dfrac{\partial \rho}{\partial t}+\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=S_M$

この式において、定常 $\dfrac{\partial \rho}{\partial t}=0$ でかつ $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=0$ ならば $S_M=0$。したがって流体の湧き出しも吸い込みもない。

問 4.27

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v}) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi v_x\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi v_y\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varphi v_z\right)\\
&=\varphi\left(\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}\right)+\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}v_x+\frac{\partial \varphi}{\partial y}v_y+\frac{\partial \varphi}{\partial z}v_z\right)\\
&=\varphi\nabla\cdot\boldsymbol{v}+\left(\nabla\varphi\right)\cdot\boldsymbol{v}
\end{aligned}
$$

問 4.28

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{v}) &= \nabla\cdot\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\\
&=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\\
&=\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}+\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}
\end{aligned}
$$

問 4.29

$$
\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\nabla\cdot\left\{-\frac{1}{r^2}\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)\right\}=-\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0
$$

問 4.14 および問 4.21 で導いた式を利用する。

問 4.30

（1）式(4.62)より $\dfrac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{h}$　ここで　$\boldsymbol{h} = -\kappa \nabla T$ より

$$\frac{\partial q}{\partial t} = -\nabla \cdot \boldsymbol{h} = -\nabla \cdot \left(-\kappa \nabla T\right) = \kappa \nabla \cdot \nabla T = \kappa \nabla^2 T$$

$$\therefore \frac{\partial q}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T$$

（2）$q = \rho C T$

$$\frac{\partial\left(\rho C T\right)}{\partial t} = \kappa \nabla^2 T \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{C\rho} \nabla^2 T$$

問 4.31

（１）微小体積表面に対して外向き法線を面積ベクトルの方向と考える。図４．１１を参考にして

$$\Delta \boldsymbol{S}_1 = \left(r\Delta\theta\right)\left(\Delta r\right)\boldsymbol{e}_z = r\Delta\theta\Delta r\boldsymbol{e}_z$$

$$\Delta \boldsymbol{S}_2 = \left(r\Delta\theta\right)\left(\Delta r\right)(-\boldsymbol{e}_z) = -r\Delta\theta\Delta r\boldsymbol{e}_z$$

（２）

・$\boldsymbol{h}_1 = \boldsymbol{h}\left(r,\quad \theta,\quad z+\dfrac{\Delta z}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\Delta W_f^1 &= \boldsymbol{h}_1\cdot\Delta\boldsymbol{S}_1\\ &= \left(0\boldsymbol{e}_r + 0\boldsymbol{e}_\theta + h_z\left(r,\theta,z+\frac{\Delta z}{2}\right)\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(r\Delta\theta\Delta r\boldsymbol{e}_z\right)\\ &= h_z\left(r,\theta,z+\frac{\Delta z}{2}\right)r\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

・$\boldsymbol{h}_2 = \boldsymbol{h}\left(r,\quad \theta,\quad z-\dfrac{\Delta z}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\Delta W_f^2 &= \boldsymbol{h}_2\cdot\Delta\boldsymbol{S}_2\\ &= \left(0\boldsymbol{e}_r + 0\boldsymbol{e}_\theta + h_z\left(r,\theta,z-\frac{\Delta z}{2}\right)\boldsymbol{e}_z\right)\cdot\left(-r\Delta\theta\Delta r\boldsymbol{e}_z\right)\\ &= -h_z\left(r,\theta,z-\frac{\Delta z}{2}\right)r\Delta r\Delta\theta\end{aligned}$$

（３）（２）より

$$\Delta W_f^1 + \Delta W_f^2 = \left\{h_z\left(r,\theta,z+\frac{\Delta z}{2}\right) - h_z\left(r,\theta,z-\frac{\Delta z}{2}\right)\right\}r\Delta r\Delta\theta$$

（４）

$$\begin{cases} h_z(r,\theta,z+\dfrac{\Delta z}{2}) \approx h_z(r,\theta,z)+\dfrac{\partial h_z}{\partial z}\dfrac{\Delta z}{2} \\ h_z(r,\theta,z-\dfrac{\Delta z}{2}) \approx h_z(r,\theta,z)-\dfrac{\partial h_z}{\partial z}\dfrac{\Delta z}{2} \end{cases}$$

$$h_z(r,\theta,z+\frac{\Delta z}{2})-h_z(r,\theta,z-\frac{\Delta z}{2}) \approx \frac{\partial h_z}{\partial z}\Delta z$$

（３）で得られた式に代入して

$$\Delta W_f^1+\Delta W_f^2 \approx \frac{\partial h_z}{\partial z} r\Delta r\Delta\theta\Delta z$$

（５）微小体積表面に対して外向き法線を面積ベクトルの方向と考える。図４．１１を参考にして

$$\Delta \boldsymbol{S}_3=\left\{\left(r-\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\right\}(\Delta z)(-\boldsymbol{e}_r)=\left(r-\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z(-\boldsymbol{e}_r)$$

$$\Delta \boldsymbol{S}_4=\left\{\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\right\}(\Delta z)(\boldsymbol{e}_r)=\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z\boldsymbol{e}_r$$

（６）

・ $\boldsymbol{h}_3=\boldsymbol{h}\left(r-\dfrac{\Delta r}{2},\quad \theta,\quad z\right)$

$$\begin{aligned}\Delta W_f^3 &= \boldsymbol{h}_3\cdot\Delta\boldsymbol{S}_3 \\ &= \left\{h_r\left(r-\frac{\Delta r}{2},\theta,z\right)\boldsymbol{e}_r+0\boldsymbol{e}_\theta+0\boldsymbol{e}_z\right\}\cdot\left(r-\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z(-\boldsymbol{e}_r) \\ &= -h_r\left(r-\frac{\Delta r}{2},\theta,z\right)\left(r-\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z\end{aligned}$$

ここで

$h_r\left(r-\dfrac{\Delta r}{2},\theta,z\right)\approx h_r(r,\theta,z)-\dfrac{\partial h_r}{\partial r}\dfrac{\Delta r}{2}$ と近似できるので

$$\therefore \Delta W_f^3 \approx -\left\{h_r(r,\theta,z)-\frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2}\right\}\left(r-\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z$$

$$\Delta W_f^4 = \boldsymbol{h}_4 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_4$$
$$= \left\{ h_r\left(r+\frac{\Delta r}{2},\theta,z\right)\boldsymbol{e}_r + 0\boldsymbol{e}_\theta + 0\boldsymbol{e}_z \right\} \cdot \left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z\boldsymbol{e}_r$$
$$= h_r\left(r+\frac{\Delta r}{2},\theta,z\right)\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z$$

ここで

$h_r\left(r+\frac{\Delta r}{2},\theta,z\right) \approx h_r(r,\theta,z) + \frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2}$ **と近似できるので**

$$\therefore \Delta W_f^4 \approx \left\{ h_r(r,\theta,z) + \frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2} \right\}\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)\Delta\theta\Delta z$$

（７）

$$\Delta W_f^3 \approx \left\{ -h_r(r,\theta,z)r + \frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2}r + h_r(r,\theta,z)\frac{\Delta r}{2} + \underline{\frac{\partial h_r}{\partial r}\left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2} \right\}\Delta\theta\Delta z$$
$$\approx -\left\{ h_r(r,\theta,z)r - \frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2}r - h_r(r,\theta,z)\frac{\Delta r}{2} \right\}\Delta\theta\Delta z$$

$$\Delta W_f^4 \approx \left\{ h_r(r,\theta,z)r + \frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2}r + h_r(r,\theta,z)\frac{\Delta r}{2} + \underline{\frac{\partial h_r}{\partial r}\left(\frac{\Delta r}{2}\right)^2} \right\}\Delta\theta\Delta z$$
$$\approx \left\{ h_r(r,\theta,z)r + \frac{\partial h_r}{\partial r}\frac{\Delta r}{2}r + h_r(r,\theta,z)\frac{\Delta r}{2} \right\}\Delta\theta\Delta z$$

これらから

$$\Delta W_f^3 + \Delta W_f^4 \approx \left\{ \frac{\partial h_r}{\partial r}\Delta r r + h_r(r,\theta,z)\Delta r \right\}\Delta\theta\Delta z = \left\{ \frac{\partial h_r}{\partial r}r + h_r(r,\theta,z) \right\}\Delta r\Delta\theta\Delta z$$

$$\therefore \Delta W_f^3 + \Delta W_f^4 \approx \left\{ \frac{\partial(h_r r)}{\partial r} \right\}\Delta r\Delta\theta\Delta z$$

（８）

図４．１１を参考にしてθ方向の外向き法線を面積ベクトルの方向と考える。

$$\Delta \boldsymbol{S}_5 = \Delta r\Delta z\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\Delta \boldsymbol{S}_6 = \Delta r\Delta z(-\boldsymbol{e}_\theta)$$

（９）

$$
\begin{aligned}
\Delta W_f^5 &= \boldsymbol{h}_5 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_5 \\
&= \left\{ 0\boldsymbol{e}_r + h_\theta\left(r, \theta + \frac{\Delta\theta}{2}, z \right)\boldsymbol{e}_\theta + 0\boldsymbol{e}_z \right\} \cdot \Delta r \Delta z \boldsymbol{e}_\theta \\
&= h_\theta\left(r, \theta + \frac{\Delta\theta}{2}, z \right)\Delta r \Delta z \\
&\approx \left\{ h_\theta\left(r, \theta, z\right) + \frac{\partial h_\theta}{\partial\theta}\frac{\Delta\theta}{2} \right\}\Delta r \Delta z
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta W_f^6 &= \boldsymbol{h}_6 \cdot \Delta \boldsymbol{S}_6 \\
&= \left\{ 0\boldsymbol{e}_r + h_\theta\left(r, \theta - \frac{\Delta\theta}{2}, z \right)\boldsymbol{e}_\theta + 0\boldsymbol{e}_z \right\} \cdot \left(-\Delta r \Delta z \boldsymbol{e}_\theta \right) \\
&= -h_\theta\left(r, \theta - \frac{\Delta\theta}{2}, z \right)\Delta r \Delta z \\
&\approx -\left\{ h_\theta\left(r, \theta, z\right) - \frac{\partial h_\theta}{\partial\theta}\frac{\Delta\theta}{2} \right\}\Delta r \Delta z
\end{aligned}
$$

$$
\therefore \Delta W_f^5 + \Delta W_f^6 \approx \frac{\partial h_\theta}{\partial\theta}\Delta r \Delta\theta \Delta z
$$

（１０）

$$
\begin{aligned}
\Delta W_f &= \left(\Delta W_f^1 + \Delta W_f^2\right) + \left(\Delta W_f^3 + \Delta W_f^4\right) + \left(\Delta W_f^5 + \Delta W_f^6\right) \\
&\approx \left[\frac{\partial h_z}{\partial z} r \Delta r \Delta\theta \Delta z + \left\{ \frac{\partial\left(h_r r\right)}{\partial r} \right\} \Delta r \Delta\theta \Delta z + \frac{\partial h_\theta}{\partial\theta}\Delta r \Delta\theta \Delta z \right] \\
&= \left\{ \frac{\partial h_z}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial\left(h_r r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_\theta}{\partial\theta} \right\} r \Delta r \Delta\theta \Delta z
\end{aligned}
$$

（１１）$\Delta V = r\Delta r \Delta\theta \Delta z$ より

$$
\Delta W_f \approx \left\{ \frac{1}{r}\frac{\partial\left(h_r r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial h_z}{\partial z} \right\}\Delta V = \left(\nabla \cdot \boldsymbol{h}\right)\Delta V
$$

$$
\therefore \nabla \cdot \boldsymbol{h} = \frac{1}{r}\frac{\partial\left(r h_r\right)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial h_\theta}{\partial\theta} + \frac{\partial h_z}{\partial z}
$$

４．５

問 4.32

（１）

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\frac{\partial A_y}{\partial x}\left(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j}\right)+\frac{\partial A_z}{\partial x}\left(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}\right)+\frac{\partial A_x}{\partial y}\left(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i}\right)+\frac{\partial A_z}{\partial y}\left(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k}\right)+\frac{\partial A_x}{\partial z}\left(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i}\right)+\frac{\partial A_y}{\partial z}\left(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

（２）

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{i}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{j}+\frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{k}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{k}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{j}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{i}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

問 4.33

（１）$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & zx & xy\end{vmatrix}=\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)-\left(z\boldsymbol{k}+y\boldsymbol{j}-x\boldsymbol{i}\right)=\boldsymbol{0}$　なので

$(x,y,z)=(1,\ 1,\ 1)$　において　$\left|\nabla\times\boldsymbol{A}\right|=0$，単位ベクトル：$\boldsymbol{0}$

（２）$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ ay^2 & bx^2 & cz^2\end{vmatrix}=2bx\boldsymbol{k}-2ay\boldsymbol{k}=2\left(bx-ay\right)\boldsymbol{k}$　なので

