第３章　支 点 反 力

■　基 本 問 題 解 答　■

基本問題 3-4

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0$

$\sum M = R_A \times l - q \times \frac{l}{2} \times \frac{l}{4} = 0 \qquad \therefore R_A = \frac{ql}{8}$

$\sum V = R_A + R_B - \frac{ql}{2} = 0 \qquad \therefore R_B = -R_A + \frac{ql}{2} = -\frac{ql}{8} + \frac{ql}{2} = \frac{3ql}{8}$

基本問題 3-6

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = R_A \times 7 - P_1 \times 5 - P_2 \times 2 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{7}(P_1 \times 5 + P_2 \times 2) = \frac{1}{7}(20 \times 5 + 40 \times 2) = 25.7\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0$

$\therefore R_B = -R_A + P_1 + P_2 = -25.7 + 20 + 40 = 34.3\ \mathrm{kN}$

基本問題 3-9

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = R_A \times 5 - q \times 5 \times 2.5 + P \times 2 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{5} \times \left(q \times 5 \times 2.5 - P \times 2\right) = \frac{1}{5} \times \left(10 \times 5 \times 2.5 - 30 \times 2\right) = 13\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A + R_B - q \times 5 - P = 0$

$\therefore R_B = -R_A + q \times 5 + P = -13 + 10 \times 5 + 30 = 67\ \mathrm{kN}$

基本問題 3-12

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0$

$\sum V = R_A - q \times l = 0 \qquad \therefore R_A = ql$

$\sum M = M_A + ql \times \frac{l}{2} = 0 \qquad \therefore M_A = -\frac{ql^2}{2}$

基本問題 3-13

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A = 0 \qquad \therefore R_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = M_A + M = 0 \qquad \therefore M_A = -M = -80\ \mathrm{kN \cdot m}$

基本問題 3-15

$\sum H = H_A - H_C = 0 \qquad \therefore H_A = H_C = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = R_A \times 7 - q \times 7 \times 3.5 + R_C \times 3 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{7} \times \left(q \times 7 \times 3.5 - \mathrm{R_C} \times 3\right) = \frac{1}{7} \times \left(5 \times 7 \times 3.5 - 5 \times 3\right) = 15.4\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A + R_B - q \times 7 - R_C = 0$

$\therefore R_B = -R_A + q \times 7 + R_C = -15.4 + 5 \times 7 + 5 = 24.6\ \mathrm{kN}$

基本問題 3-19

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = R_A \times 8 - P \times 3 = 0 \qquad \therefore R_A = \frac{1}{8} \times P \times 3 = \frac{1}{8} \times 20 \times 3 = 7.5\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A + R_B - P = 0 \qquad \therefore R_B = -R_A + P = -7.5 + 20 = 12.5\ \mathrm{kN}$

基本問題 3-22

$R = q \times 5 = 3 \times 5 = 15\ \mathrm{kN}\ ,\quad x_0 = 2.5\ \mathrm{m}$

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = R_A \times 5 - R \times x_0 = 0 \qquad \therefore R_A = \frac{1}{5} \times R \times x_0 = \frac{1}{5} \times 15 \times 2.5 = 7.5\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A + R_D - R = 0 \qquad \therefore R_D = -R_A + R = -7.5 + 15 = 7.5\ \mathrm{kN}$

基本問題 3-26

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

$\sum M = R_A \times 9 - P_1 \times 6 - P_2 \times 3 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{9} \times (P_1 \times 6 + P_2 \times 3) = \frac{1}{9} \times (20 \times 6 + 30 \times 3) = 23.3\ \mathrm{kN}$

$\sum V = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0$

$\therefore R_B = -R_A + P_1 + P_2 = -23.3 + 20 + 30 = 26.7\ \mathrm{kN}$

■　チャレンジ問題解答　■

チャレンジ問題 3-1

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 10 - P \times 8 - q \times 5 \times 2.5 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{10} \times (P \times 8 + q \times 5 \times 2.5) = \frac{1}{10} \times (30 \times 8 + 2 \times 5 \times 2.5) = 26.5\ \mathrm{kN}$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_B - P - q \times 5 = 0$

$\therefore R_B = -R_A + P + q \times 5 - 26.5 + 30 + 2 \times 5 = 13.5\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-2

合力の作用位置は，図心位置を求めたときと同様の考え方で計算できる。

分布荷重の合力： $R = \int_0^5 q_x dx = \int_0^5 2x^2 dx = \left[\frac{2}{3}x^3\right]_0^5 = 83.3\ \mathrm{kN}$

$G = \int_0^5 q_x \times x\, dx = \int_0^5 2x^3\, dx = \left[\frac{x^4}{2}\right]_0^5 = 312.5\ \mathrm{kN \cdot m}$

