第２章　断 面 の 性 質

■ 基 本 問 題 解 答 ■

基本問題 2-3

図心位置：

$$x_0 = \frac{A_1 \times x_1 + A_2 \times x_2 + A_3 \times x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{140 \times 12.5 + 100 \times 12.5 + 175 \times 12.5}{140 + 100 + 175} = 12.5\ \text{cm}$$

$$y_0 = \frac{A_1 \times y_1 + A_2 \times y_2 + A_3 \times y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{140 \times 30.5 + 100 \times 17 + 175 \times 3.5}{140 + 100 + 175} = 15.9\ \text{cm}$$

x 軸に関する断面 2 次モーメント：

$$I_x = \sum\left(I_{nxi} + A_i \times y_i^2\right) = \left(I_{nx1} + A_1 \times y_1^2\right) + \left(I_{nx2} + A_2 \times y_2^2\right) + \left(I_{nx3} + A_3 \times y_3^2\right)$$

$$= \left(\frac{20 \times 7^3}{12} + 20 \times 7 \times 30.5^2\right) + \left(\frac{5 \times 20^3}{12} + 5 \times 20 \times 17^2\right) + \left(\frac{25 \times 7^3}{12} + 25 \times 7 \times 3.5^2\right)$$

$$= 165\ 898\ \text{cm}^4 = 1.66 \times 10^5\ \text{cm}^4$$

図心軸（nx 軸）に関する断面 2 次モーメント：

$$I_{nx} = \sum\left\{I_{nxi} + A_i \times \left(y_i - y_0\right)^2\right\}$$

$$= \left\{I_{nx1} + A_1 \times \left(y_1 - y_0\right)^2\right\} + \left\{I_{nx2} + A_2 \times \left(y_2 - y_0\right)^2\right\} + \left\{I_{nx3} + A_3 \times \left(y_3 - y_0\right)^2\right\}$$

$$= \left\{\frac{20 \times 7^3}{12} + 20 \times 7 \times (30.5 - 15.9)^2\right\} + \left\{\frac{5 \times 20^3}{12} + 5 \times 20 \times (17 - 15.9)^2\right\} + \left\{\frac{25 \times 7^3}{12} + 25 \times 7 \times (3.5 - 15.9)^2\right\}$$

$$= 61\ 491\ \text{cm}^4 = 6.15 \times 10^4\ \text{cm}^4$$

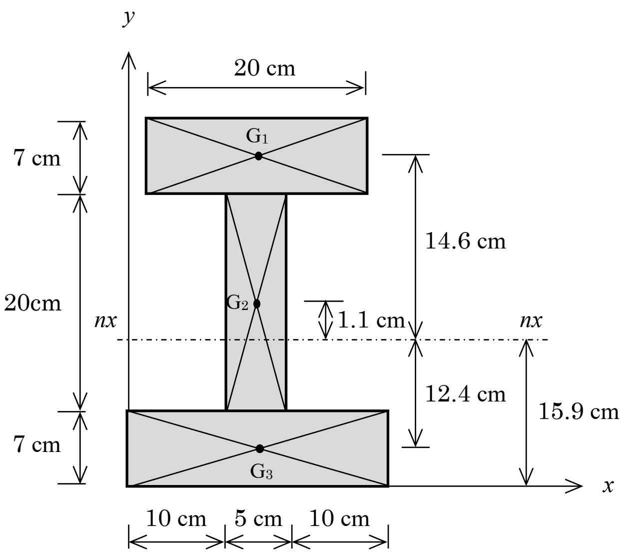


図 2.12　I 型断面の図心軸

基本問題 2-4

図心位置：

$$x_0 = \frac{A_1 \times x_1 + A_2 \times x_2}{A_1 + A_2} = \frac{750 \times 12.5 + 300 \times 31.67}{750 + 300} = 18.0 \text{ cm}$$

$$y_0 = \frac{A_1 \times y_1 + A_2 \times y_2}{A_1 + A_2} = \frac{750 \times 15 + 300 \times 10}{750 + 300} = 13.6 \text{ cm}$$

x 軸に関する断面 2 次モーメント：

$$I_x = \sum\left(I_{nxi} + A_i \times y_i^2\right) = \left(I_{nx1} + A_1 \times y_1^2\right) + \left(I_{nx2} + A_2 \times y_2^2\right)$$

$$= \left(\frac{25 \times 30^3}{12} + 25 \times 30 \times 15^2\right) + \left(\frac{20 \times 30^3}{36} + \frac{1}{2} \times 20 \times 30 \times 10^2\right)$$

$$= 270\ 000 \text{ cm}^4 = 2.70 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