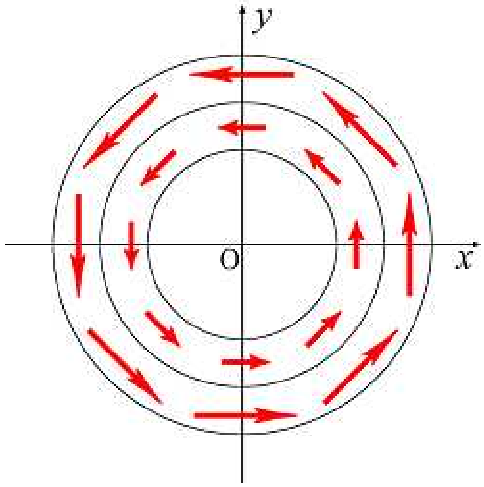
$(x,y,z)=(1,\ 1,\ 1)$　において　$\left|\nabla\times\boldsymbol{A}\right|=2\left(b-a\right)$，単位ベクトル：$\boldsymbol{k}$

問 4.34

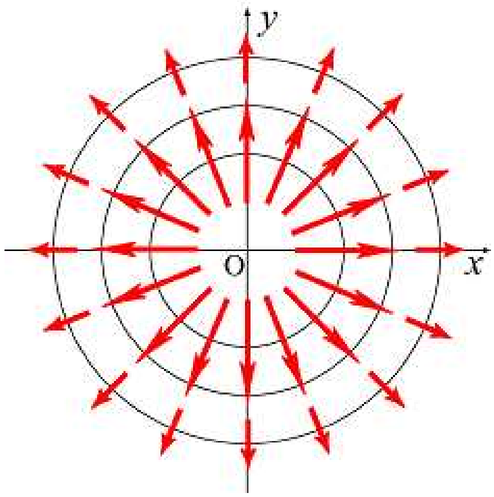
$$\nabla\times\boldsymbol{r}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ x & y & z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=0$$

問 4.35

（1）(a)　**左回転の同心円状**



(b)　**放射状**



（２）(a) $\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y\omega & x\omega & 0\end{vmatrix}=\omega\boldsymbol{k}+\omega\boldsymbol{k}=2\omega\boldsymbol{k}$

(b) $\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{x}{r^2} & \dfrac{y}{r^2} & 0\end{vmatrix}=\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{y}{r^2}\right)\boldsymbol{k}-\dfrac{\partial}{\partial y}\left(\dfrac{x}{r^2}\right)\boldsymbol{k}$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{y}{r^2}\right)=y\left\{-\frac{2x}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right\}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x}{r^2}\right)=x\left\{-\frac{2y}{\left(x^2+y^2\right)^2}\right\}=-\frac{2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

$\therefore\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$

(a)**の場は、回転のある場である**（$\nabla\times\boldsymbol{v}\neq\boldsymbol{0}$）。

(b)**の場合、速度ベクトルは空間の各点で位置ベクトル** $\boldsymbol{r}$ **の方向を向いている**（（**１**）**の図** b 参)。**この場合発散は０にならない**（$\nabla\cdot\boldsymbol{v}\neq 0$）**が回転はゼロベクトル**（$\nabla\times\boldsymbol{v}=\boldsymbol{0}$）**となる**。

問 4.36

（1）$\boldsymbol{\omega}$ と $\boldsymbol{r}$ のなす角を α とすると　$v = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega r \sin\alpha = a\omega$　ただし、$a = r\sin\alpha$

a は $\boldsymbol{\omega}$ と垂直な面での回転半径となっている。

（2）$$\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\omega_y z - \omega_z y\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega_z x - \omega_x z\right)\boldsymbol{j} + \left(\omega_x y - \omega_y x\right)\boldsymbol{k}$$

（3）

$$\begin{aligned} \nabla \times \boldsymbol{v} &= \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \omega_y z - \omega_z y & \omega_z x - \omega_x z & \omega_x y - \omega_y x \end{vmatrix} \\ &= \left(\omega_y z - \omega_z y\right)\boldsymbol{i} + \left(\omega_z x - \omega_x z\right)\boldsymbol{j} + \left(\omega_x y - \omega_y x\right)\boldsymbol{k} \\ &= 2\omega_x \boldsymbol{i} + 2\omega_y \boldsymbol{j} + 2\omega_z \boldsymbol{k} \\ &= 2\left(\omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}\right) \end{aligned}$$

（4）$\boldsymbol{\omega} = \omega_x \boldsymbol{i} + \omega_y \boldsymbol{j} + \omega_z \boldsymbol{k}$ であるから（3）は、$\nabla \times \boldsymbol{v} = 2\boldsymbol{\omega}$ となっている。

問 4.37

～左辺～

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x+B_x & A_y+B_y & A_z+B_z\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial(A_z+B_z)}{\partial y}-\frac{\partial(A_y+B_y)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial(A_x+B_x)}{\partial z}-\frac{\partial(A_z+B_z)}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial(A_y+B_y)}{\partial x}-\frac{\partial(A_x+B_x)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

～右辺～

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ A_x & A_y & A_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$\therefore\nabla\times\boldsymbol{A}+\nabla\times\boldsymbol{B}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}-\frac{\partial B_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}+\frac{\partial B_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial B_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}+\frac{\partial B_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}-\frac{\partial B_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

問 4.38

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \varphi A_x & \varphi A_y & \varphi A_z\end{vmatrix}$$

$$=\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_z)+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_x)+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_y)-\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial y}(\varphi A_x)-\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial x}(\varphi A_z)-\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial z}(\varphi A_y)$$

$$=A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{i}+\boxed{\varphi\frac{\partial A_z}{\partial y}\boldsymbol{i}}+A_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{j}+\boxed{\varphi\frac{\partial A_x}{\partial z}\boldsymbol{j}}+A_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{k}+\boxed{\varphi\frac{\partial A_y}{\partial x}\boldsymbol{k}}$$

$$-A_x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{k}-\boxed{\varphi\frac{\partial A_x}{\partial y}\boldsymbol{k}}-A_z\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{j}-\boxed{\varphi\frac{\partial A_z}{\partial x}\boldsymbol{j}}-A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{i}-\boxed{\varphi\frac{\partial A_y}{\partial z}\boldsymbol{i}}$$

$$=\varphi\left\{\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right\}$$

$$+A_z\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{k})+A_x\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+A_y\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})$$

$$+A_x\frac{\partial\varphi}{\partial y}(\boldsymbol{j}\times\boldsymbol{i})+A_z\frac{\partial\varphi}{\partial x}(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k})+A_y\frac{\partial\varphi}{\partial z}(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})$$

$$=(\varphi\nabla)\times\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\times A_z\boldsymbol{k}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\times A_x\boldsymbol{i}$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\times A_y\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\times A_x\boldsymbol{i}$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\times A_z\boldsymbol{k}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\times A_y\boldsymbol{j}$$

$$=(\varphi\nabla)\times\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\left(A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\left(A_x\boldsymbol{i}+A_z\boldsymbol{k}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\left(A_y\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}\right)$$

$$=(\varphi\nabla)\times\boldsymbol{A}+\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}\times\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}\times\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\times\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$=(\varphi\nabla)\times\boldsymbol{A}+\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\varphi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\times\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$=(\varphi\nabla)\times\boldsymbol{A}+\nabla\varphi\times\boldsymbol{A}$$

$\boxed{\textbf{問 4.39}}$

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}=\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

（1）

$$\nabla\times(r\boldsymbol{r})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ rx & ry & rz\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial(rz)}{\partial y}-\frac{\partial(ry)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial(rx)}{\partial z}-\frac{\partial(rz)}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial(ry)}{\partial x}-\frac{\partial(rx)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(z\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial y}-y\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(x\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial z}-z\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(y\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial x}-x\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(\frac{2yz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{2yz}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(\frac{2zx}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{2zx}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(\frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}-\frac{2xy}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)\boldsymbol{k}=0$$

（2）

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\nabla\times\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r}\right)=\nabla\times\left(\frac{x}{r}\boldsymbol{i}+\frac{y}{r}\boldsymbol{j}+\frac{z}{r}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ xr^{-1} & yr^{-1} & zr^{-1}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial\left(zr^{-1}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(yr^{-1}\right)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\left(xr^{-1}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(zr^{-1}\right)}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\left(yr^{-1}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(xr^{-1}\right)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(z\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y}-y\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(x\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial z}-z\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(y\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial x}-x\frac{\partial\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(-\frac{1}{2}z\cdot 2y\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}y\cdot 2z\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}x\cdot 2z\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}z\cdot 2x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(-\frac{1}{2}y\cdot 2x\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}x\cdot 2y\cdot\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\right)\boldsymbol{k}=0$$

（3）

$$\nabla\times\left(\frac{K}{r^2}\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=\nabla\times\frac{K\boldsymbol{r}}{r^3}=\nabla\times\frac{K}{r^3}\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)=\nabla\times\left(\frac{Kx}{r^3}\boldsymbol{i}+\frac{Ky}{r^3}\boldsymbol{j}+\frac{Kz}{r^3}\boldsymbol{k}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ Kxr^{-3} & Kyr^{-3} & Kzr^{-3}\end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial\left(Kzr^{-3}\right)}{\partial y}-\frac{\partial\left(Kyr^{-3}\right)}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial\left(Kxr^{-3}\right)}{\partial z}-\frac{\partial\left(Kzr^{-3}\right)}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial\left(Kyr^{-3}\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(Kxr^{-3}\right)}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$$

$$=\left(kz\left(-3\right)r^{-4}2y-ky\left(-3\right)r^{-4}2z\right)\boldsymbol{i}$$

$$+\left(kx\left(-3\right)r^{-4}2z-kz\left(-3\right)r^{-4}2x\right)\boldsymbol{j}$$

$$+\left(ky\left(-3\right)r^{-4}2x-kx\left(-3\right)r^{-4}2y\right)\boldsymbol{k}$$

$$=0$$

問 4.40

（1）
$$\begin{aligned}\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A}) &= (\nabla\cdot\boldsymbol{A})\nabla-\left(\nabla\cdot\nabla\right)\boldsymbol{A}\\ &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}\end{aligned}$$

（2） x 成分のみに注目して、

$$\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z} & \dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x} & \dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned}(x\text{成分}) &= \frac{\partial^2 A_y}{\partial x\partial y}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial x\partial z}+\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}-\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}\right)\\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2}\right)=\left\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right\}_x-\left\{\nabla^2\boldsymbol{A}\right\}_x\end{aligned}$$

$$(y\text{成分})=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2}\right)=\left\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right\}_y-\left\{\nabla^2\boldsymbol{A}\right\}_y$$

$$(z\text{成分})=\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)-\left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2}\right)=\left\{\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\right\}_z-\left\{\nabla^2\boldsymbol{A}\right\}_z$$

$$\therefore\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{A})=\nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{A})-\nabla^2\boldsymbol{A}$$

問 4.41

x 成分の計算を示す。

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}(\nabla\cdot\boldsymbol{B})-\boldsymbol{B}(\nabla\cdot\boldsymbol{A})$$

$$=(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\left(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}\right)$$

$$+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})\left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})\left(B_x\boldsymbol{i}+B_y\boldsymbol{j}+B_z\boldsymbol{k}\right)$$

この x 成分は

$$(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)A_x-(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)B_x+(\nabla\cdot\boldsymbol{B})A_x-(\nabla\cdot\boldsymbol{A})B_x$$

$$=\left(B_x\frac{\partial A_x}{\partial x}+B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)-\left(A_x\frac{\partial B_x}{\partial x}+A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial B_x}{\partial x}+\frac{\partial B_x}{\partial y}+\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)A_x-\left(\frac{\partial A_x}{\partial x}+\frac{\partial A_x}{\partial y}+\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)B_x$$

$$=\left(B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)-\left(A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}+A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}\right)+A_x\left(\frac{\partial B_y}{\partial y}+\frac{\partial B_z}{\partial z}\right)-B_x\left(\frac{\partial A_y}{\partial y}+\frac{\partial A_z}{\partial z}\right)$$

一方

$$\left\{\nabla\times(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\right\}_x=\frac{\partial}{\partial y}\left(A_xB_y-A_yB_x\right)-\frac{\partial}{\partial z}\left(A_zB_x-A_xB_z\right)$$

$$=B_y\frac{\partial A_x}{\partial y}+A_x\frac{\partial B_y}{\partial y}-B_x\frac{\partial A_y}{\partial y}-A_y\frac{\partial B_x}{\partial y}-B_x\frac{\partial A_z}{\partial z}-A_z\frac{\partial B_x}{\partial z}+B_z\frac{\partial A_x}{\partial z}+A_x\frac{\partial B_z}{\partial z}$$