合力の作用位置は，点 A から

$x_0 = \frac{G}{R} = \frac{312.5}{83.3} = 3.75\ \mathrm{m}$　の距離となる。

支点反力は，力のつり合い式より，次のように求めることができる。

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 5 - R \times (5 - x_0) = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{5} \times R \times (5 - x_0) = \frac{1}{5} \times 83.3 \times (5 - 3.75) = 20.8\ \mathrm{kN}$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_B - R = 0$

$\therefore R_B = -R_A + R = -20.8 + 83.3 = 62.5\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-3

sin 波形分布荷重の合力

$$R = \int_0^3 q_x\, dx = \int_0^3 q_0 \sin\left(\frac{\pi x}{l}\right) dx = \int_0^3 5 \times \sin\left(\frac{\pi x}{3}\right) dx$$

$$= 5 \times \left[-\frac{3}{\pi}\cos\left(\frac{\pi x}{3}\right)\right]_0^3 = \frac{5 \times 6}{\pi} = 9.55\ \text{kN}$$

合力の作用位置は，対称性からスパン中央（点 A から 1.5 m）である。

よって，$H_\text{A} = 0$ kN，　$R_\text{A} = R_\text{B} = 4.78$ kN　となる。

チャレンジ問題 3-4

水平方向の力のつり合い式：

$$\sum H = H_\text{A} = 0 \qquad \therefore H_\text{A} = 0\ \text{kN}$$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$$\sum M = -P_1 \times 7 + R_\text{A} \times 5 - q \times 5 \times 2.5 + P_2 \times 3 = 0$$

$$\therefore R_\text{A} = \frac{1}{5} \times \left(P_1 \times 7 + q \times 5 \times 2.5 - P_2 \times 3\right)$$

$$= \frac{1}{5} \times \left(50 \times 7 + 20 \times 5 \times 2.5 - 20 \times 3\right) = 108\ \text{kN}$$

鉛直方向の力のつり合い式：

$$\sum V = R_\text{A} + R_\text{B} - P_1 - q \times 5 - P_2 = 0$$

$$\therefore R_\text{B} = -R_\text{A} + P_1 + q \times 5 + P_2 = -108 + 50 + 20 \times 5 + 20 = 62\ \text{kN}$$

チャレンジ問題 3-5

水平方向の力のつり合い式：

$$\sum H = H_\text{A} = 0 \qquad \therefore H_\text{A} = 0$$

鉛直方向の力のつり合い式：

$$\sum V = R_\text{A} - q \times \frac{l}{2} = 0 \qquad \therefore R_\text{A} = \frac{ql}{2}$$

点Aまわりのモーメントのつり合い式：

$$\sum M = M_\text{A} + \frac{ql}{2} \times \left(\frac{l}{2} + \frac{l}{4}\right) = 0 \qquad \therefore M_\text{A} = -\frac{3}{8}ql^2$$

チャレンジ問題 3-6

水平方向の力のつり合い式：

$$\sum H = H_\text{A} = 0 \qquad \therefore H_\text{A} = 0\ \text{kN}$$

鉛直方向の力のつり合い式：

$$\sum V = R_\text{B} - \frac{1}{2} \times q \times 10 = 0$$

$\therefore R_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2} \times q \times 10 = \frac{1}{2} \times 15 \times 10 = 75\ \mathrm{kN}$

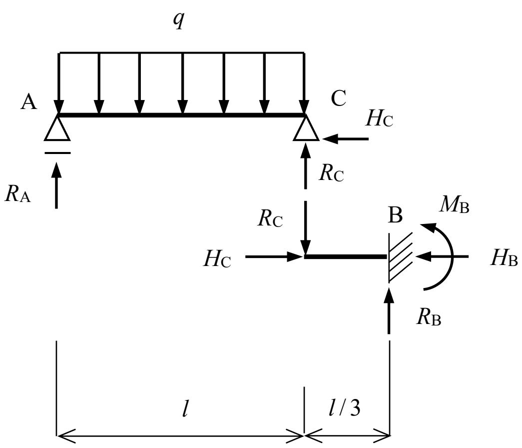
点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$$\sum M = -M_{\mathrm{B}} - \frac{1}{2} \times q \times 10 \times \left(\frac{1}{3} \times 10\right) = 0$$

$$\therefore M_{\mathrm{B}} = -\frac{1}{2} \times q \times 10 \times \left(\frac{1}{3} \times 10\right) = -\frac{1}{2} \times 15 \times 10 \times \left(\frac{1}{3} \times 10\right) = -250\ \mathrm{kN{\cdot}m}$$

チャレンジ問題 3–7

解図 W3.1 に示すように，〔**左側の単純ばりの支点反力**〕は，$H_{\mathrm{C}} = 0$，$R_{\mathrm{A}} = R_{\mathrm{C}} = ql/2$ となる。



