第 6 章　応力とひずみ

■ 基本問題解答 ■

基本問題 6-5

A = 12 000 mm^2，I = 40×10^{6}mm^4，M = 68.6 kN・m，σ_u = -171.5 N/mm^2，σ_l = 171.5 N/mm^2，S = 5.7 kN，τ_{max} = 0.71 N/mm^2

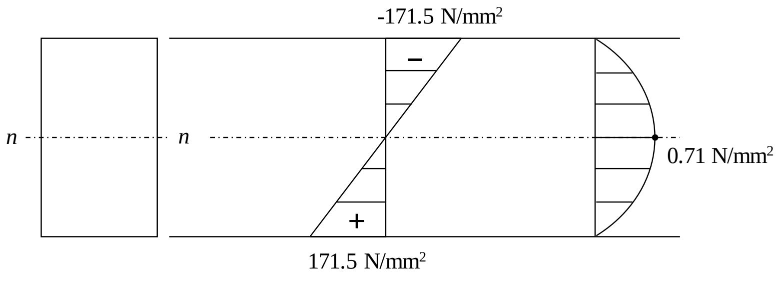


図 6.17　曲げ応力分布とせん断応力分布

基本問題 6-7

$$\sigma_1 = \frac{1}{2}(100-50) + \sqrt{\left(\frac{100+50}{2}\right)^2 + 50^2} = 115.1\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2}(100-50) - \sqrt{\left(\frac{100+50}{2}\right)^2 + 50^2} = -65.1\ \mathrm{N/mm^2}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{50}{(100+50)/2} = 16.8^\circ$$ および $\theta_2 = 16.8^\circ + 90^\circ$

$= 106.8^\circ$

$$\tau_{\max} = \sqrt{\left(\frac{100+50}{2}\right)^2 + 50^2} = 90.1\ \mathrm{N/mm^2}$$

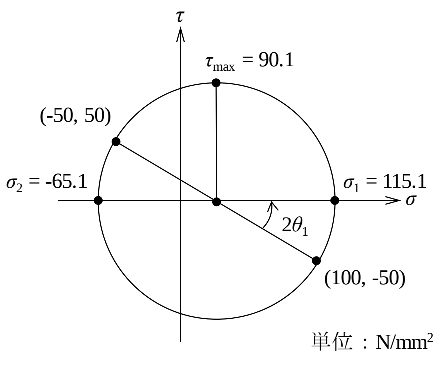


図 6.21　モールの応力円

■ チャレンジ問題解答 ■

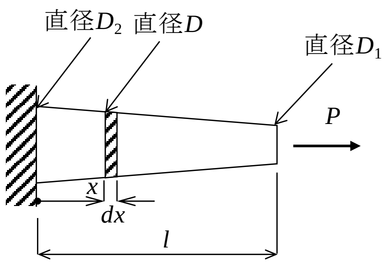
チャレンジ問題 6-1

位置 x の部材の直径 D は，**解図 W6.1** から x の関数として，$D = D_2 - \frac{D_2 - D_1}{l}x$ となるため，その位置の断面積は，$A = \frac{\pi D^2}{4} = \frac{\pi}{4}\left(D_2 - \frac{D_2 - D_1}{l}x\right)^2$ になる。位置 x の部材に生じる応力は

$\sigma = \dfrac{P}{A} = \dfrac{4P}{\pi} \Big/ \left(D_2 - \dfrac{D_2 - D_1}{l} x \right)^2$ になり，ひずみは $\varepsilon = \dfrac{\sigma}{E} = \dfrac{4P}{\pi E} \Big/ \left(D_2 - \dfrac{D_2 - D_1}{l} x \right)^2$ になる。

次に，位置 x から微小長さ dx を考える。微小長さ dx では直径の変化が小さいと考えると，微小長さ dx での部材の伸びは $\varepsilon dx = \dfrac{4P}{\pi E} \Big/ \left(D_2 - \dfrac{D_2 - D_1}{l} x \right)^2 dx$ となる。したがって，部材の伸び Δl は，εdx を部材長さに渡って積分することで計算できる。

$$\Delta l = \int_0^l \varepsilon dx = \int_0^l \frac{4P}{\pi E} \Big/ \left(D_2 - \frac{D_2 - D_1}{l} x \right)^2 dx = \frac{4P}{\pi E} \cdot \frac{l}{D_2 - D_1} \left[1 \Big/ \left(D_2 - \frac{D_2 - D_1}{l} x \right) \right]_0^l = \frac{4Pl}{\pi E D_1 D_2}$$