として比較する。

４．６

問 4.42

力の場： $\boldsymbol{F} = -\nabla U$

熱エネルギーの流れ場： $\boldsymbol{h} = -\kappa \nabla T$

静電場： $\boldsymbol{E} = -\nabla \varphi$　**など**

問 4.43

（1）　$\varphi(x, y) = ax^2 + by^2$

$$\nabla \varphi = a\frac{\partial x^2}{\partial x}\boldsymbol{i} + b\frac{\partial y^2}{\partial y}\boldsymbol{j} = 2ax\boldsymbol{i} + 2by\boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2ax & 2by & 0 \end{vmatrix} = 0$$

（2）　$\varphi(x, y) = \dfrac{a}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\nabla \varphi = a\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2x\right\}\boldsymbol{i} + a\left\{-\frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} \cdot 2y\right\}\boldsymbol{j}$$

$$= -ax\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{i} - ay\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times (\nabla \varphi) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -ax\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} & -ay\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{3}{2}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\left\{-ay\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2x\right\} - \left\{-ax\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2 + y^2\right)^{-\frac{5}{2}} \cdot 2y\right\}\right]\boldsymbol{k} = 0$$

（3）　$\varphi(x,y,z)=\dfrac{a}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}=a\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\nabla\varphi=-ax\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{i}-ay\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{j}-az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\times(\nabla\varphi)=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -ax\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} & -ay\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}} & -az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\end{vmatrix}$$

$$=\left\{-az\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y+ay\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2z\right\}\boldsymbol{i}$$

$$+\left\{-ax\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2z+az\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x\right\}\boldsymbol{j}$$

$$+\left\{-ay\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2x+ax\left(-\frac{3}{2}\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{5}{2}}\cdot 2y\right\}\boldsymbol{k}$$

$$=0$$

4．7

問 4.44

（1） $\boldsymbol{A} = ay\boldsymbol{i} - ay\boldsymbol{j}$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ay & -ay & 0 \end{vmatrix} = \left\{ 0 - \frac{\partial(ay)}{\partial y} \right\} \boldsymbol{k} = -a\boldsymbol{k}$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \boldsymbol{A}) = \frac{\partial(-a)}{\partial z} = 0$$

（2）

$$\boldsymbol{A} = \frac{ay}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{i} + \frac{ax}{x^2+y^2+z^2}\boldsymbol{j} = ay\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\boldsymbol{i} + ax\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1}\boldsymbol{j}$$

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ ay\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} & ax\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} & 0 \end{vmatrix}$$

$$= \left\{ 0 - ax(-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2} 2z \right\} \boldsymbol{i}$$

$$+ \left\{ ay(-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2} 2z - 0 \right\} \boldsymbol{j}$$

$$+ \left\{ \begin{matrix} a\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} + ax(-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)2x \\ -a\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-1} - ay(-1)\left(x^2+y^2+z^2\right)2y \end{matrix} \right\} \boldsymbol{k}$$

$$= 2axz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\boldsymbol{i} - 2ayz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}\boldsymbol{j}$$

$$+ \left\{ -2ax^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2} + 2ay^2\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2} \right\} \boldsymbol{k}$$

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right) &= \left\{2az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}+2axz\left(-2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3}\cdot 2x\right\} \\
&\quad+\left\{-2az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}-2ayz\left(-2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3}\cdot 2y\right\} \\
&\quad+\left\{-2ax^2\left(-2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3}2z+2ay^2\left(-2\right)\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3}\cdot 2z\right\} \\
&= 2az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}-8ax^2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3} \\
&\quad -2az\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-2}+8ay^2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3} \\
&\quad +8ax^2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3}-8ay^2z\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-3} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

問 4.45

（1） $\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z},\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x},\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$$B_0=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}=\sqrt{B_z^2}=B_z$$

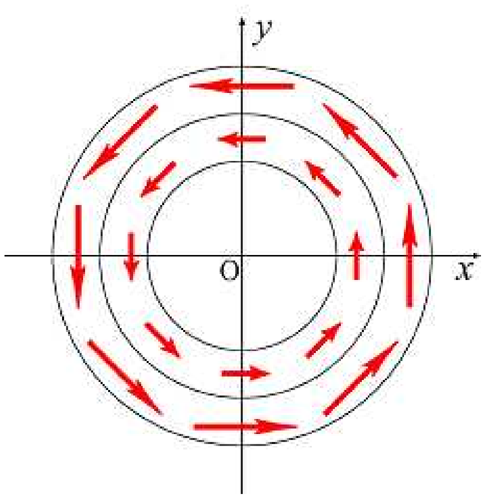
（2） $\boldsymbol{B}=\nabla\times\boldsymbol{A}$ 　より $\left(B_x,B_y,B_z\right)=\left(\dfrac{\partial A_z}{\partial y}-\dfrac{\partial A_y}{\partial z},\dfrac{\partial A_x}{\partial z}-\dfrac{\partial A_z}{\partial x},\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

$B_z=B_0$ 　より　$B_z=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}$, 　$\therefore B_0=\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}$

（3） $\dfrac{\partial A_x}{\partial y}=-\dfrac{1}{2}B_0$, 　$\dfrac{\partial A_y}{\partial x}=\dfrac{1}{2}B_0$ 　より、$\dfrac{\partial A_y}{\partial x}-\dfrac{\partial A_x}{\partial y}=\dfrac{1}{2}B_0-\left(-\dfrac{1}{2}B_0\right)=B_0$

したがって（2）をみたす。

（4）左回転の同心円状となる。



第５章．ベクトルの積分

５．１

問 5.1

(1)$\int_0^1 xdx = \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^1 = \frac{1}{2}$

(2)$\int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int\left(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}\right)\cdot dy\boldsymbol{j} = \int_0^2 ydy = \left[\frac{1}{2}y^2\right]_0^2 = 2$

(3)$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}+2 = \frac{5}{2}$

問 5.2

（１）$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i}$　　C_1 上で $y=0$

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \left(A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot dx\boldsymbol{i} = \left(y\boldsymbol{i}+x^2\boldsymbol{j}+xy\boldsymbol{k}\right)\cdot dx\boldsymbol{i} = ydx = 0$$

$$\therefore \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

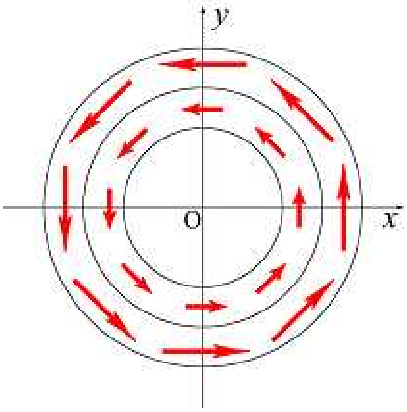
（２）$d\boldsymbol{r} = dy\boldsymbol{i}$　　C_2 上で $x=1$

$$\boldsymbol{A} = y\boldsymbol{i}+1^2\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k} \qquad \therefore \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \left(y\boldsymbol{i}+\boldsymbol{j}+y\boldsymbol{k}\right)\cdot dy\boldsymbol{j} = dy$$

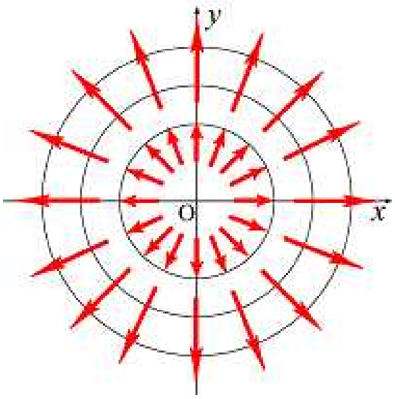
$$\therefore \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^2 dy = \left[y\right]_0^2 = 2$$

問 5.3

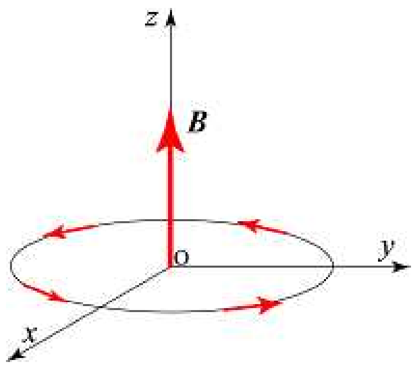
（A）



（B）



（C）



問題文の＜手順＞より、 $d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + 2xdx\boldsymbol{j}$

（A） $\boldsymbol{A} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$ 、 C 上で $y = x^2$ より $\boldsymbol{A} = -\omega x^2\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j}$

$$\therefore \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\omega x^2 dx + 2\omega x^2 dx$$

$$\therefore \int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(-\omega x^2 + 2\omega x^2\right) dx = \int_0^1 \omega x^2 dx = \omega\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}\omega$$

（B） $\nabla\varphi = \boldsymbol{A} = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$ 、 C 上で $y = x^2$ より

$$\therefore \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 2xdx + 2y2xdx = 2xdx + 4x^3dx$$

$$\therefore \int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(2x + 4x^3\right) dx = \left[x^2\right]_0^1 + \left[x^4\right]_0^1 = 1 + 1 = 2$$

また、 $\int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \varphi(\mathrm{P}) - \varphi(0) = 2$

ただし　$\begin{aligned}\varphi(\mathrm{P}) &= \varphi(1,1) = 1^2 + 1^2 = 2 \\ \varphi(0) &= 0\end{aligned}$　としてもよい。

（C）$\boldsymbol{B}$ は、z 方向を向く。したがって、$\boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

$$\therefore \int_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

問 5.4

(5.15)式の導出過程を参照して、変位を逆向きにとると　$d\boldsymbol{r} = -(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j})$

$$\therefore \int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{A}\cdot(-dx\boldsymbol{i} - dy\boldsymbol{j}) = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{A}\cdot(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}) = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

積分の上限・下限、$d\boldsymbol{r}$ の符号の両方を逆にしないように注意する。変位を逆向きにとるとき、変位ベクトルを逆にとれば積分範囲を変える必要はない。

$$\int_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\mathrm{Q}}^{\mathrm{P}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

問 5.5

（1） C_1 **において**　$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i}$ 、 $\boldsymbol{A} = \nabla\varphi = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \left(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\right)\cdot dx\boldsymbol{i} = 2xdx$$

$$C_1 : \int_0^1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 2xdx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

C_2 **において**　$d\boldsymbol{r} = dy\boldsymbol{j}$ 、 $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \left(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\right)\cdot dy\boldsymbol{j} = 2ydy$

$$C_2 : \int_0^1 \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 2ydy = 2\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^1 = 1$$

よって、積分路１： $\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 2ydy = 2$

C_3 **において**　$d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}$ 、

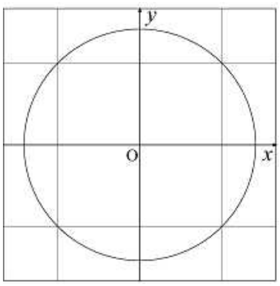
$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= \left(2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j}\right) = 2xdx + 2ydy = 2xdx + 2x^2 2xdx \\ &= 2xdx + 4x^3dx\end{aligned}$$

$$C_3 : \int_{(0,0)}^{(1,1)} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(2x + 4x^3\right)dx = \left[x^2 + x^4\right]_0^1 = \left(1+1\right) - 0 = 2$$

よって、積分路２： $\int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 2xdx + \int_0^1 4x^3dy = 2$

（2）（1）で計算した結果を比較する。

（3）



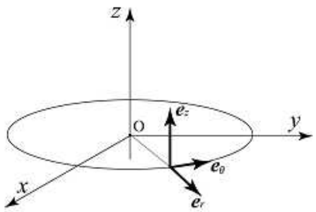
$$\varphi\left(1,1\right) = 1^2 + 1^2 = 2、\varphi\left(0,0\right) = 0$$

$$\therefore \varphi\left(\mathrm{P}_2\right) - \varphi\left(\mathrm{P}_1\right) = 2 - 0 = 2$$

問 5.6

（1）$\boldsymbol{e}_r = \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} = \dfrac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}}{r} = \left(\dfrac{x}{r}\right)\boldsymbol{i} + \left(\dfrac{y}{r}\right)\boldsymbol{j} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$

（2）



θ方向の単位ベクトルは、$\boldsymbol{e}_r$と$\boldsymbol{e}_z$の両方に垂直でその大きさは１である。したがって、$\boldsymbol{e}_r$と$\boldsymbol{e}_z$の外積を用いて、$\boldsymbol{e}_\theta = \boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r$　と表現できる。

（3）$\boldsymbol{e}_r = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}$

$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (0-\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta - 0)\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}$$