解図 W3.1 ゲルバーばりの切り離し

〔**右側の片持ちばりの支点反力**〕

水平方向の力のつり合い式：

$$\sum H = H_{\mathrm{C}} - H_{\mathrm{B}} = 0 \qquad \therefore H_{\mathrm{B}} = H_{\mathrm{C}} = 0$$

鉛直方向の力のつり合い式：

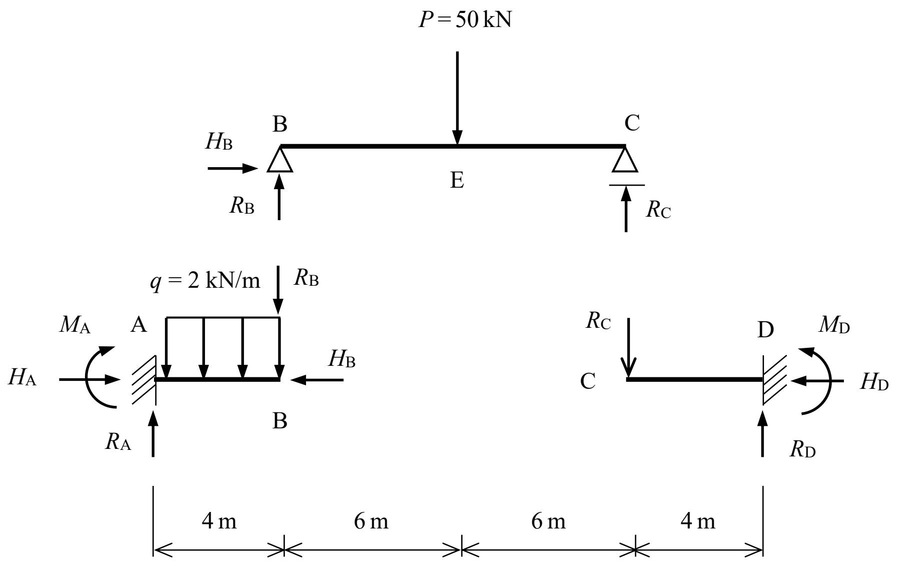
$$\sum V = -R_{\mathrm{C}} + R_{\mathrm{B}} = 0 \qquad \therefore R_{\mathrm{B}} = R_{\mathrm{C}} = \frac{ql}{2}$$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$$\sum M = -R_{\mathrm{C}} \times \frac{l}{3} - M_{\mathrm{B}} = 0 \qquad \therefore M_{\mathrm{B}} = -\frac{R_{\mathrm{C}} l}{3} = -\frac{ql^2}{6}$$

チャレンジ問題 3–8

解図 W3.2 に示すように，〔**中央の単純ばりの支点反力**〕は，$H_B = 0\ \mathrm{kN}$，$R_B = R_C = 25\ \mathrm{kN}$ となる。



解図 W3.2　ゲルバーばりの切り離し

〔**左側の片持ちばりの支点反力**〕

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A - H_B = 0$　　　$\therefore H_A = H_B = 0$ kN

点 A まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = M_A + q \times 4 \times 2 + R_B \times 4 = 0$

$\therefore M_A = -q \times 4 \times 2 - R_B \times 4 = -2 \times 4 \times 2 - 25 \times 4 = -116$ kN·m

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A - q \times 4 - R_B = 0$

$\therefore R_A = q \times 4 + R_B = 2 \times 4 + 25 = 33$ kN

〔**右側の片持ちばりの支点反力**〕

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_D = 0$　　　$\therefore H_D = 0$ kN

点 D まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = -R_C \times 4 - M_D = 0$

$\therefore M_D = -R_C \times 4 = -25 \times 4 = -100$ kN·m

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = -R_C + R_D = 0$　　　$\therefore R_D = R_C = 25$ kN

チャレンジ問題 3-9

単純ばり a-b の支点反力　$H_a = 0$ kN，$R_a = 6.7$ kN，$R_b = 13.3$ kN

単純ばり b-c の支点反力　$H_b = 0$ kN，$R_b = R_c = 20$ kN

単純ばり c-d の支点反力　$H_c = 0$ kN，$R_c = R_d = 0$ kN

単純ばり d-e の支点反力　$H_d = 0$ kN，$R_d = 17.5$ kN，$R_e = 52.5$ kN

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A = 0 \qquad \therefore H_A = 0\ \mathrm{kN}$

点 E まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 16 - 6.7 \times 16 - 33.3 \times 12 - 20 \times 8 - 17.5 \times 4 = 0$

$\therefore R_A = 46.05\ \mathrm{kN}$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_E - 6.7 - 33.3 - 20 - 17.5 - 52.5 = 0$

$\therefore R_E = -R_A + 130 = -46.05 + 130 = 83.95\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-10

