第８章　簡単な不静定構造物と崩壊荷重

■　基 本 問 題 解 答　■

基本問題 8-2

$y_{B0} = \dfrac{5Pl^3}{48EI}$ ， $y_{B1} = -\dfrac{R_B l^3}{3EI}$ ， $\dfrac{5Pl^3}{48EI} - \dfrac{R_B l^3}{3EI} = 0$ ， $\therefore R_B = \dfrac{5}{16}P$

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0$

$\sum \mathrm{V} = R_A - P + R_B = 0 \qquad \therefore R_A = P - R_B = P - \dfrac{5}{16}P = \dfrac{11}{16}P$

$\sum M = M_A + P \times \dfrac{l}{2} - R_B \times l = 0 \qquad \therefore M_A = -\dfrac{Pl}{2} + R_B l = -\dfrac{Pl}{2} + \dfrac{5}{16}Pl = -\dfrac{3}{16}Pl$

(1) B-C 間（$0 \leqq x \leqq l/2$）について

$\sum V = S_x + R_B = 0 \qquad \therefore S_x = -R_B = -\dfrac{5}{16}P$

$\sum M = M_x - R_B \times x = 0 \qquad \therefore M_x = R_B x = \dfrac{5}{16}Px$

(2) C-A 間（$l/2 \leqq x \leqq l$）について

$\sum V = S_x - P + R_B = 0 \qquad \therefore S_x = P - R_B = P - \dfrac{5}{16}P = \dfrac{11}{16}P$

$\sum M = M_x + P \times (x - \dfrac{l}{2}) - R_B \times x = 0$

$\therefore M_x = -P\left(x - \dfrac{l}{2}\right) + R_B x = -P\left(x - \dfrac{l}{2}\right) + \dfrac{5}{16}Px = -\dfrac{11}{16}Px + \dfrac{Pl}{2}$

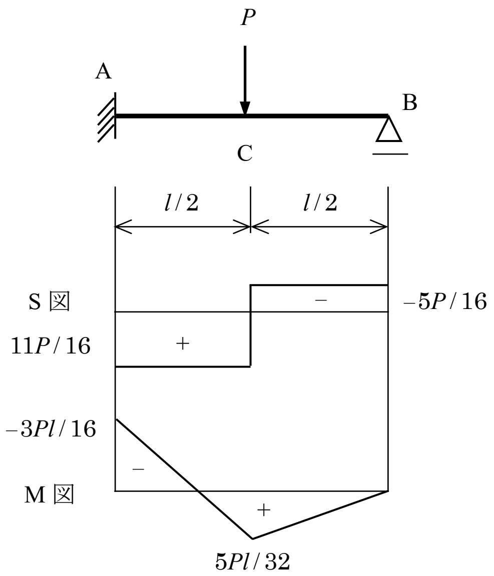


図 8.18　断面力図

基本問題 8-4

$$y_{C1} = \frac{(P-X)\,l^3}{48EI}\ ,\ \ y_{C2} = \frac{X\,(2l)^3}{48EI}\ ,\ \ \frac{(P-X)\,l^3}{48EI} = \frac{X\,(2l)^3}{48EI}\ ,\ \ X = \frac{P}{9}$$

$$R_A = R_B = \frac{1}{2}\left(P - X\right) = \frac{1}{2}\left(P - \frac{P}{9}\right) = \frac{4}{9}P$$

$$R_D = R_E = \frac{X}{2} = \frac{P}{18}$$

基本問題 8-6

$$C = \left\{200 \times 70 + 50 \times \left(270 - y_0\right)\right\}\sigma_y$$

$$T = \left\{50 \times \left(y_0 - 70\right) + 250 \times 70\right\}\ \sigma_y$$

$y_0 = 135$ mm

$$M_p = T \times j = \left\{50 \times \left(135 - 70\right) + 250 \times 70\right\} \times 226.1 \times \sigma_y = 4.69 \times 10^6 \sigma_y$$