（4）

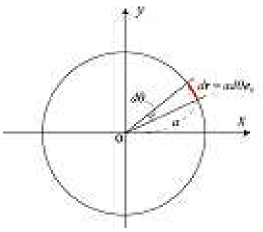
$$\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r = (\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j})\cdot(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$
$$\boldsymbol{e}_\theta \cdot \boldsymbol{e}_\theta = (-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j})\cdot(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}) = \sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$$
$$\boldsymbol{e}_z \cdot \boldsymbol{e}_z = \boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} = 1$$

$$\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{vmatrix} = (0)\boldsymbol{i} + (0)\boldsymbol{j} + (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\boldsymbol{k} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{e}_z$$

$$\boldsymbol{e}_\theta \times \boldsymbol{e}_z = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (\cos\theta)\boldsymbol{i} + (\sin\theta)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k} = \cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_r$$

$$\boldsymbol{e}_z \times \boldsymbol{e}_r = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & 1 \\ \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{vmatrix} = (0-\sin\theta)\boldsymbol{i} + (\cos\theta - 0)\boldsymbol{j} + (0)\boldsymbol{k} = -\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j} = \boldsymbol{e}_\theta$$

（5）円周に沿っての微小変位であるからその方向は円周上の各点で円の接線方向を向く。すなわち $\boldsymbol{e}_\theta$ の方向。また、微小角度 $d\theta$ に対応する円周の長さ、すなわち微小変位の大きさは、$dr = ad\theta$ である。したがって $d\boldsymbol{r} = ad\theta\boldsymbol{e}_\theta$ 図も参照のこと。



始点：$\theta = 0$ のとき　$x = a\cos 0 = a,\quad y = a\sin 0 = 0$ より

$$r = \sqrt{\left(a\cos\theta\right)^2 + \left(a\cos\theta\right)^2} = a \quad \text{なので} \quad (r,\theta) = (a,0)$$

終点：$\theta = 2\pi$ のとき　$x = a\cos 2\pi = a,\quad y = a\sin 2\pi = 0$ より

$$r = \sqrt{\left(a\cos\theta\right)^2 + \left(a\cos\theta\right)^2} = a \quad \text{なので} \quad (r,\theta) = (a,2\pi)$$

（6）

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{A}(x,y,z) &= A_x(x,y,z)\boldsymbol{i} + A_y(x,y,z)\boldsymbol{j} + A_z(x,y,z)\boldsymbol{k} \\
&= K\frac{x}{r^2}\boldsymbol{i} + K\frac{y}{r^2}\boldsymbol{j} \\
&= \frac{K}{r^2}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\right) \\
&= \frac{K}{r^2}\left(r\cos\theta\boldsymbol{i} + r\sin\theta\boldsymbol{j}\right) \\
&= \frac{K}{r}\left(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}\right) = \frac{K}{r}\boldsymbol{e}_r
\end{aligned}$$

（7）$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき、$\boldsymbol{A}(r) = \dfrac{k}{a}\boldsymbol{e}_r = \dfrac{k}{a}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}\boldsymbol{i} + \sin\dfrac{\pi}{4}\boldsymbol{j}\right) = \dfrac{k}{\sqrt{2}a}\left(\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\right)$

$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ のとき、$\boldsymbol{A}(r) = \dfrac{k}{a}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}\boldsymbol{i} + \sin\dfrac{\pi}{2}\boldsymbol{j}\right) = \dfrac{k}{a}\boldsymbol{j}$

（8）$\displaystyle\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{k}{a}\boldsymbol{e}_r\right)\cdot\left(ad\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) = \int_0^{2\pi} k\left(\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta\right)d\theta$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_\theta &= \left(\cos\theta\boldsymbol{i}+\sin\theta\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(-\sin\theta\boldsymbol{i}+\cos\theta\boldsymbol{j}\right)\\ &= -\sin\theta\cos\theta+\sin\theta\cos\theta\\ &= 0\end{aligned}$$

$$\therefore \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

問 5.7

$$\boldsymbol{B}(x,y,z) = -B_0\frac{y}{r^2}\boldsymbol{i} + B_0\frac{x}{r^2}\boldsymbol{j}$$

（1） $B = |\boldsymbol{B}| = \sqrt{\frac{B_0^2 y^2}{r^4} + \frac{B_0^2 x^2}{r^4}} = \sqrt{\frac{B_0^2}{r^4}(x^2+y^2)} = \frac{B_0}{r^2}\sqrt{x^2+y^2} = \frac{B_0}{r^2}r = \frac{B_0}{r}$

よって r にのみ依存する。

（2）

$$B(x,y,z) = \frac{B_0}{r^2}(-y\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}) = \frac{B_0}{r^2}(-r\sin\theta\boldsymbol{i} + r\cos\theta\boldsymbol{j})$$

$$= \frac{B_0}{r}(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}) = \frac{B_0}{r}\boldsymbol{e}_\theta$$

（3）

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}\left(\frac{B_0}{r}\boldsymbol{e}_\theta\right)\cdot(rd\theta\boldsymbol{e}_\theta) = \int_0^{2\pi} B_0(\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta)d\theta$$

$$= B_0\int_0^{2\pi} d\theta = B_0[\theta]_0^{2\pi} = 2\pi B_0$$

（4） $\int_0^{\pi} B_0 d\theta = \pi B_0$

問 5.8

（1）

$$\boldsymbol{B} = -B_0\left(\frac{y}{r}\right)\boldsymbol{i} + B_0\left(\frac{x}{r}\right)\boldsymbol{j} = -\frac{B_0}{r}r\sin\theta\boldsymbol{i} + \frac{B_0}{r}r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$= -B_0\left(\sin\theta\boldsymbol{i} - \cos\theta\boldsymbol{j}\right) = B_0\left(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\right) = B_0\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}\left(B_0\boldsymbol{e}_\theta\right)\cdot\left(ad\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) = aB_0\int_0^{2\pi}\left(\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta\right)d\theta$$

$$= aB_0\int_0^{2\pi}d\theta = aB_0\left[\theta\right]_0^{2\pi} = 2\pi aB_0$$

（2）

$$\boldsymbol{B} = B_0\left(\frac{y}{r}\right)\boldsymbol{i} - B_0\left(\frac{x}{r}\right)\boldsymbol{j} = \frac{B_0}{r}r\sin\theta\boldsymbol{i} - \frac{B_0}{r}r\cos\theta\boldsymbol{j}$$

$$= -B_0\left(-\sin\theta\boldsymbol{i} + \cos\theta\boldsymbol{j}\right) = -B_0\boldsymbol{e}_\theta$$

$$\oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi}\left(-B_0\boldsymbol{e}_\theta\right)\cdot\left(ad\theta\boldsymbol{e}_\theta\right) = -aB_0\int_0^{2\pi}\left(\boldsymbol{e}_\theta\cdot\boldsymbol{e}_\theta\right)d\theta$$

$$= -aB_0\int_0^{2\pi}d\theta = -aB_0\left[\theta\right]_0^{2\pi} = -2\pi aB_0$$

問 5.9

$$r = |\boldsymbol{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

（1）$\varphi(x, y, z) = Kr^{-1} = K\left(x^2 + y^2 + z^2\right)^{-\frac{1}{2}}$

$$\boldsymbol{A} = -\nabla\varphi = -\frac{\partial\left\{K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\boldsymbol{i}}{\partial x} - \frac{\partial\left\{K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\boldsymbol{j}}{\partial y} - \frac{\partial\left\{K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{1}{2}}\right\}\boldsymbol{k}}{\partial z}$$

$$= \frac{1}{2}K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2x\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2y\boldsymbol{j} + \frac{1}{2}K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}2z\boldsymbol{k}$$

$$= Kx\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{i} + Ky\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{j} + Kz\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\boldsymbol{k}$$

$$= K\left(x^2+y^2+z^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}\right)$$

$$= K\left(\frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$$

（2）円周に沿っての積分路については、円周上で $\boldsymbol{A} \perp d\boldsymbol{r}$ より、$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$ である。従って、径方向の積分のみを考えればよい。

・C_1 上、径方向では、$y = 0, \quad z = 0$ から

$$\boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = K\left(x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x\boldsymbol{i}\right) \cdot dx\boldsymbol{i}$$
$$= Kx^{-2}dx$$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = K\int_{r_1}^{2r_1} x^{-2}dx = K\left[\frac{x^{-2+1}}{-2+1}\right]_{r_1}^{2r_2} = K\left(-\frac{1}{2r_1} + \frac{1}{r_1}\right) = \frac{K}{2r_1}$$

・C_2 上、直線 P_1P_3 は、$y = x$ なので $dy = dx$

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = K\left(x^2+x^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(x\boldsymbol{i}+x\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(dx\boldsymbol{i}+dx\boldsymbol{j}\right)$$

$$= \left(2^{-\frac{3}{2}}Kx^{-2}\boldsymbol{i}+2^{-\frac{3}{2}}Kx^{-2}\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(dx\boldsymbol{i}+dx\boldsymbol{j}\right)$$

$$= 2^{-\frac{3}{2}}Kx^{-2}dx+2^{-\frac{3}{2}}Kx^{-2}dx$$

$$= 2\cdot 2^{-\frac{3}{2}}Kx^{-2}dx = \frac{K}{\sqrt{2}}x^{-2}dx$$

$$\int_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\left(\frac{r_1}{\sqrt{2}},\frac{r_1}{\sqrt{2}}\right)}^{\left(\frac{2r_1}{\sqrt{2}},\frac{2r_1}{\sqrt{2}}\right)}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{\frac{r_1}{\sqrt{2}}}^{\frac{2r_1}{\sqrt{2}}}\frac{K}{\sqrt{2}}x^{-2}dx$$

$$= \frac{K}{\sqrt{2}}\left[-\frac{1}{x}\right]_{\frac{r_1}{\sqrt{2}}1}^{\frac{2r_1}{\sqrt{2}}} = \frac{K}{\sqrt{2}}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2r_1}+\frac{\sqrt{2}}{r_1}\right) = \frac{K}{2r_1}$$

・C_3 上、直線 $\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ は、$x=0$ から

$$\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = K\left(y^2\right)^{-\frac{3}{2}}\left(y\boldsymbol{j}\right)\cdot dy\boldsymbol{j}$$

$$= Ky^{-2}dy$$

$$\int_{C_3}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = K\int_{r_1}^{2r_1}y^{-2}dy = K\left[\frac{y^{-2+1}}{-2+1}\right]_{r_1}^{2r_2} = K\left(-\frac{1}{2r_1}+\frac{1}{r_1}\right) = \frac{K}{2r_1}$$

以上より、$\int_{C_1}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_2}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_3}\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{r_1}^{r_2}dr/r^2$ となる)

問 5.10

問 5.9 を参照する。

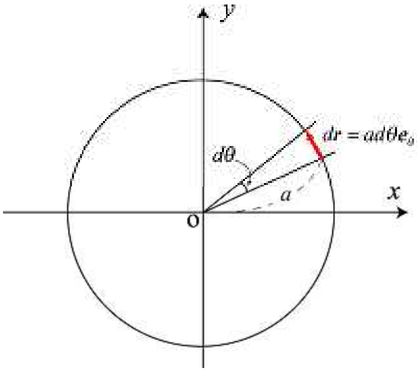
（1）$W=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\nabla U\cdot d\boldsymbol{r}=-\left\{U(\mathrm{Q})-U(\mathrm{P})\right\}=U(\mathrm{P})-U(\mathrm{Q})$

（2）$\boldsymbol{F}=q\boldsymbol{E}=-q\nabla\phi=-q\nabla\left(\dfrac{K}{r}\right)$

$$W=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\boldsymbol{F}\cdot d\boldsymbol{r}=-\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}q\nabla\left(\frac{K}{r}\right)\cdot d\boldsymbol{r}=-q\left\{\frac{K}{r_{\mathrm{Q}}}-\frac{K}{r_{\mathrm{P}}}\right\}=qK\left\{\frac{1}{r_{\mathrm{P}}}-\frac{1}{r_{\mathrm{Q}}}\right\}$$

問 5.11

（1）問 5.6（5）**と同様。**



（2）

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + 0\boldsymbol{k} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$$
$$= a\cos\theta\boldsymbol{i} + a\sin\theta\boldsymbol{j} = a\left(\cos\theta\boldsymbol{i} + \sin\theta\boldsymbol{j}\right) = a\boldsymbol{e}_r$$

（3） $d\boldsymbol{r} = ad\theta\boldsymbol{e}_\theta$、$\boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{r} = a\boldsymbol{e}_r \times ad\theta\boldsymbol{e}_\theta = a^2 d\theta\left(\boldsymbol{e}_r \times \boldsymbol{e}_\theta\right) = a^2 d\theta\boldsymbol{e}_z = a^2 d\theta\boldsymbol{k}$

（4） $\int_C \boldsymbol{A}\times d\boldsymbol{r} = \left(\int_0^{2\pi} a^2 d\theta\right)\boldsymbol{e}_z = 2\pi a^2\boldsymbol{k}$

５．２

問 5.12

$$\boldsymbol{h} = h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} (-\boldsymbol{k})$$

（１）

$$\Phi_{W_f} = \int_S \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} (-\boldsymbol{k}) \cdot dxdy (-\boldsymbol{k}) = \int_S h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} dxdy$$

$$= \int_0^a \int_0^b h_0 \left\{ 1 - \left(\frac{x}{a} \right)^2 \right\} dxdy$$