図心軸（nx 軸）に関する断面 2 次モーメント：

$$I_{nx} = \sum\left\{I_{nxi} + A_i \times \left(y_i - y_0\right)^2\right\}$$

$$= \left\{I_{nx1} + A_1 \times \left(y_1 - y_0\right)^2\right\} + \left\{I_{nx2} + A_2 \times \left(y_2 - y_0\right)^2\right\}$$

$$= \left\{\frac{25 \times 30^3}{12} + 25 \times 30 \times \left(15 - 13.6\right)^2\right\} + \left\{\frac{20 \times 30^3}{36} + \frac{1}{2} \times 20 \times 30 \times \left(10 - 13.6\right)^2\right\}$$

$$= 76\ 608 \text{ cm}^4 = 7.66 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

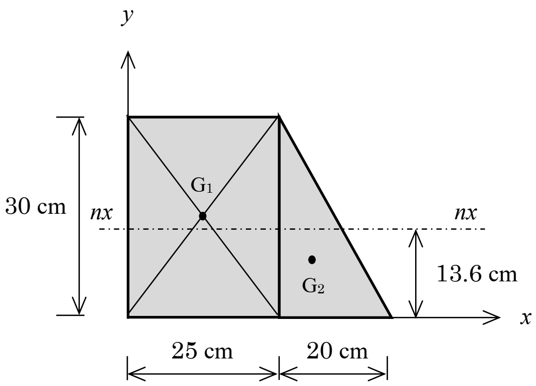


図 2.14　台形断面の図心軸

基本問題 2-6

$$G_x = -2r^3 \int_1^0 t^2 dt = -2r^3 \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0 = \frac{2}{3} r^3$$

$$y_0 = \frac{G_x}{A} = \frac{2r^3/3}{\pi r^2/2} = \frac{4r}{3\pi}$$

$$x_0 = 0$$

$$I_x = \frac{\pi r^4}{8}$$

$$I_{nx} = I_x - A \times y_0^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{\pi r^2}{2} \times \left(\frac{4r}{3\pi}\right)^2 = \frac{\pi r^4}{8} - \frac{8r^4}{9\pi}$$

■ チャレンジ問題解答 ■

チャレンジ問題 2-1

図心位置：

$$x_0 = \frac{A_1 \times x_1 + A_2 \times x_2 + A_3 \times x_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{25 \times 12.5 + 75 \times 7.5 + 125 \times 17.5}{25 + 75 + 125} = 13.6 \text{ cm}$$

$$y_0 = \frac{A_1 \times y_1 + A_2 \times y_2 + A_3 \times y_3}{A_1 + A_2 + A_3} = \frac{25 \times 22.5 + 75 \times 2.5 + 125 \times 12.5}{25 + 75 + 125} = 10.3 \text{ cm}$$

x 軸に関する断面 2 次モーメント：

$$I_x = \sum\left(I_{nxi} + A_i \times y_i^2\right) = \left(I_{nx1} + A_1 \times y_1^2\right) + \left(I_{nx2} + A_2 \times y_2^2\right) + \left(I_{nx3} + A_3 \times y_3^2\right)$$

$$= \left(\frac{5 \times 5^3}{12} + 5 \times 5 \times 22.5^2\right) + \left(\frac{15 \times 5^3}{12} + 15 \times 5 \times 2.5^2\right) + \left(\frac{5 \times 25^3}{12} + 5 \times 25 \times 12.5^2\right)$$

$$= 39\ 375 \text{ cm}^4 = 3.94 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

図心軸（nx 軸）に関する断面 2 次モーメント：

$$I_{nx} = \sum\left\{I_{nxi} + A_i \times \left(y_i - y_0\right)\right\}$$

$$= \left\{I_{nx1} + A_1 \times \left(y_1 - y_0\right)\right\} + \left\{I_{nx2} + A_2 \times \left(y_2 - y_0\right)\right\} + \left\{I_{nx3} + A_3 \times \left(y_3 - y_0\right)\right\}$$

$$= \left\{\frac{5 \times 5^3}{12} + 5 \times 5 \times \left(22.5 - 10.3\right)^2\right\} + \left\{\frac{15 \times 5^3}{12} + 15 \times 5 \times \left(2.5 - 10.3\right)^2\right\} + \left\{\frac{5 \times 25^3}{12} + 5 \times 25 \times \left(12.5 - 10.3\right)^2\right\}$$

$$= 15\ 608 \text{ cm}^4 = 1.56 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