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A - P = 0 \qquad \therefore H_A = P = 20\ \mathrm{kN}$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 6 - P \times 1 = 0 \qquad \therefore R_A = \frac{1}{6} \times P \times 1 = \frac{1}{6} \times 20 \times 1 = 3.3\ \mathrm{kN}$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_B = 0 \qquad \therefore R_B = -R_A = -3.3\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-11

等変分布荷重の合力と点 B から合力の作用位置までの距離は次のようになる。

$R = \frac{1}{2} \times q \times 3 = \frac{1}{2} \times 5 \times 3 = 7.50\ \mathrm{kN}, \quad y_0 = 1.0\ \mathrm{m}$

支点反力は，力のつり合い式より，次のように求めることができる。

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A - R = 0 \qquad \therefore H_A = R = 7.50\ \mathrm{kN}$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 7 - P \times 4 - R \times y_0 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{7} \times \left(P \times 4 + R \times y_0\right) = \frac{1}{7} \times (10 \times 4 + 7.50 \times 1) = 6.79\ \mathrm{kN}$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_B - P = 0$

$\therefore R_B = -R_A + P = -6.79 + 10 = 3.21\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-12

荷重 P の水平成分と鉛直成分は次のようになる。

$P_H = P \cos 45° = 50 \times \cos 45° = 35.4\ \mathrm{kN}$

$P_V = P \sin 45° = 50 \times \sin 45° = 35.4\ \mathrm{kN}$

支点反力は，力のつり合い式より，次のように求めることができる。

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A - P_V = 0 \qquad \therefore R_A = P_V = 35.4\ \mathrm{kN}$

点Aまわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = P \times r \cos 45° - H_B \times r = 0 \qquad \therefore H_B = P \cos 45° = 50 \times \cos 45° = 35.4\ \mathrm{kN}$

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A + P_H - H_B = 0 \qquad \therefore H_A = -P_H + H_B = -35.4 + 35.4 = 0\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-13

等分布荷重の合力と点 D から合力の作用位置までの距離は次のようになる。

$R = q \times 4 = 5 \times 4 = 20\ \mathrm{kN}, \quad y_0 = 2\ \mathrm{m}$

支点反力は，力のつり合い式より，次のように求めることができる。

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A - R = 0 \qquad \therefore H_A = R = 20\ \mathrm{kN}$

点 D まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 6 - P \times 3 - R \times y_0 = 0$

$$\therefore R_A = \frac{1}{6} \times \left(P \times 3 + R \times y_0\right) = \frac{1}{6} \times (40 \times 3 + 20 \times 2) = 26.7\ \mathrm{kN}$$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_D - P = 0 \qquad \therefore R_D = -R_A + P = -26.7 + 40 = 13.3\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-14

等分布荷重の合力と点 A から合力の作用位置までの距離は次のようになる。

$R = q \times 5 = 10 \times 5 = 50\ \mathrm{kN}, \quad y_0 = 2.5\ \mathrm{m}$

支点反力は，力のつり合い式より，次のように求めることができる。

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A + R = 0 \qquad \therefore H_A = -R = -50\ \mathrm{kN}$

点 D まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 6 - H_A \times 3 - R \times \left(3 - y_0\right) = 0$

$$\therefore R_A = \frac{1}{6} \times \left\{H_A \times 3 + R \times (3 - y_0)\right\} = \frac{1}{6} \times \left\{-50 \times 3 + 50 \times (3 - 2.5)\right\} = -20.8\ \mathrm{kN}$$

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_D = 0 \qquad \therefore R_D = -R_A = 20.8\ \mathrm{kN}$

チャレンジ問題 3-15

点 A には水平部材しか結合されていないので，鉛直方向の支点反力は作用しない。

よって，$\therefore R_A = 0\ \mathrm{kN}$

支点反力は，力のつり合い式より，次のように求めることができる。

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_B - P = 0 \qquad \therefore R_B = P = 40\ \mathrm{kN}$

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = H_A \times 3 + P \times 9 = 0$　　　$\therefore H_A = -P \times 3 = -40 \times 3 = -120$ kN

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A + H_B = 0$　　　$\therefore H_B = -H_A = 120$ kN

チャレンジ問題 3–16

水平方向の力のつり合い式：

$\sum H = H_A = 0$　　　$\therefore H_A = 0$ kN

点 B まわりのモーメントのつり合い式：

$\sum M = R_A \times 12 - P_1 \times 10 - P_2 \times 6 = 0$

$\therefore R_A = \frac{1}{12} \times (P_1 \times 10 + P_2 \times 6) = \frac{1}{12} \times (30 \times 10 + 50 \times 6) = 50$ kN

鉛直方向の力のつり合い式：

$\sum V = R_A + R_B - P_1 - P_2 = 0$

$\therefore R_B = -R_A + P_1 + P_2 = -50 + 30 + 50 = 30$ kN