面S ：$0 \le x \le a, \quad 0 \le y \le b$

（２）

$$\Phi_{W_f} = \int_0^b \int_0^a h_0 \left\{ 1 - \frac{x^2}{a^2} \right\} dxdy = \int_0^b \left[h_0 x - \frac{h_0}{a^2} \frac{x^3}{3} \right]_0^a dy = \int_0^b \left(h_0 a - \frac{h_0 a}{3} \right) dy$$

$$= \left[h_0 ay - \frac{h_0 a}{3} y \right]_0^b = \left(abh_0 - \frac{abh_0}{3} \right) - 0 = \frac{2}{3} abh_0$$

（３）$a = 1, \quad b = 2, \quad h_0 = 60$ より、$\Phi_{W_f} = \dfrac{2}{3} abh_0 = \dfrac{2}{3} \cdot 1 \cdot 2 \cdot 60 = 80$、よって８０W

（４）$\boldsymbol{h} = h(-\boldsymbol{k})$である。

$$\Phi_{W_f} = \int_S \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{s} = \int_S h(-\boldsymbol{k}) \cdot dxdy (-\boldsymbol{k}) = \int_S h(-\boldsymbol{k}) \cdot (-\boldsymbol{k}) dxdy = \int_S hdxdy$$

$$= h \int_0^a dx \int_0^b dy = abh$$

問 5.13

（1）

$$W_f = \int_S \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \left(h_x \boldsymbol{i} + h_y \boldsymbol{j} + h_z (-\boldsymbol{k}) \right) \cdot dxdy\left(-\boldsymbol{k}\right) = \int_S h_z \left(-\boldsymbol{k}\right) \cdot \left(-\boldsymbol{k}\right) dxdy$$

$$= h_0 \int_0^a dx \int_0^b \exp\left(-y \big/ b \right) dy = h_0 a \left[-b \exp\left(-y \big/ b \right) \right]_0^b = ah_0 \left\{ -be^{-1} + be^0 \right\}$$

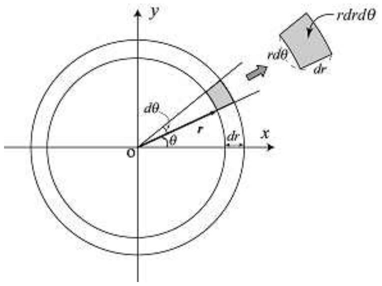
$$= ah_0 \left(b - \frac{b}{e} \right) = h_0 ab \left(1 - \frac{1}{e} \right)$$

（2）$h_0 = 100$、$a = 1$、$b = 2$、$e \approx 2.7$ のとき　$W_f \approx 126\,\mathrm{W}$

問 5.14

（1）下の図で微小面積を近似的に台形とみなすと

$$S = \frac{1}{2}\left\{rd\theta + \left(r + dr\right)d\theta\right\}dr = \left(rd\theta + drd\theta\right) \simeq rd\theta dr$$



（2）z 軸方向になるので $\boldsymbol{k}$

（3） $\boldsymbol{f} = \rho \boldsymbol{v} = \rho v_z \boldsymbol{k}$， $d\boldsymbol{S} = rdrd\theta \boldsymbol{k}$ より

$$\begin{aligned}
\int_S \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} &= \int_S \rho v_z \boldsymbol{k} \cdot rdrd\theta \boldsymbol{k} = \int_S \rho v_z \left(\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\right) rdrd\theta = \rho \int_0^a v_z rdr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \rho \int_0^a v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) rdr \int_0^{2\pi} d\theta = \rho v_0 \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{a^2}\frac{r^3}{3}\right]_0^a 2\pi \\
&= 2\pi \rho v_0 a \left(\frac{a}{2} - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}\pi \rho v_0 a \left(3a - 2\right)
\end{aligned}$$

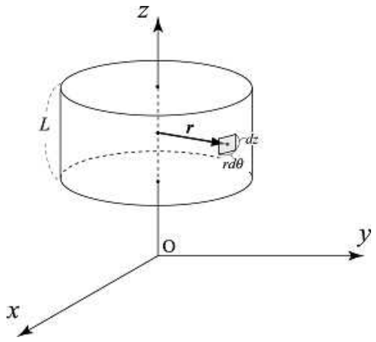
（4）

$$\begin{aligned}
\Phi_{M_f} &= \int_S \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho v_z rdrd\theta = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho v_0 \left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right) rdrd\theta \\
&= \rho v_0 \int_0^{2\pi} \int_0^a \left(r - \frac{r^3}{a^2}\right) drd\theta = \rho v_0 \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} - \frac{1}{a^2}\frac{r^4}{4}\right]_0^a d\theta \\
&= \rho v_0 \left(\frac{a^2}{2} - \frac{1}{a^2}\frac{a^4}{4}\right) 2\pi = \rho v_0 \frac{a^2}{4} 2\pi = \frac{\pi a^2 \rho v_0}{2}
\end{aligned}$$

（5）$\Phi_{M_f} = \int_0^a \int_0^{2\pi} \rho v_z rdrd\theta = \Phi_{M_f} = \int_0^{2\pi} \int_0^a rdrd\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2}\right]_0^a d\theta = 2\pi \frac{a^2}{2} = \pi a^2$

問 5.15

（1）図５．１５に示した微小面積を考える。この面の法線ベクトルは、r 方向を向き、面積は $rd\theta dz$ 。



$$d\boldsymbol{S} = \frac{\boldsymbol{r}}{r} rd\theta dz = \boldsymbol{n} dS$$

（2）

$$d\Phi_{M_f} = \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{S} = \rho \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{S} = \rho \boldsymbol{v} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} rd\theta dz = \rho \frac{K}{r^2} \boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \frac{\boldsymbol{1}}{r} rd\theta dz$$

$$= \rho \frac{K}{r^2} \left(\boldsymbol{r} \cdot \boldsymbol{r} \right) d\theta dz = \rho \frac{K}{r^2} r^2 d\theta dz = \rho K d\theta dz$$

$\therefore f(r) rd\theta dz$ [ただし、 $f(r) = \rho(K/r)$]、

（3）

（2）を図５．１５の側面全体にわたって積分すると、

$$\Phi_{M_f} = \int_z^{z+L} \int_0^{2\pi} \rho K d\theta dz = \rho K \int_z^{z+L} \int_0^{2\pi} d\theta dz = 2\pi\rho K \left\{ \left(z + L \right) - z \right\} = 2\pi L \rho K \text{。}$$

上面、底面は流れに平行であり、面積分には寄与しない。また、定常状態では、湧き出し量と面を横切る流束とは等しくなっているから、

$M_f = \dfrac{\Phi_{M_f}}{L}$ （M_f は単位長さ当りの湧き出し量であることに注意)。

$$\therefore M_f = \frac{2\pi L \rho K}{L}$$

これから、$K = \dfrac{M_f}{2\pi\rho}$ となる。

（4） $d\Phi_{M_f} = \rho \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{S} = \rho K \dfrac{\sin\theta}{r} \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} \cdot \dfrac{\boldsymbol{r}}{r} rd\theta dz = \rho K \sin\theta \dfrac{r^2}{r} rd\theta dz = \rho K r \sin\theta d\theta dz$

$$\Phi_{M_f} = \int_z^{z+L} \int_0^{2\pi} \rho K \sin\theta d\theta dz = \rho K \int_z^{z+L} \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta dz = 0 \quad \because \int_0^{2\pi} \sin\theta d\theta = 0$$

問 5.16

（1）図５．１７を参照して、半径aの球面上では位置ベクトルの大きさは、 $r=a$、

また、$\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}=\dfrac{\boldsymbol{a}}{a}$ は径方向の単位ベクトルを表す。

$\boldsymbol{E}(x,y,z)=\dfrac{K}{r^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$ より $\left|\boldsymbol{E}\right|=\dfrac{K}{r^2}$ なので $r=a$ のとき、ベクトル$\boldsymbol{E}$の

大きさは、$\left|\boldsymbol{E}\right|=\dfrac{K}{a^2}$ よって球座標系で、球面上の点(a,θ,ϕ)におけるベクト

ル$\boldsymbol{E}$は

$$\boldsymbol{E}=\frac{K}{a^2}\frac{\boldsymbol{a}}{a}$$

となる。

（2）図５．１８より$dS=a^2\sin\theta d\theta d\phi$。また、微小面積要素の中心の位置ベクトル

は$\boldsymbol{a}$であるので、微小面積要素の表面に垂直方向の位置ベクトルは$\dfrac{\boldsymbol{a}}{a}$である。

よって、$d\boldsymbol{S}=dS(\dfrac{\boldsymbol{a}}{a})$

（3）

$$\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{K}{a^2}a^2\sin\theta d\theta d\phi=K\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi=K\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}d\phi$$
$$=2K\int_0^{2\pi}d\phi=4\pi K$$

（これから、ベクトル場$\boldsymbol{E}$がこの問のように与えられるとき、その球面上の面積分は、球面の半径aに依存しない。これは、$\boldsymbol{E}$の大きさが、r^2に比例して減少するのに対して、球の面積はr^2で増大することによる。重要な結果である。）

（4）

$$\int_S\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{S}=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{K\cos\theta\cos\phi}{a^2}\frac{\boldsymbol{a}}{a}\cdot dS(\frac{\boldsymbol{a}}{a})=\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{K\cos\theta\cos\phi}{a^2}\frac{(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{a})}{a^2}a^2\sin\theta d\theta d\phi$$
$$=K\int_0^{2\pi}\cos\phi\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta d\phi$$
$$=\frac{K}{2}\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin2\theta d\theta d\phi=\frac{K}{2}\left[\frac{-\cos2\theta}{2}\right]_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\cos\phi d\phi$$
$$=-\frac{K}{4}(-2)\cdot0=0$$

５．３

問 5.17

ガウスの定理より

“（表面を通過する流体の質量流束）＝（体積中における流体湧き出し量の合計）”であるので　１ｋｇ

問 5.18

（１）問 5.16（３）を参考にする。$\boldsymbol{E} \to \boldsymbol{E} \Leftrightarrow \rho \boldsymbol{v} = \rho \dfrac{K}{r^2}\left(\dfrac{\boldsymbol{r}}{r}\right)$と考えるとよい。

$\therefore 4\pi\rho K$

（２）ガウスの定理より　$\Phi_{M_f} = M_f$

$$4\pi\rho K = M_f \quad \therefore K = \frac{M_f}{4\pi\rho}$$

考え方は、前節問４（３）と同じ。定常状態では、点源における単位時間当たりの湧き出し量と球面を横切る流束は釣り合っている。

（３）（２）より$v = M_f/(4\pi\rho r^2)$、水の密度$\rho = 10^3\,\mathrm{kg/m^3}$

流速の大きさ

$$v = |\boldsymbol{v}| = \frac{K}{r^2}\left|\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right| = \frac{K}{r^2} = \frac{1}{r^2}\frac{M_f}{4\pi\rho} = \frac{1}{r^2\rho} = \frac{1}{(0.1)^2 \times 10^3} = 0.1 \quad \mathrm{m/s}$$

（４）問 4.21（２）と同様に考えて

$$\nabla \cdot \left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \frac{3r^2 - 3\left(x^2 + y^2 + z^2\right)}{r^5} = 0$$　を利用する。

$$\boldsymbol{v} = \frac{K\boldsymbol{r}}{r^3}$$

$$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = \rho K\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = \rho K\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r^3}\right)$$

$$= \rho K\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right\}$$

$$= \rho K\left\{\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right\} = \rho K\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5} = 0$$

意味：原点以外で湧き出しがない。

（５）原点を含まない任意の閉局面についてガウスの定理を適用し、前問（４）

$\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v}) = 0$ **を用いる。** $\Phi_{M_f} = \int_S \rho\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})dV = 0$

問 5.19

（１）点源など

（２）

$$\boldsymbol{E} = \frac{K\boldsymbol{E}}{r^3}$$

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{E}) = K\nabla\cdot\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right) = K\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{r^3}\right)$$

$$= K\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{y}{r^3}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{z}{r^3}\right)\right\} = K\left\{\frac{r^2-3x^2}{r^5}+\frac{r^2-3y^2}{r^5}+\frac{r^2-3z^2}{r^5}\right\}$$

$$= K\frac{3r^2-3\left(x^2+y^2+z^2\right)}{r^5} = 0$$

（３）

$$\int_{V'} \nabla\cdot\boldsymbol{E}dV = \int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$0 = \int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} + \int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_S \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot\left(-\boldsymbol{n}\right)dS = \int_{S'} \boldsymbol{E}\cdot\boldsymbol{n}dS = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{K}{a^3}\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{a}a^2\sin\theta d\theta d\phi$$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\frac{K}{a^3}\boldsymbol{a}\cdot\frac{\boldsymbol{a}}{a}a^2\sin\theta d\theta d\phi = K\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta d\phi = K\int_0^{2\pi}\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}d\phi$$

$$= 2K\int_0^{2\pi}d\phi = 4\pi K$$

問 5.20

$$\boldsymbol{h} = h(r)\boldsymbol{e}_r$$

（1） $S_{total} = \int_V S_W dV = S_W \int_0^L \pi r^2 dL = S_W V \quad \left(V = \pi r^2 L\right) \cdots ①$