チャレンジ問題 2-2

図心位置：

左右対称断面より，$x_0 = 15$ cm

$$y_0 = \frac{1\ 200 \times 20 - \pi \times 2.5^2 \times 10}{1\ 200 - \pi \times 2.5^2} = 20.2 \text{ cm}$$

長方形断面の x 軸に関する断面 2 次モーメントから，円形断面の断面 2 次モーメントを差し引けばよい。

x 軸に関する断面 2 次モーメント：

$$I_x = \left(I_{nx} + A \times y^2\right)_{\text{長方形}} - \left(I_{nx} + A \times y^2\right)_{\text{円形}}$$

$$= \left(\frac{30 \times 40^3}{12} + 30 \times 40 \times 20^2\right) - \left(\frac{\pi \times 2.5^4}{4} + \pi \times 2.5^2 \times 10^2\right)$$

$$= 638\ 007 = 6.38 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

図心軸（nx 軸）に関する断面 2 次モーメント：

長方形断面の nx 軸に関する断面 2 次モーメントから，円形断面の断面 2 次モーメントを差し引けばよい。

$$I_{nx} = \left\{ I_{nx} + A \times (y - y_0)^2 \right\}_{長方形} - \left\{ I_{nx} + A \times (y - y_0)^2 \right\}_{円形}$$

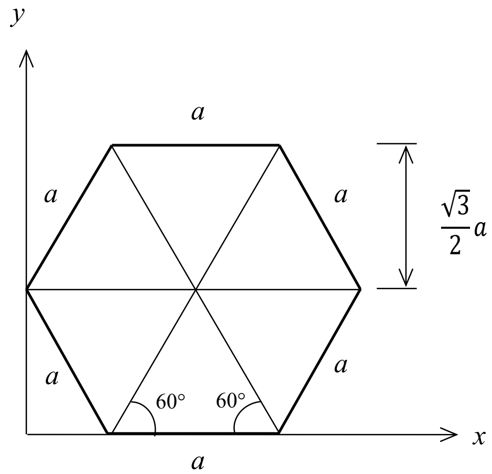
$$= \left\{ \frac{30 \times 40^3}{12} + 30 \times 40 \times (20 - 20.2)^2 \right\} - \left\{ \frac{\pi \times 2.5^4}{4} + \pi \times 2.5^2 \times (10 - 20.2)^2 \right\}$$

$$= 157\,976 = 1.58 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

チャレンジ問題 2-3

解図 W2.1 に示すように，図心位置は，$x_0 = 0, y_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}a$となる。

x 軸に関する断面 2 次モーメントは，正六角形であるので図心位置を中心に 6 つの三角形に分割することができ，正三角形の向きを考えて計算すればよい。



解図 W2.1　6 つの三角形に分割

$$I_x = \sum \left(I_{nxi} + A_i \times y_i^2 \right)$$

$$= \frac{a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^3}{36} + \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2$$

$$+2\left\{ \frac{a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^3}{36} + \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \left(\frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 \right\}$$

$$+2\left\{ \frac{a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^3}{36} + \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2 \right\}$$

$$+\frac{a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^3}{36} + \frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2}a + \frac{2}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2}a \right)^2$$

$$=\frac{23\sqrt{3}}{16}a^4$$

図心軸（nx 軸）に関する断面 2 次モーメントも同様に，6 つの三角形の向きを考えて計算すればよい。

$$I_{nx}=\sum\{I_{nxi}+A_i\times(y_i-y_0)^2\}$$

$$=2\left\{\frac{a\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3}{36}+\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\left(\frac{2}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right\}$$

$$+4\left\{\frac{a\times\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^3}{36}+\frac{1}{2}a\frac{\sqrt{3}}{2}a\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{3}}{2}a\right)^2\right\}$$

$$=\frac{5\sqrt{3}}{16}a^4$$

チャレンジ問題 2-4

nx 軸の位置は**解図 W2.2** を参照して，

$$b=\sqrt{y}$$

$$A=\int_A dy=\int_0^{a^2}bdy=\int_0^{a^2}\sqrt{y}dy=\left[\frac{2}{3}\sqrt{y^3}\right]_0^{a^2}=\frac{2}{3}a^3$$

$$G_x=\int_A ydA=\int_0^{a^2}y\times(b\times dy)=\int_0^{a^2}y^{\frac{3}{2}}dy=\left[\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}}\right]_0^{a^2}=\frac{2}{5}a^5$$