解図 W6.1　変断面部材の微小長さ dx

チャレンジ問題 6-2

上下対称断面なので，中立軸 n-n は断面の下面から 162 mm になり，断面積は A = 5 040 mm^2，中立軸に関する断面 2 次モーメントは I = 62.1×10^6 mm^4 になる。チャレンジ問題 4-1 より，点 C の位置の曲げモーメントは M = 53.0 kN・m となるので，断面の上下縁に生じる曲げ応力はそれぞれ，$\sigma_u = -138.3$ N/mm^2，$\sigma_l = 138.3$ N/mm^2 となり，**図解 W6.2** に示す直線分布になる。

チャレンジ問題 4-1 より，せん断力は S = 26.5 kN であるので，中立軸位置に生じる最大のせん断応力 $\tau_{\max}$ は，中立軸位置より上側の断面 1 次モーメント G_1 を計算して $\tau_{\max} = 8.8$ N/mm^2 になる。

断面が変化する位置では，部材 I と II で断面の幅 b が異なるので，部材 I, II に対するせん断応力 τ_{I}, τ_{II} はそれぞれ次のように与えられる。

$$\tau_{\mathrm{I}} = \frac{SG}{Ib_{\mathrm{I}}} = \frac{26.5\times10^3 \cdot 60\times12\times156}{62.1\times10^6 \cdot 12} = 4.0 \text{ N/mm}^2$$

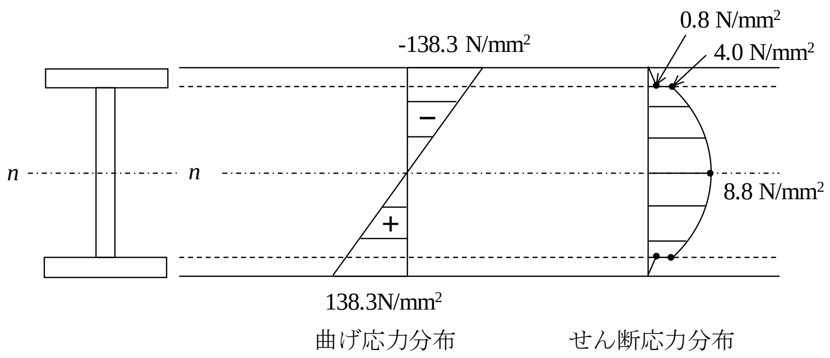
$$\tau_{\mathrm{II}} = \frac{SG}{Ib_{\mathrm{II}}} = \frac{26.5\times10^3 \cdot 60\times12\times156}{62.1\times10^6 \cdot 60} = 0.8 \text{ N/mm}^2$$

断面の上下に生じるせん断応力は 0 なので，せん断応力分布は**図解 W6.2** に示すような分布になる。

部材 I と下側の部材 II との接合部に生じる曲げ応力は，$\sigma_x = \dfrac{M}{I} y = \dfrac{53.0\times10^6}{62.1\times10^6} \times 150 = 128.0$ N/mm^2 になり，断面の鉛直方向の直応力 σ_y が 0 なので，最大主応力 σ_1，最小主応力 σ_2 はそれぞれ次のような値になる。

$$\sigma_1 = \frac{\sigma_x}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{\mathrm{I}}^2} = \frac{128.0}{2} + \sqrt{\left(\frac{128.0}{2}\right)^2 + 4.0^2} = 128.1 \text{ N/mm}^2$$