（2）

$$\Phi_{W_f} = \int_{Sin} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_{Sin} h(r)\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r dS = \int_0^L h(r)\left(\boldsymbol{e}_r \cdot \boldsymbol{e}_r\right) 2\pi r dL$$

$$= 2\pi r h(r) \int_0^L dL = 2\pi r L h(r)$$

（3）ガウスの定理より(5.39)式は、

$$\int_V S_W dV = \int_{Sin} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{S}$$

$$S_W V = 2\pi r L h(r)$$

$$h(r) = \frac{S_W V}{2\pi r L} = \frac{S_W \pi r^2 L}{2\pi r L} = \frac{1}{2} S_W r$$

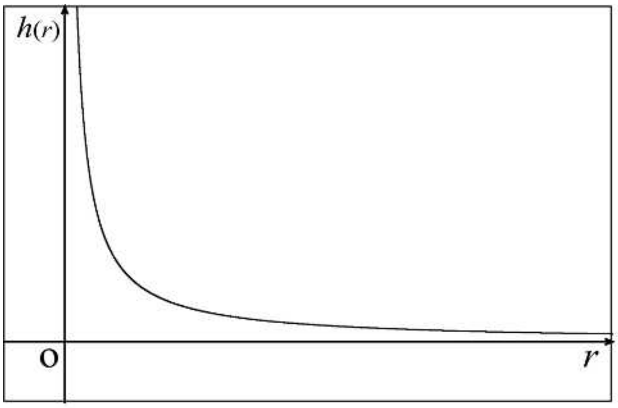
（4）①式で $r = a$ とする。$S_{total} = S_W \pi a^2 L$

$$\Phi_{W_f} = \int_{Sin} \boldsymbol{h} \cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi r L h(r)$$

$$2\pi r L h(r) = S_W \pi a^2 L \qquad \therefore h(r) = \frac{1}{2} S_W a^2 \frac{1}{r}$$

（5） $h(r) = \frac{1}{2} S_W r = \frac{1}{2} r$

$$h(r) = \frac{1}{2} S_W a^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{2}\left(0.1\right)^2 \frac{1}{r} = \frac{1}{200} \frac{1}{r}$$



問 5.21

（1）(4.71)**式より** $\nabla\cdot(\rho\boldsymbol{v})=\rho(\nabla\cdot\boldsymbol{v})+(\nabla\rho)\cdot\boldsymbol{v}$

$$\boldsymbol{A}_1=u\nabla v$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1=u(\nabla\cdot\nabla v)+(\nabla u)\cdot\nabla v=u\nabla^2 v+(\nabla u)\cdot\nabla v$$

同様に　$\nabla\cdot\boldsymbol{A}_2=v\nabla^2 u+(\nabla v)\cdot\nabla u$

（2）

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1 dV=\int_V\nabla\cdot(u\nabla v)dV=\int_S(u\nabla v)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\int_V\nabla\cdot\boldsymbol{A}_2 dV=\int_V\nabla\cdot(v\nabla u)dV=\int_S(v\nabla u)\cdot d\boldsymbol{S}$$

（3）

$$\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_1)dV=\int_V\left(u\nabla^2 v+\nabla u\cdot\nabla v\right)dV=\int_S(u\nabla v)d\boldsymbol{S}$$

$$\int_V(\nabla\cdot\boldsymbol{A}_2)dV=\int_V\left(v\nabla^2 u+\nabla v\cdot\nabla u\right)dV=\int_S(v\nabla u)d\boldsymbol{S}$$

辺々引き算して　$\therefore\int_V\left(u\nabla^2 v-v\nabla^2 u\right)dV=\int_S(u\nabla v-v\nabla u)d\boldsymbol{S}$

５．４

問 5.22

（１）$C_1 : d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i}$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot dx\boldsymbol{i} = \int_0^1 A_x dx$$

$C_2 : d\boldsymbol{r} = dy\boldsymbol{j}$

$$\int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot dy\boldsymbol{j} = \int_0^1 A_y dy$$

$C_3 : d\boldsymbol{r} = -dx\boldsymbol{i}$

$$\int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-dx\boldsymbol{i}\right) = -\int_0^1 A_x dx = \int_1^0 A_x dx$$

$C_4 : d\boldsymbol{r} = -dy\boldsymbol{j}$

$$\int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-dy\boldsymbol{j}\right) = -\int_0^1 A_y dy = \int_1^0 A_y dy$$

注意：C_3、C_4 については、積分の上限、下限に注意する必要がある。上のように変位をベクトルとして扱い、その向き（正、負）まで考えた場合には、積分の上限、下限は変位が正の向きとした場合のままでよい。

（２）$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$

$C_1 : y = 0 \therefore A_x = 0$

$C_2 : x = 1 \therefore A_y = \omega$

$C_3 : y = 1 \therefore A_x = -\omega$

$C_4 : x = 0 \therefore A_y = 0$

$$\therefore \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0 + \int_0^1 \omega dy + \int_1^0 (-\omega)\, dx + 0 = \omega + \omega = 2\omega$$

問 5.23

$C_1 : d\boldsymbol{r} = -dx\boldsymbol{i}$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-dx\boldsymbol{i}\right) = -\int_0^1 A_x dx = \int_1^0 A_x dx$$

C_1 上では、$y=0$ であるから $A_x = 0$ $\quad \therefore \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

$C_2 : d\boldsymbol{r} = dy\boldsymbol{j}$

$$\int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot dy\boldsymbol{j} = \int_0^1 A_y dy$$

C_2 上では、$x=0$ であるから $A_y = 0$ $\quad \therefore \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

$C_3 : d\boldsymbol{r} = dx\boldsymbol{i}$

$$\int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot dx\boldsymbol{i} = \int_0^1 A_x dx$$

C_3 上では、$y=1$ であるから $A_x = -\omega$ $\quad \therefore \int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\omega\int_0^1 dx = -\omega$

$C_4 : d\boldsymbol{r} = -dy\boldsymbol{j}$

$$\int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(A_x\boldsymbol{i} + A_y\boldsymbol{j} + A_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(-dy\boldsymbol{j}\right) = -\int_0^1 A_y dy = \int_1^0 A_y dy$$

C_4 上では、$x=1$ であるから $A_y = \omega$ $\quad \therefore \int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \omega\int_1^0 dx = -\omega$

$$\therefore \oint_{-C} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\omega - \omega = -2\omega$$

問 5.24

（1）C_1 上では、$y=0$ より $A_x=0$ $\therefore \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 A_x dx = 0$

C_2 上では、$x=1$ より $A_y=-\omega$ $\therefore \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 A_y dy = -\omega\int_0^1 dy = -\omega$

C_3 上では、$y=1$ より $A_x=\omega$ $\therefore \int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^0 A_x dx = \omega\int_1^0 dx = -\omega$

C_4 上では、$x=0$ より $A_y=0$ $\therefore \int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_1^0 A_y dy = 0$

$\therefore \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\omega-\omega = -2\omega$

（2）$\boldsymbol{A} = \nabla\varphi = \nabla\left(x^2+y^2\right) = 2x\boldsymbol{i} + 2y\boldsymbol{j}$　したがって　$A_x = 2x, A_y = 2y$

C_1 上では、$y=0$ より

$A_x = 2x$ $\therefore \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 A_x dx = 2\int_0^1 xdy = 1$

C_2 上では、$x=1$ より

$A_x = 2, A_y = 2y$ $\therefore \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(2\boldsymbol{i}+2y\boldsymbol{j}\right)\cdot dy\boldsymbol{j} = \int_0^1 A_y dy = 2\int_0^1 ydy = 1$

C_3 上では、$y=1$ より

$A_x = 2x, A_y = 2$ $\therefore \int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^1 \left(2x\boldsymbol{i}+2\boldsymbol{j}\right)\cdot\left(-dx\boldsymbol{i}\right) = -\int_0^1 A_x dx = -2\int_0^1 xdx = -1$

C_4 上では、$x=0$ より

$A_y = 2y$ $\therefore \int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_0^1 A_y dy = -2\int_0^1 ydy = -1$

$\therefore \oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 1+1+\left(-1\right)+\left(-1\right) = 0$

（3）$A_x = -\frac{1}{2}B_0 y, A_y = \frac{1}{2}B_0 x$

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{B} &= \nabla \times \boldsymbol{A} \\
&= \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k} \\
&= \left\{ \frac{1}{2} B_0 - \left(-\frac{1}{2} B_0 \right) \right\} \boldsymbol{k} \\
&= B_0 \boldsymbol{k}
\end{aligned}
$$

$\boldsymbol{B}$ は常に積分路に垂直

$$\therefore \oint_C \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = 0$$

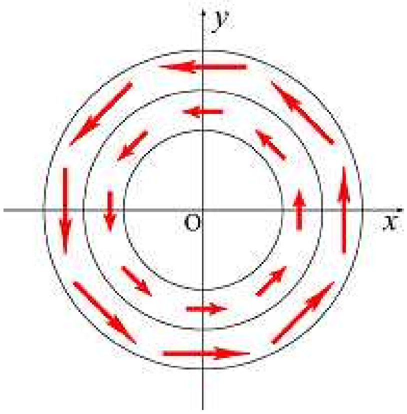
問 5.25

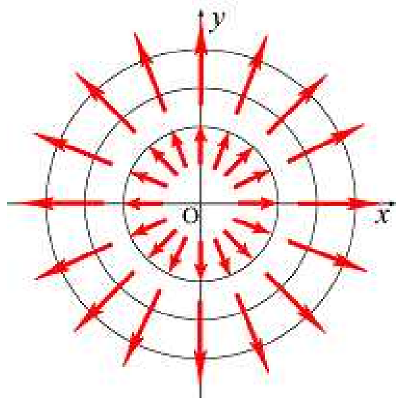
（1）速度場１：$\boldsymbol{v}(x, y) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = -\omega y\boldsymbol{i} + \omega x\boldsymbol{j} = (-\omega y, \omega x)$

速度場２：$\boldsymbol{v}(x, y) = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = \omega x\boldsymbol{i} + \omega y\boldsymbol{j} = (\omega x, \omega y)$

$(x, y) = (1, 1)$ のとき、$\boldsymbol{v} = (-\omega, \omega)$

他いくつかの座標を代入し、位置ベクトルを図示する。





（2）速度場1：

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1} v_x dx$$

C_1 上では、$y=-1$ より、$v_x = \omega$ $\therefore \oint_{C} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1} \omega dx = 2\omega$

$$\oint_{C_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = -\int_{-1}^{1} v_y dy$$

C_2 上では、$x=1$ より、$v_y = \omega$ $\therefore \oint_{C_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1} \omega dx = 2\omega$

$$\oint_{C_3} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1} v_x dx$$

C_3 上では、$y=1$ より、$v_x = -\omega$ $\therefore \oint_{C_3} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1} (-\omega)\, dx = \int_{-1}^{1} \omega dx = 2\omega$

$$\oint_{C_4} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1} v_y dy$$

C_4 上では、$x=-1$ より、$v_y = -\omega$ $\therefore \oint_{C_4} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1} (-\omega)\, dy = \int_{-1}^{1} \omega dy = 2\omega$

以上より　$2\omega \times 4 = 8\omega$

速度場2：

$$\oint_{C_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1} v_x dx = \int_{-1}^{1} \omega x dx = \omega \int_{-1}^{1} x dx = 0$$

$$\oint_{C_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1} v_y dy = \int_{-1}^{1} \omega y dy = \omega \int_{-1}^{1} y dy = 0$$

$$\oint_{C_3} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1} v_x dx = \int_{1}^{-1} \omega x dx = \omega \int_{1}^{-1} x dx = 0$$

$$\oint_{C_4} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1} v_y dy = \int_{1}^{-1} \omega y dy = \omega \int_{1}^{-1} y dy = 0$$

以上より 0

問 5.26

$$\boldsymbol{E}=-\nabla\phi=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)$$

$$d\boldsymbol{r}=dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}&=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i}+\frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}+\frac{\partial\phi}{\partial z}\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(dx\boldsymbol{i}+dy\boldsymbol{j}+dz\boldsymbol{k}\right)\\&=-\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}dx+\frac{\partial\phi}{\partial y}dy+\frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right)\qquad\leftarrow\text{(4.3)式より}\\&=-d\phi\end{aligned}$$