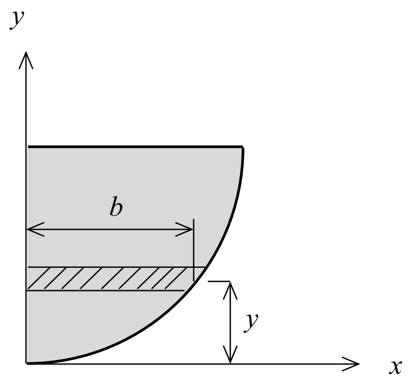
$$y_0=\frac{G_x}{A}=\frac{3}{5}a^2$$

x 軸に関する断面 2 次モーメント：

$$I_x=\int_A y^2dA=\int_0^{a^2}y^2\times(b\times dy)=\int_0^{a^2}y^{\frac{5}{2}}dy=\left[\frac{2}{7}y^{\frac{7}{2}}\right]_0^{a^2}=\frac{2}{7}a^7$$

図心軸（nx 軸）に関する断面２次モーメント：

$$I_{nx}=I_x-A\times y_0^2=\frac{2}{7}a^7-\frac{2}{3}a^3\times(\frac{3}{5}a^2)^2=\frac{8}{175}a^7$$



解図 W2.2　断面

チャレンジ問題 2-5

チャレンジ問題 2–1 より，図心位置：$x_0 = 13.6$ cm，$y_0 = 10.3$ cm

nx 軸に関する断面 2 次モーメント：　$I_{nx} = 15\,608 = 1.56 \times 10^4$ cm^4

ny 軸に関する断面 2 次モーメント：　$I_{ny} = 6\,441 = 6.44 \times 10^3$ cm^4

nx 軸と ny 軸に関する断面相乗モーメント：

$$\begin{aligned}I_{nxny} &= A_1 \times x_{G1}\, y_{G1} + A_2 \times x_{G2}\, y_{G2} + A_3 \times x_{G3}\, y_{G3} \\ &= 5 \times 5 \times (-1.1) \times (-12.2) + 5 \times 15 \times 6.1 \times 7.8 + 25 \times 5 \times (-3.9) \times (-2.2) \\ &= 4\,297 \text{ cm}^4\end{aligned}$$

主軸の方向（**解図 W2.3**）

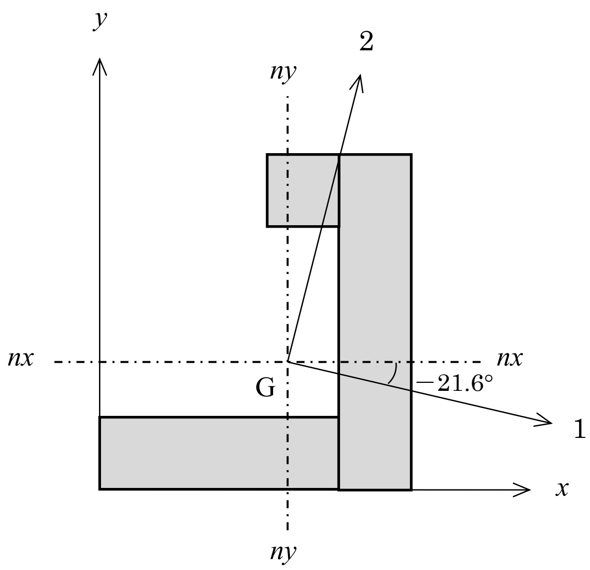
$$\alpha_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\left(\frac{2 \times 4\,297}{6\,441 - 15\,608}\right) = -21.6°$$

$$\alpha_2 = 90° + \alpha_1 = 90° - 21.6° = 68.4°$$

主断面 2 次モーメント

$$\begin{aligned}I_1 &= \frac{1}{2}\left\{(I_{nx} + I_{ny}) + \sqrt{(I_{nx} - I_{ny})^2 + 4I_{nxny}^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(15\,608 + 6\,441) + \sqrt{(15\,608 - 6\,441)^2 + 4 \times 4\,297^2}\right\} = 15\,608 = 1.56 \times 10^4 \text{cm}^4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}I_2 &= \frac{1}{2}\left\{(I_{nx} + I_{ny}) - \sqrt{(I_{nx} - I_{ny})^2 + 4I_{nxny}^2}\right\} \\ &= \frac{1}{2}\left\{(15\,608 + 6\,441) - \sqrt{(15\,608 - 6\,441)^2 + 4 \times 4\,297^2}\right\} = 6\,441 = 6.44 \times 10^3 \text{cm}^4\end{aligned}$$



解図 W2.3　主軸の方向