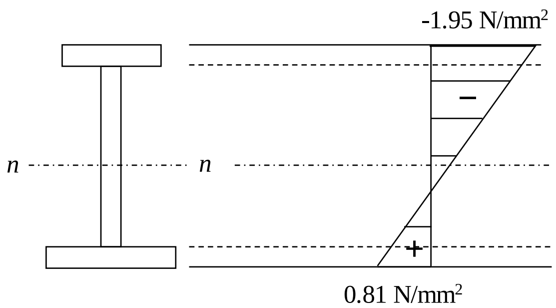
$$\sigma_2 = \frac{\sigma_x}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma_x}{2}\right)^2 + \tau_{\mathrm{I}}^2} = \frac{128.0}{2} - \sqrt{\left(\frac{128.0}{2}\right)^2 + 4.0^2} = -0.12 \text{ N/mm}^2$$



図解 W6.2　曲げ応力分布とせん断応力分布

チャレンジ問題 6−3

基本問題 2-3 より，中立軸 n-n は断面の下面から 159mm になり，断面積は A = 41 500 mm^2，中立軸に関する断面 2 次モーメントは I = 615×10^6 mm^4 になる。チャレンジ問題 4-10 より，点 AC 間の中央の曲げモーメントは M = 5.0kN・m になるので，断面の上面と下面に生じる曲げ応力（縁応力）σ_u，σ_l はそれぞれ，$\sigma_u = -1.47$ N/mm^2，$\sigma_l = 1.29$ N/mm^2 になる。また，軸力 N = -20 kN なので，軸応力は $\sigma_u = -0.48$ N/mm^2 になる。したがって, 支間中央の梁の応力は曲げ応力と軸応力を合わせて**図解 W6.3** のような分布になる。曲げモーメントと軸力の両方を受けているので, 応力分布は中立軸の位置で 0 にならないことがわかる。



図解 W6.3　応力分布

チャレンジ問題 6−4

材料 I と II に生じる軸力をそれぞれ N_1，N_2 とすると，材料 I と II の伸縮量 Δl_1，Δl_2 はそれぞれ次のようになる。

$$\Delta l_1 = \varepsilon_1 \times l_{\mathrm{EF}} = \frac{N_1}{E_1 \cdot A_1} \times l_{\mathrm{EF}} = \frac{N_1}{2.0\times10^4 \cdot 20000} \times 3000 = 7.5\times10^{-6} N_1$$

$$\Delta l_2 = \varepsilon_2 \times l_{\mathrm{EF}} = \frac{N_2}{E_2 \cdot A_2} \times l_{\mathrm{EF}} = \frac{N_2}{2.0\times10^5 \cdot 1000} \times 3000 = 15.0\times10^{-6} N_2$$

材料 I と II の伸縮量が等しい（$\Delta l_1 = \Delta l_2$）ことから，N_1 と N_2 の関係は，$N_1 = 2N_2$ となる。

また, 力のつり合いは $N_{\mathrm{EF}} = N_1 + N_2$ で, チャレンジ問題 4-15 よりトラス部材 EF に生じる軸力は N_{EF}= -80kN なので，材料 I と II に生じる軸力 N_1，N_2 はそれぞれ，N_1 = -53.3 kN，N_2 = -26.7 kN になる。

したがって，トラス部材 EF の伸縮量は，$\Delta l_{\mathrm{EF}} = \Delta l_1 = 7.5\times10^{-6} N_1 = 7.5\times10^{-6}\times(-53.3\times10^3) = -0.4$ mm になる。

チャレンジ問題 6-5

温度変化 ΔT によって部材 I と II が伸縮するが，両端が拘束されているため，自由に膨張できず，部材 I と II に軸力(内力)が生じる。部材 I と II に生じる軸力は一定であるので，両部材に生じる軸力を N とすると，部材 I と II の軸力 N による伸縮量と温度変化による伸縮量の和が 0 になるので，$\alpha_1 \Delta T l + Nl/(E_1 A_1) + \alpha_2 \Delta T l + Nl/(E_2 A_2) = 0$ が成立する。

したがって部材に生じる軸力は $N = -\dfrac{E_1 A_1 E_2 A_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}(\alpha_1 + \alpha_2)\Delta T$ となる。

部材 I と II の境界の変位は，$\Delta l = \dfrac{E_1 A_1 \alpha_1 - E_2 A_2 \alpha_2}{E_1 A_1 + E_2 A_2}\Delta T l$ になる。