C を２点 P、Q を結ぶ任意の曲線と考えたとき

$$\oint_C\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=\int_{\mathrm{P}}^{\mathrm{Q}}\left(-d\phi\right)=-\left\{\phi\left(\mathrm{Q}\right)-\phi\left(\mathrm{P}\right)\right\}=\phi\left(\mathrm{P}\right)-\phi\left(\mathrm{Q}\right)$$

C が閉曲線であるとき２点 P、Q は一致するので、$\phi\left(\mathrm{P}\right)-\phi\left(\mathrm{Q}\right)=0$

$$\therefore\oint_C\boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

問 5.27

図５．３１参照する。C_1、C_2 に共通な積分路は、始点と終点が同じで、向きが逆のため、互いに打ち消す。

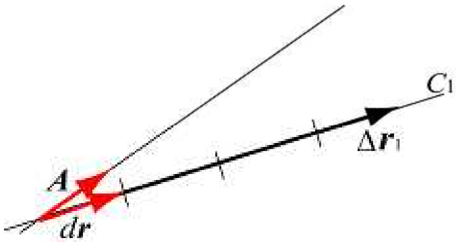
C_0、$-C_0$ に沿った線積分は

$\oint_{C_0}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}+\oint_{-C_0}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=\oint_{C_0}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}-\oint_{C_0}\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=0$ より打ち消すことが確認できる。

$$\therefore\oint_C\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=0$$

問 5.28

（1）図を参考にすると



$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_1$$

$$\boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_1 = \left(A_x(x,y)\boldsymbol{i} + A_y(x,y)\boldsymbol{j}\right)\cdot(\Delta x\boldsymbol{i}) = A_x(x_1,y_1)\Delta x$$

$$x_1 = x$$

$$y_1 = y - \frac{\Delta y}{2}$$

$$\therefore \int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx A_x(x_1,y_1)\Delta x \approx A_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$$

$$A_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}\right) \approx A_x(x,y) + \frac{\partial A_x}{\partial y}\left(-\frac{\Delta y}{2}\right) = A_x(x,y) - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

以上より

$$\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx A_x\left(x, y-\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x \approx \left\{A_x(x,y) - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\right\}\Delta x$$

（2）

C_2 **について、** $\Delta\boldsymbol{r}_2 = \Delta y\boldsymbol{j}$

$$\int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx \boldsymbol{A}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_2 = A_y(x_2,y_2)\Delta y$$

$$x_1 = x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$y_1 = y$$

$$\therefore \int_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx A_y(x_2,y_2)\Delta y \approx A_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y$$

$$A_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y\right) \approx A_y(x,y) + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore \oint_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \left\{ A_y\left(x,y\right) + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \right\}\Delta y$$

C_3 について、$\Delta \boldsymbol{r}_3 = -\Delta x \boldsymbol{i}$

$$x_3 = x$$

$$y_3 = y + \frac{\Delta y}{2}$$

$$\therefore \int_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx - A_x\left(x_3, y_3\right)\Delta x \approx -A_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right)\Delta x$$

$$A_x\left(x, y+\frac{\Delta y}{2}\right) \approx A_x\left(x,y\right) + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}$$

$$\therefore \oint_{C_3} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\left\{ A_x\left(x,y\right) + \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2} \right\}\Delta x$$

C_4 について、$\Delta \boldsymbol{r}_4 = -\Delta y \boldsymbol{j}$

$$x_4 = x + \frac{\Delta x}{2}$$

$$y_4 = y$$

$$\therefore \int_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} \approx - A_y\left(x_4, y_4\right)\Delta y \approx -A_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y\right)\Delta y$$

$$A_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y\right) \approx A_y\left(x,y\right) - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}$$

$$\therefore \oint_{C_4} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = -\left\{ A_y\left(x,y\right) - \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2} \right\}\Delta y$$

（3）（2）の和をとる

$$\begin{aligned}\int_{C_1} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} + \oint_{C_2} \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} &= A_x\left(x,y\right)\Delta x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\Delta x + A_y\left(x,y\right)\Delta y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\Delta y \\ &\quad - A_x\left(x,y\right)\Delta x - \frac{\partial A_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}\Delta x - A_y\left(x,y\right)\Delta y + \frac{\partial A_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\Delta y \\ &= \frac{\partial A_y}{\partial x}\Delta x \Delta y - \frac{\partial A_x}{\partial y}\Delta y \Delta x = \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x \Delta y\end{aligned}$$

（4） $\nabla\times\boldsymbol{A}=\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial A_x}{\partial z}-\frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}=\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

（5） $\nabla\times\boldsymbol{A}=0\boldsymbol{i}+0\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}$

$$\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)\cdot\Delta x\Delta y\boldsymbol{k}=\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}\ /\ \Delta x\Delta y\boldsymbol{k}=\Delta S\boldsymbol{k}=\Delta\boldsymbol{S}$$

$$\therefore\left(\nabla\times\boldsymbol{A}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\oint_C\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r}$$

５．５

問 5.29

【１】

（１）

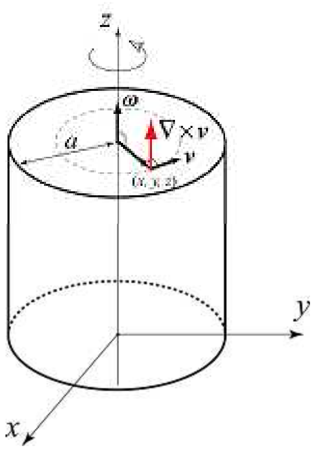
$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{r} = \omega\boldsymbol{k}\times(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k})\\
&= \omega x(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{i})+\omega y(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{j})+\omega z(\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{k})\\
&= \omega x\boldsymbol{j}-\omega y\boldsymbol{i}\\
&= -y\omega\boldsymbol{i}+x\omega\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

よって z 成分はない。
あるいは、"剛体かつ z 軸回りの回転であるから、剛体の各点の運動は (x,y) 平面内になる"などの直感的な説明でもよい。

（２）$|\boldsymbol{v}|=v=\sqrt{(-y\omega)^2+(x\omega)^2}=\omega\sqrt{x^2+y^2}$

（３）$\nabla\times\boldsymbol{v}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ -y\omega & x\omega & 0\end{vmatrix}=\left\{\dfrac{\partial}{\partial x}(x\omega)-\dfrac{\partial}{\partial y}(-y\omega)\right\}\boldsymbol{k}=(\omega+\omega)\boldsymbol{k}=2\omega\boldsymbol{k}$

z 方向を向く。



（４）（２）より $|\boldsymbol{v}|=v=\omega\sqrt{x^2+y^2}$， $\sqrt{x^2+y^2}=r$ より $v=r\omega$

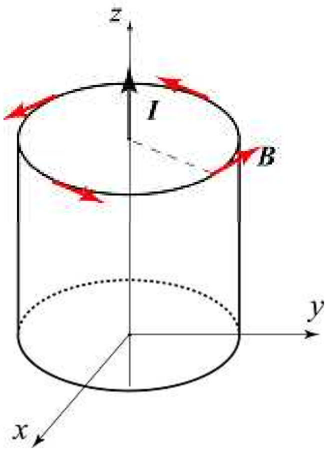
（５）（３）より　$\nabla\times\boldsymbol{v}=2\omega\boldsymbol{k}$

【2】

（1） $j_e = \dfrac{I}{\pi a^2}$

（2） $\boldsymbol{B}$ は、I を取り巻く同心円の接線方向を向く

$\nabla \times \boldsymbol{B} = K\boldsymbol{j}_e = Kj_e\boldsymbol{k}$，　$\boldsymbol{B}$ は【1】の $\boldsymbol{v}$ に相当する。



問 5.30

（1）

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} B(r)\boldsymbol{e}_r\cdot\boldsymbol{e}_r r d\theta$$

$$= B(r) r\int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi B(r) r$$

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S K\boldsymbol{j}_e\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^r K\frac{I}{\pi a^2}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} r d\theta dr$$

$$= K\frac{I}{\pi a^2}\int_0^r (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}) r\int_0^{2\pi} d\theta dr = \frac{KI}{a^2}2\frac{r^2}{2} = \frac{KI}{a^2}r^2$$

$\therefore 2\pi B(r) r = \frac{KI}{a^2}r^2$　以上より $B(r) = \frac{KI}{2\pi a^2}r = K\left(\frac{I}{2\pi a}\right)\left(\frac{r}{a}\right)$

（2）$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = 2\pi B(r) r$

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{B})\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S K\boldsymbol{j}_e\cdot d\boldsymbol{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^r \frac{KI}{\pi a^2}\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k} r d\theta dr$$

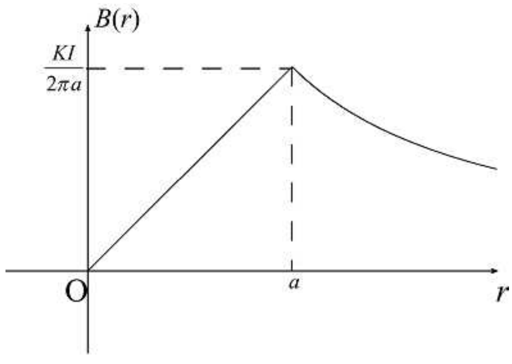
$$= \frac{KI}{\pi a^2}\int_0^a (\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{k}) r\int_0^{2\pi} d\theta dr = \frac{KI}{\pi a^2}2\pi\frac{a^2}{2} = \frac{KI}{a^2}a^2 = KI$$

$2\pi B(r) r = KI$

$\therefore B(r) = \frac{KI}{2\pi r}$

（3）$0 < r < a$　において　$B(r) = \frac{KI}{2\pi a^2}r$

$r > a$　において　$B(r) = \frac{KI}{2\pi}\left(\frac{1}{r}\right)$



$\boxed{\textbf{問 5.31}}$

ストークスの定理より

$$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)\cdot d\boldsymbol{S} = -\frac{\partial\Phi_B}{\partial t}$$

$$\frac{\partial\Phi_B}{\partial t} = \frac{\partial\left(\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S}\right)}{\partial t} = \int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\therefore \int_S \left(\nabla\times\boldsymbol{E}\right)\cdot d\boldsymbol{S} = -\int_S \frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_S \left(-\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}\right)\cdot d\boldsymbol{S}$$

$$\therefore \nabla\times\boldsymbol{E} = -\frac{\partial\boldsymbol{B}}{\partial t}$$

問 5.32

(1) $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \omega \boldsymbol{k} \times \left(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k} \right) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ x & y & z \end{vmatrix} = -\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j}$

(2) $\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix}$

$$= \left(0 - \frac{\partial(\omega x)}{\partial z} \right) \boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial(-\omega y)}{\partial z} - 0 \right) \boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial(\omega x)}{\partial x} - \frac{\partial(-\omega y)}{\partial y} \right) \boldsymbol{k} = (\omega + \omega) \boldsymbol{k} = 2\omega \boldsymbol{k}$$

(3) $\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S 2\omega \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{S}$

面積ベクトルの定義を考えると $d\boldsymbol{S} = dxdy\boldsymbol{k}$

$\int_S 2\omega \boldsymbol{k} \cdot d\boldsymbol{S} = \int_S 2\omega \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} dxdy = 2\omega A$

(4) ストークスの定理より $\int_S (\nabla \times \boldsymbol{v}) \cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} = 2\omega A$

(5)

$$\begin{aligned} 2\omega A &= \oint_C \boldsymbol{v} \cdot d\boldsymbol{r} \\ &= \oint_C \left(-\omega y \boldsymbol{i} + \omega x \boldsymbol{j} \right) \cdot \left(dx\boldsymbol{i} + dy\boldsymbol{j} + dz\boldsymbol{k} \right) \\ &= \oint_C \left(-\omega y dx + \omega x dy \right) \\ &= \omega \oint_C \left(x dy - y dx \right) \end{aligned}$$

$$\therefore A = \frac{1}{2} \oint_C \left(x dy - y dx \right)$$

問 5.33

$\boldsymbol{A} \perp d\boldsymbol{r}$ の場合を考えると $\boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

ベクトル $\boldsymbol{A}$ にストークスの定理を適用し、

$$\oint_C \boldsymbol{A}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

よって $\nabla\times\boldsymbol{A} \perp d\boldsymbol{r}$ または $\nabla\times\boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$ なので $\nabla\times\boldsymbol{A}$ は面に平行なベクトル、またはゼロベクトルである

問 5.34

ストークスの定理から

$$\int_S (\nabla\times\nabla\varphi)\cdot d\boldsymbol{S} = \oint_C \nabla\varphi\cdot d\boldsymbol{r}$$

問 5.26 と同様に $\nabla\varphi = \boldsymbol{E}$ と考えると　$\oint_C \boldsymbol{E}\cdot d\boldsymbol{r} = 0$