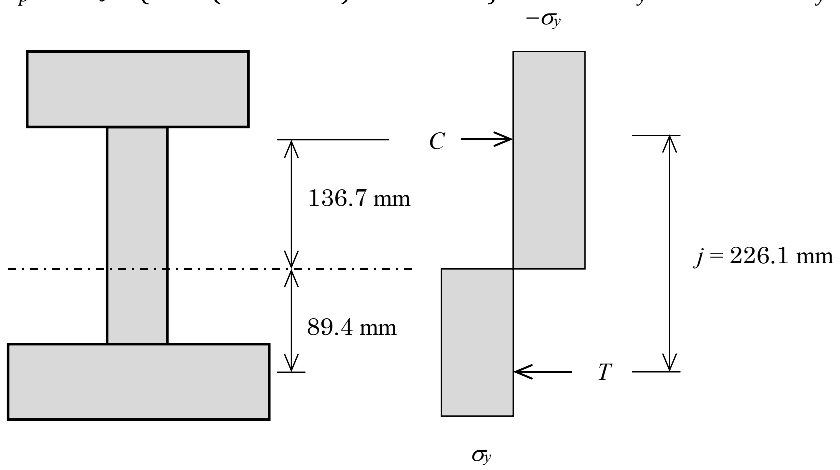


図 8.28　合力と作用位置

基本問題 8-8

$$W_e = \sum P \cdot \delta = P_u \times (\theta \times \frac{2\,l}{3})$$

$$W_i = \sum M_p \cdot \theta = M_p \times \theta + M_p \times 3\theta + M_p \times 2\theta = 6M_p\theta$$

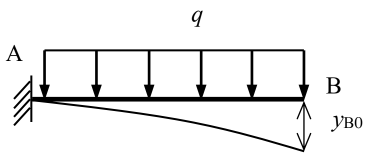
$$P_u = \frac{9M_p}{l}$$

■ チャレンジ問題解答 ■

チャレンジ問題 8-1

この不静定ばりの不静定次数は 1 次であるので，点 B にある支点を取り去って，静定基本系を片持ちばりとする。

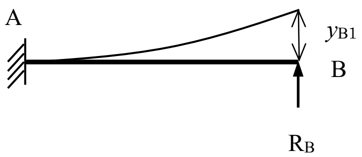
静定基本系における点 B のたわみ（**解図 W8.1**）



$$y_{B0} = \frac{ql^4}{8EI}$$

解図 W8.1　静定基本形

不静定反力 R_B による点 B のたわみ（**解図 W8.2**）



$$y_{B1} = -\frac{R_B l^3}{3EI}$$

解図 W8.2　不静定力

変形の適合条件式は，次のようになる。

$$y_{B0} + y_{B1} = 0$$

よって，変形の適合条件式より，点 B の支点反力 R_B は次のようになる。

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{R_B l^3}{3EI} = 0 \qquad \therefore R_B = \frac{3}{8}ql$$

残りの支点反力は三つなので，力のつり合い式を用いて求めることができる。

水平方向のつり合い式：

$$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0$$

鉛直方向のつり合い式：

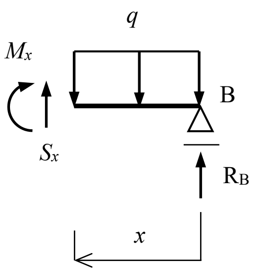
$$\sum V = R_A - q \times l + R_B = 0 \qquad \therefore R_A = ql - R_B = ql - \frac{3}{8}ql = \frac{5}{8}ql$$

点 A まわりのモーメントのつり合い式：

$$\sum M = M_A + ql \times \frac{l}{2} - R_B \times l = 0 \qquad \therefore M_A = -\frac{ql^2}{2} + R_B l = -\frac{ql^2}{2} + \frac{3}{8}ql^2 = -\frac{ql^2}{8}$$

つぎに，不静定ばりに生じる断面力を求める。

(1) B-A 間（$0 \leqq x \leqq l$）について（**解図 W8.3**）



解図 W8.3　右側の力のつり合い

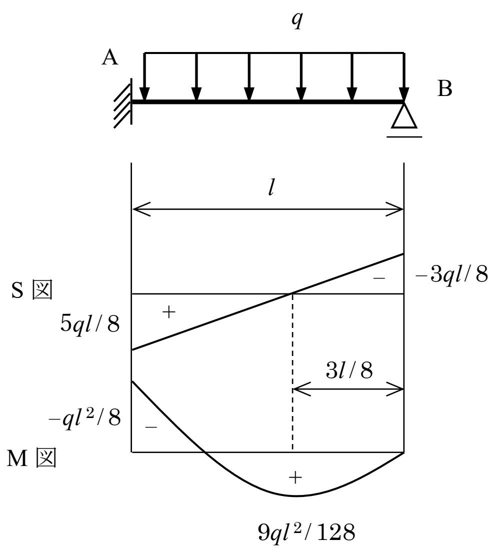
① 鉛直方向のつり合い式

$$\sum V = S_x - q \times x - R_B = 0 \qquad \therefore S_x = qx - R_B = qx - \frac{3}{8}ql$$

② 点 B から x だけ離れた位置におけるモーメントのつり合い式

$$\sum M = M_x + qx \times \frac{x}{2} - R_B \times x = 0 \qquad \therefore M_x = -\frac{qx^2}{2} + R_B x = -\frac{qx^2}{2} + \frac{3}{8}qlx$$

以上より，断面力は**解図 W8.4** となる。

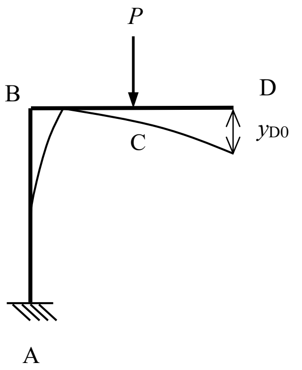


解図 W8.4　断面力図

チャレンジ問題 8-2

点 D にある支点を取り去って，静定基本系を折ればりとする。

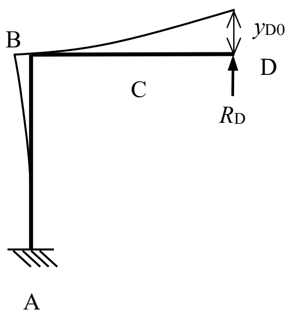
静定基本系における点 D のたわみ（**解図 W8.5**）



$$y_{D0} = \frac{29Pl^3}{48EI}$$

解図 W8.5　静定基本形

不静定反力 R_D による点 D のたわみ（**解図 W8.6**）



$$y_{D1} = -\frac{4R_D l^3}{3EI}$$

解図 W8.6　不静定力

変形の適合条件式は，次のようになる。

$$y_{D0} + y_{D1} = 0$$

よって，変形の適合条件式より，点 D の支点反力 R_D は次のようになる。

$$\frac{29Pl^3}{48EI} - \frac{4R_D l^3}{3EI} \qquad \therefore R_D = \frac{29}{64}P$$

残りの支点反力は三つなので，力のつり合い式を用いて求めることができる。

水平方向のつり合い式：

$$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0$$

鉛直方向のつり合い式：

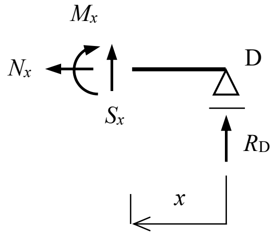
$$\sum V = R_A - P + R_D = 0 \qquad \therefore R_A = \frac{35}{64}P$$

点 A まわりのモーメントのつり合い式：

$$\sum M = M_A + P \times \frac{l}{2} - R_D \times l = 0 \qquad \therefore M_A = -\frac{3}{64}Pl$$

つぎに，不静定ばりに生じる断面力を求める。

(1) D-C 間（$0 \leqq x \leqq l/2$）について（**解図 W8.7**）



解図 W8.7　右側の力のつり合い

① 水平方向のつり合い式

$$\sum H = -N_x = 0 \qquad \therefore N_x = 0$$

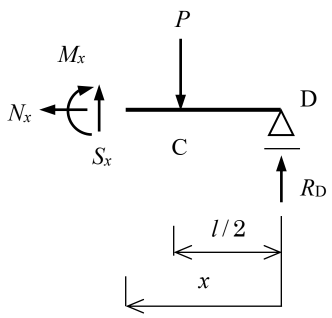
② 鉛直方向のつり合い式

$$\sum V = S_x + R_D = 0 \qquad \therefore S_x = -R_D = -\frac{29}{64}P$$

③ 点 D から x だけ離れた位置におけるモーメントのつり合い式

$$\sum M = M_x - R_D \times x = 0 \qquad \therefore M_x = R_D x = \frac{29}{64}Px$$