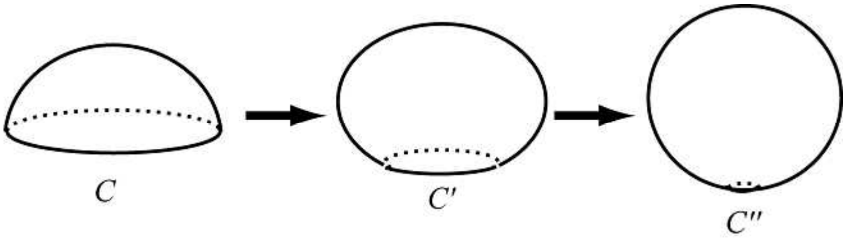
問 5.35

（1）下図のように、まず、閉曲線 C で囲まれる開曲面を考える。

問 5.33 と同様にこの閉曲面に常に垂直であるベクトル $\boldsymbol{A}$ を考えると、

$$\int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$$

次に、この閉曲線を C' 、さらには、C'' のように絞っていくことを考える。最後には、閉曲線の開口部はゼロとなり、曲面は閉じた曲面にすることができる。



（2）ガウスの定理より

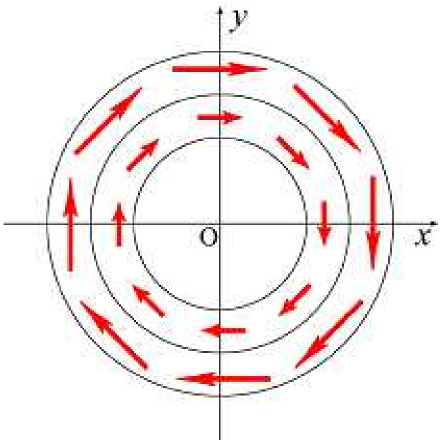
$\int_S \boldsymbol{B}\cdot d\boldsymbol{S} = \int_V \nabla\cdot\boldsymbol{B}dV$　これに $\boldsymbol{B} = \nabla\times\boldsymbol{A}$ を代入して

$\int_V \nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A})dV = \int_S (\nabla\times\boldsymbol{A})\cdot d\boldsymbol{S} = 0$　←（1）を利用した。

ゆえに　$\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{A}) \equiv 0$

問 5.36

（1）問 5.25 とは逆の回りになる。



（2）問 5.22 と同様に考えていく。

C_1 上では、$y=-1, \quad v_x=-\omega$

$$\int_{C_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1}(-\omega)\,dx = -2\omega$$

C_2 上では、$x=1, \quad v_y=-\omega$

$$\int_{C_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{-1}^{1}(-\omega)\,dy = -2\omega$$

C_3 上では、$y=1, \quad v_x=\omega$

$$\int_{C_3} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1}(\omega)\,dx = -\int_{-1}^{1}\omega dx = -2\omega$$

C_4 上では、$x=-1, v_y=\omega$

$$\int_{C_4} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{1}^{-1}(\omega)\,dy = -\int_{-1}^{1}\omega dy = -2\omega$$

$$\therefore \oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_{C_1} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_2} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_3} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} + \int_{C_4} \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = (-2\omega)\times 4 = -8\omega$$

（3）

$$\nabla\times\boldsymbol{v}=\left(\boldsymbol{i}\frac{\partial}{\partial x}+\boldsymbol{j}\frac{\partial}{\partial y}+\boldsymbol{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\times\left(\omega y\boldsymbol{i}-\omega x\boldsymbol{j}\right)$$

$$=\begin{vmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \omega y & -\omega x & 0\end{vmatrix}=0+0+\left\{\frac{\partial\left(-\omega x\right)}{\partial x}-\frac{\partial\left(\omega y\right)}{\partial y}\right\}\boldsymbol{k}=\left(-\omega-\omega\right)\boldsymbol{k}=-2\omega\boldsymbol{k}$$

（4）$\int_S\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\left(-2\omega\boldsymbol{k}\right)\cdot\boldsymbol{k}dxdy=-2\omega\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}dxdy=-2\omega\cdot 2\cdot 2=-8\omega$

（5）$\begin{cases}\oint\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}=-8\omega\\ \int_S\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=-8\omega\end{cases}$　-8ω を消去して　$\therefore\int_S\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\cdot d\boldsymbol{S}=\oint\boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r}$

問 5.37

（1）ベクトルの和を考える。

$$C_1:\quad \Delta \boldsymbol{r}_1 = \Delta x\boldsymbol{i}\ ,\quad C_2:\quad \Delta \boldsymbol{r}_2 = \Delta y\boldsymbol{j} + \Delta z\boldsymbol{k}\ ,$$

$$C_3:\quad \Delta \boldsymbol{r}_3 = \Delta x(-\boldsymbol{i}),\quad C_4:\quad \Delta \boldsymbol{r}_4 = \Delta y(-\boldsymbol{j}) + \Delta z(-\boldsymbol{k})$$

（2）

C_1 **上では、** $\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_1 = \left(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\Delta x\boldsymbol{i} = v_x\Delta x$

v_x **を** C_1 **の中心で代表させると** $v_x\left(x,\quad y+\dfrac{\Delta y}{2},\quad z+\dfrac{\Delta z}{2}\right)$

$$\therefore (\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_1 = v_x(x, y-\frac{\Delta y}{2}, z-\frac{\Delta z}{2})\Delta x \simeq \left[v_x(x,y,z)-\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}-\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right]\Delta x$$

C_2 **上では、** $\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_2 = \left(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left(\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}\right) = v_y\Delta y + v_z\Delta z$

v_y, v_z **を** C_2 **の中心で代表させると** $v_y\left(x+\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z\right), v_z\left(x+\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z\right)$

よって

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_2 &= v_y\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y + v_z\left(x+\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta z \\ &\simeq \left[v_y(x,y,z)+\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y + \left[v_z(x,y,z)+\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta z\end{aligned}$$

C_3 **上では、** $\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_3 = \left(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\Delta x\left(-\boldsymbol{i}\right) = -v_x\Delta x$

v_x **を** C_3 **の中心で代表させると** $v_x\left(x,\quad y+\dfrac{\Delta y}{2},\quad z+\dfrac{\Delta z}{2}\right)$

$$\therefore (\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_3 = -v_x(x, y+\frac{\Delta y}{2}, z+\frac{\Delta z}{2})\Delta x \simeq -\left[v_x(x,y,z)+\frac{\partial v_x}{\partial y}\frac{\Delta y}{2}+\frac{\partial v_x}{\partial z}\frac{\Delta z}{2}\right]\Delta x$$

C_4 上では、$\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r}_4 = \left(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}+v_z\boldsymbol{k}\right)\cdot\left\{\Delta y\left(-\boldsymbol{j}\right)+\Delta y\left(-\boldsymbol{k}\right)\right\} = -v_y\Delta y - v_z\Delta z$

v_x, v_z を C_2 の中心で代表させると　$v_x\left(x-\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z\right), v_z\left(x-\dfrac{\Delta x}{2},\quad y,\quad z\right)$

よって

$$
\begin{aligned}
(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_4 &= -v_y\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta y - v_z\left(x-\frac{\Delta x}{2}, y, z\right)\Delta z \\
&\simeq -\left[v_y(x,y,z)-\frac{\partial v_y}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta y - \left[v_z(x,y,z)-\frac{\partial v_z}{\partial x}\frac{\Delta x}{2}\right]\Delta z
\end{aligned}
$$

（3）（2）式を展開し、同類項をまとめる。

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{4}(v\cdot\Delta\boldsymbol{r})_k &= (\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_1+(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_2+(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_3+(\boldsymbol{v}\cdot\Delta\boldsymbol{r})_4 \\
&= \left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y - \left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z
\end{aligned}
$$

（4）微小面積の二つ辺を表すベクトル $\Delta\boldsymbol{r}_1$ と $-\Delta\boldsymbol{r}_4$ との外積

$$\Delta\boldsymbol{r}_1\times(-\Delta\boldsymbol{r}_4)$$

を考える。外積の大きさ $\left|\Delta\boldsymbol{r}_1\times(-\Delta\boldsymbol{r}_4)\right|$ は、第１章外積の項で述べたように、これら二つ辺がつくる平行四辺形（この場合には長方形）の面積 ΔS に等しい。また、その方向は、$\Delta\boldsymbol{r}_1$ と $-\Delta\boldsymbol{r}_4$ の両方に垂直な方向、すなわち、面の法線方向を向く。したがって、

$$
\begin{aligned}
\Delta\boldsymbol{S} &= \Delta\boldsymbol{r}_1\times(-\Delta\boldsymbol{r}_4) = (\Delta x\boldsymbol{i})\times(\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}) \\
&= \Delta x\Delta y(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{j})+\Delta x\Delta z(\boldsymbol{i}\times\boldsymbol{k}) = \Delta x\Delta y\boldsymbol{k}-\Delta x\Delta z\boldsymbol{j}
\end{aligned}
$$

（5）

$$
\nabla\times\boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}
$$

（6）

$$
\left(\nabla\times\boldsymbol{v}\right)\cdot\Delta\boldsymbol{S}=\left\{\left(\frac{\partial v_z}{\partial y}-\frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i}+\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j}+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}\right\}\cdot\left(0\boldsymbol{i}-\Delta x\Delta z\boldsymbol{j}+\Delta x\Delta y\boldsymbol{k}\right)
$$

$$
=-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z+\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y
$$

$$
=\left(\frac{\partial v_y}{\partial x}-\frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\Delta x\Delta y-\left(\frac{\partial v_x}{\partial z}-\frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\Delta x\Delta z
$$

（7）（3）と（6）を比較して　$\sum_{k=1}^{4}(v\cdot\Delta\boldsymbol{r})_k=(\nabla\times\boldsymbol{v})\cdot\Delta\boldsymbol{S}$

６．２

６．２．１

問１　**ヒント：直角座標系と円柱座標系との関係**　$x = r\cos\theta,\ \ y = r\sin\theta,\ \ z = z$

問２　**式（６．１１）から式（６．１５）までの部分を熟読のこと。**

問３　$A_r = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_r,\ A_\theta = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\theta,\ A_z = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_z$

問４

（１）$d\boldsymbol{s}_r = h_r dr\boldsymbol{e}_r,\ \ d\boldsymbol{s}_\theta = h_\theta d\theta\boldsymbol{e}_\theta,\ \ d\boldsymbol{s}_z = h_z dz\boldsymbol{e}_z$

（２）$d\boldsymbol{s}_r\cdot(d\boldsymbol{s}_\theta\times d\boldsymbol{s}_z) = h_r h_\theta h_z drd\theta dz\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_z) = h_r h_\theta h_z drd\theta dz$ **、式**(6.10)**より、結局**

$$d\boldsymbol{s}_r\cdot(d\boldsymbol{s}_\theta\times d\boldsymbol{s}_z) = rdrd\theta dz$$

（３）略

６．２．２

問１　**ヒント：直角座標系と球座標系との関係**

$$x = r\sin\theta\cos\phi,\ \ y = r\sin\theta\sin\phi,\ \ z = r\cos\theta$$

問２　**式**(6.11)**から式**(6.15)**までの部分を熟読のこと。**

問３　$A_r = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_r,\ A_\theta = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\theta,\ A_\phi = \boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{e}_\phi$

問４

（１）$d\boldsymbol{s}_r = h_r dr\boldsymbol{e}_r,\ \ d\boldsymbol{s}_\theta = h_\theta d\theta\boldsymbol{e}_\theta,\ \ d\boldsymbol{s}_\phi = h_\phi d\phi\boldsymbol{e}_\phi$

（２）$d\boldsymbol{s}_r\cdot(d\boldsymbol{s}_\theta\times d\boldsymbol{s}_\phi) = h_r h_\theta h_\phi drd\theta d\phi\boldsymbol{e}_r\cdot(\boldsymbol{e}_\theta\times\boldsymbol{e}_\phi) = h_r h_\theta h_\phi drd\theta d\phi$**、式**(6.21)**より、結局**

$$d\boldsymbol{s}_r\cdot(d\boldsymbol{s}_\theta\times d\boldsymbol{s}_z) = r^2\sin\theta drd\theta d\phi$$

（３）略

６．３

６．３．１

問１　**式**(6.41)**参照**

６．３．２

問１　**式**(6.52)**参照**

$$\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r\rho v_r)+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}(\rho v_\theta)+\frac{\partial}{\partial z}(\rho v_z)=0$$

問２　式(6.53)**または**(6.54)**参照**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2E_r)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta E_\theta)+\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial E_\phi}{\partial\phi}=0$$

問３　ヒント：式(6.57) **から式**(6.59)**の導出過程を参考にすると良い。**

６．４

問１　円柱座標系：式(6.72)**、球座標系：式**(6.73)**あるいは**(6.74)**を、各々、参照のこと。**

問２　式(6.72)**から**

$$c\rho\frac{\partial T}{\partial t}=\kappa\left[\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial T}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2T}{\partial\theta^2}+\frac{\partial^2T}{\partial z^2}\right]$$

問３　式(6.73)**から**

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\phi^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}$$