(2) C-B 間（$l/2 \leqq x \leqq l$）について（**解図 W8.8**）



解図 W8.8　右側の力のつり合い

① 水平方向のつり合い式

$$\sum H = -N_x = 0 \qquad \therefore N_x = 0$$

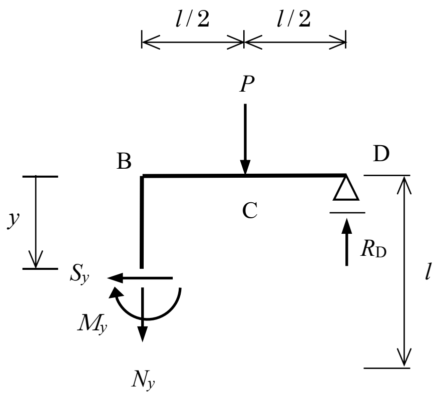
② 鉛直方向のつり合い式

$$\sum V = S_x - P + R_D = 0 \qquad \therefore S_x = P - R_D = \frac{35}{64}P$$

③ 点 D から x だけ離れた位置におけるモーメントのつり合い式

$$\sum M = M_x + P \times \left(x - \frac{l}{2}\right) - R_D \times x = 0 \qquad \therefore M_x = -P\left(x - \frac{l}{2}\right) + R_D x = -\frac{35}{64}Px + \frac{Pl}{2}$$

(3) B-A 間（0≦y≦l）について（**解図 W8.9**）



解図 W8.9　上側の力のつり合い

① 水平方向のつり合い式

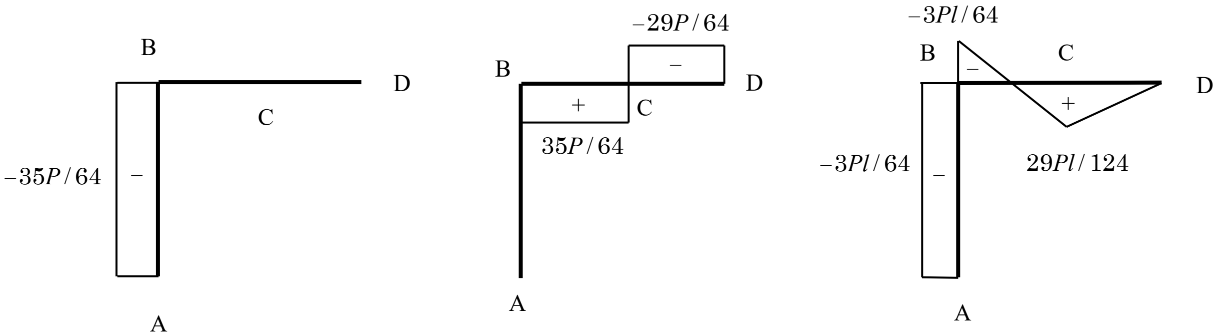
$\sum H = - S_y = 0 \qquad \therefore S_y = 0$

② 鉛直方向のつり合い式

$\sum V = - N_y - P + R_D = 0 \qquad \therefore N_y = - P + R_D = - P + \frac{29}{64}P = - \frac{35}{64}P$

③ 点 B から y だけ離れた位置におけるモーメントのつり合い式

$\sum M = M_y + P \times \frac{l}{2} - R_D \times l = 0 \qquad \therefore M_y = - \frac{Pl}{2} + R_D l = - \frac{3}{64}Pl$

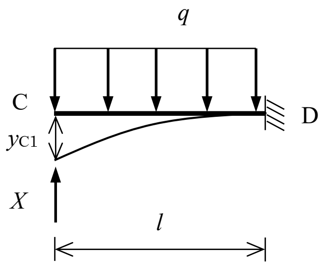


(a) N 図　(b) S 図　(c) M 図

解図 W8.10　断面力図

チャレンジ問題 8-3

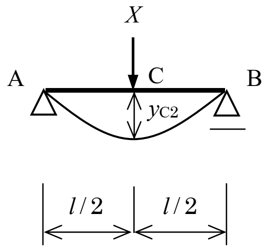
単純ばり A-B に作用する力を X とすると，片持ちばり C-D の点 C におけるたわみは次のようになる（**解図 W8.11**）。



$$y_{C1} = \frac{ql^4}{8EI} - \frac{Xl^3}{3EI}$$

解図 W8.11　片持ちばり C-D のたわみ

また，単純ばり A-B の点 C におけるたわみは次のようになる（**解図 W8.12**）。



$$y_{C2} = \frac{Xl^3}{48EI}$$

解図 W8.12　単純ばり A-B のたわみ

変形の適合条件式は，次のようになる。

$$y_{C1} = y_{C2}$$

よって，変形の適合条件式より，点 C に作用する力 X は次のようになる。

$$\frac{ql^4}{8EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = \frac{Xl^3}{48EI} \qquad \therefore X = \frac{6}{17}ql$$

それぞれのはりの支点反力は，力のつり合いから次のようになる。

$$R_A = R_B = \frac{X}{2} = \frac{3}{17}ql$$

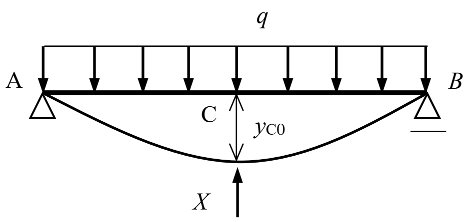
$$R_D = ql - X = \frac{11}{17}ql$$

$$M_D = -\frac{ql^2}{2} + X \times l = -\frac{5}{34}ql^2$$

チャレンジ問題 8-4

点 C において，ばねと片持ちばりに作用する不静定力 X とおき，ばねと片持ちばりを切り離す。

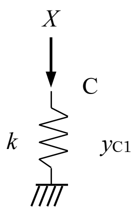
等分布荷重と不静定力 X による単純ばりの点 C におけるたわみ（**解図 W8.13**）



$$y_{C0} = \frac{5q\,(2l)^4}{384EI} - \frac{X\,(2l)^3}{48EI}$$

解図 W8.13　単純ばりのたわみ

不静定力 X によるばねの縮み量（**解図 W8.14**）



$$y_{C1} = \frac{X}{k}$$

解図 W8.14　ばねの縮み量

変形の適合条件式は，次のようになる。

$$y_{C0} = y_{C1}$$

よって，変形の適合条件式より，ばねに作用する力 X は次のようになる。

$$\frac{5q\,(2l)^4}{384EI} - \frac{X\,(2l)^3}{48EI} = \frac{X}{k} \qquad \therefore X = \frac{80ql^4}{384EI\left(\frac{l^3}{6EI} + \frac{l}{k}\right)}$$

点 C のたわみは次のようになる。

$$y_C = \frac{X}{k} = \frac{80ql^4}{384\,k\,EI\left(\frac{l^3}{6EI} + \frac{l}{k}\right)}$$

チャレンジ問題 8-5

$$C = 300 \times \left(400 - y_0\right)\sigma_y$$

$$T = \left(300 \times y_0 - \pi \times 25^2\right)\sigma_y$$

$C = T$ より，$y_0 = 203.3$ mm

$$M_p = C \times j = 300 \times 196.7 \times \sigma_y \times 199.95 = 1.18 \times 10^7 \sigma_y$$

チャレンジ問題 8-6

二つ目の塑性ヒンジが形成される位置は，**解図 W8.15** に示すように，点 A が全塑性モーメント M_p に達した状態の M 図と等分布荷重が単純ばり A-B に作用したときの M 図から，M_x は式(1)で表すことができる。ここで， A-B 間上の二つ目の全塑性モーメント M_p が発生する位置は，式(1)の M_x が M_p になるところと考えればよい。

$$M_x = \frac{ql}{2}x - \frac{q\,x^2}{2} - \frac{M_p\,x}{l} \qquad (1)$$

つぎに，M_x を x で微分すれば次式が得られる。

$$\frac{dM_x}{dx} = \frac{ql}{2} - qx - \frac{M_p}{l} = 0 \qquad (2)$$

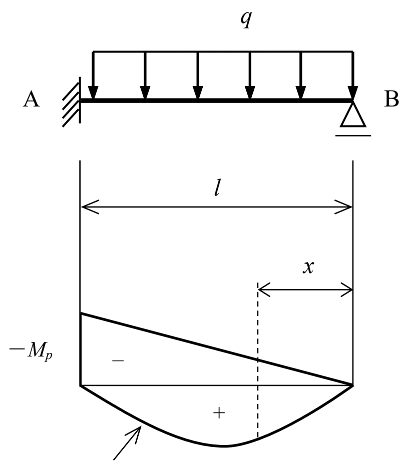
式(2)から，$q = \dfrac{2M_p}{l^2 - 2\,l\,x}$ が得られ，これを式(1)に代入し，$M_x = M_p$ とおいて x について解くと，全塑性モーメント M_p の発生位置が次式のように得られる。

$$x = \left(\sqrt{2} - 1\right) l$$

すなわち，点 B から $\left(\sqrt{2} - 1\right) l$ の位置で二つ目の塑性ヒンジが形成されることになる。

よって， $M_x = M_p$ の x にこの値を代入すれば崩壊荷重を次式のように求めることができる。

$$q_u = \frac{2M_p}{\left(3 - 2\sqrt{2}\right) l^2}$$



解図 W8.15　M 図