

演習問題解答

1.1 (解答)

支点 A, B に生じる支点反力は図 1 の 3 つである。

トラス全体において, x, y 方向の力の釣合いと

点 A まわりのモーメントの釣合いは

$$R_{Ax} + R_{Bx} = 0 \quad \text{①}$$

$$R_{Ay} - 2P = 0 \quad \text{②}$$

$$PL + 2PL + R_{Bx} \cdot L = 0 \quad \text{③}$$

②から, $R_{Ay} = 2P$

③から, $R_{Bx} = -3P$

①から, $R_{Ax} = -R_{Bx} = 3P$

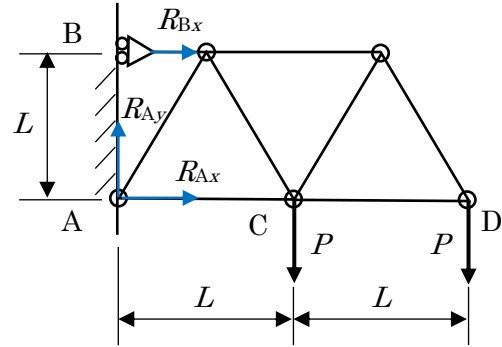


図 1

1.2 (解答)

部材の x 方向, y 方向の力の釣合い, および点 A におけるモーメントの釣合いから

$$x \text{ 方向: } R_{Ax} + 2P = 0 \quad \text{①}$$

$$y \text{ 方向: } R_{Ay} + R_{By} - P = 0 \quad \text{②}$$

モーメント(点 A まわり):

$$-R_{By} \times a + P \times a + P \times b = 0 \quad \text{③}$$

① から, $R_{Ax} = -2P$

③ から, $R_{By} = P \frac{a+b}{a}$

② から, $R_{Ay} = P - R_{By} = -P \times \frac{b}{a}$

1.3 (解答)

部材(はり)の x 方向, y 方向の力の釣合い, および点 B におけるモーメントの釣合いから

$$x \text{ 方向: } R_{Ax} = 0 \quad \text{①}$$

$$y \text{ 方向: } R_{Ay} + R_{By} - P - P = 0 \quad \text{②}$$

モーメント(点 B まわり):

$$R_{Ay} + L - P \times (2/3)L - P(L/3) = 0 \quad \text{③}$$

$$\therefore R_{Ay} = P$$

$$R_{By} = P$$

$$(R_{Ax} = 0)$$

1.4 (解答)

部材の x 方向, y 方向の力の釣合い, および点 A におけるモーメントの釣合いから

$$x \text{ 方向: } R_{Ax} = 0 \quad \text{①}$$

$$y \text{ 方向: } R_{Ay} - P - f \times L = 0 \quad \text{②}$$

モーメント (A 点回り):

$$-M_A + fL \times L/2 + P \times L = 0 \quad \text{③}$$

(注) 分布荷重 f が作用する長さは L であるから, トータル $f \cdot L$ の荷重が長さ方向中央 ($x = L/2$) に作用しているのと静力学的に等価である。

① から, $R_{Ay} = P + fL$

③ から, $M_A = PL + \frac{fL^2}{2}$ ($R_{Ax} = 0$)

1.5 (解答)

部材の x 方向, y 方向の力の釣合い, および点 A におけるモーメントの釣合いから

$$x \text{ 方向: } R_{Ax} = 0 \quad \text{①}$$

$$y \text{ 方向: } R_{Ay} - P = 0 \quad \text{②}$$

$$\text{モーメント: } -M_A + M + P \times L = 0 \quad \text{③}$$

②から, $R_{Ay} = P$

③から, $M_A = M + PL$
($R_{Ax} = 0$)

1.6 (解答)

支点 O に生じる支点反力は図 2 の 2 つである。

ワイヤーには, 図のような張力 T が生じる。

構造物全体において, x, y 方向の力の釣合いと

点 O まわりのモーメントの釣合いは

$$O_{Ax} - T \cos 30^\circ = 0 \quad \text{①}$$

$$O_{Ay} - 2P + T \sin 30^\circ = 0 \quad \text{②}$$

$$P \times (L/2) + P \cdot L - T \sin 30^\circ \times L = 0 \quad \text{③}$$

①から, $O_{Ax} = T \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}T$

③から, $T = 3P$

②から, $O_{Ay} = \frac{P}{2}$, $O_{Ax} = \frac{\sqrt{3}}{2}T = \frac{3\sqrt{3}}{2}P$

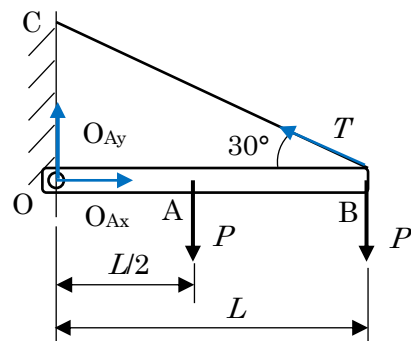


図 2

演習問題解答

2.1 (解答)

垂直応力 σ は

$$\sigma = \frac{P}{A} = \frac{6 \times 10^3}{\pi(0.015^2 - 0.01^2)} = 1.53 \times 10^7 \text{ (Pa)} \quad (15.3 \text{ (MPa)})$$

棒の伸び δ は

$$\delta = \frac{PL}{AE} = \frac{6 \times 10^3 \times 0.3}{\pi(0.015^2 - 0.01^2) \times 210 \times 10^9} = 2.18 \times 10^{-5} \text{ (m)} \quad (0.022 \text{ (mm)})$$

2.2 (解答)

垂直応力 : $\sigma = E \times \varepsilon = 210 \times 10^9 \times (0.1 \times 10^{-3}) = 2.1 \times 10^7 \text{ (Pa)} \quad (21 \text{ (MPa)})$

伸び $\delta = \frac{PL}{AE}$ より, $P = \delta \times \frac{AE}{L}$

断面積 : $A = \pi \times (0.0125^2 - 0.01^2) = 1.77 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)}$

したがって, 引張荷重 P は

$$P = \delta \times \frac{AE}{L} = 0.1 \times 10^{-3} \times 1.77 \times 10^{-4} \times 210 \times 10^9 = 3.72 \times 10^3 \text{ (N)} \quad (3.72 \text{ (kN)})$$

2.3 (解答)

断面積 : $A = 0.02^2 = 4 \times 10^{-4} \text{ (m}^2\text{)}$

垂直応力 : $\sigma = \frac{P}{A} = \frac{6 \times 10^3}{4 \times 10^{-4}} = 1.5 \times 10^7 \text{ (Pa)} \quad (15 \text{ (MPa)})$

ヤング率 : $E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{1.5 \times 10^7}{0.0001} = 1.5 \times 10^{11} \text{ (Pa)} \quad (150 \text{ (GPa)})$

2.4 (解答)

部材①, ②いずれも生じる内力は P である。

各部材が引張荷重 P によって生じる伸びを求め, 和をとる。

部材①の伸び

$$\delta_1 = \frac{P L_1}{A_1 E_1} = \frac{6 \times 10^3 \times 0.2}{\pi 0.015^2 \times 210 \times 10^9} = 8.08 \times 10^{-6} \text{ (m)}$$

部材②の伸び

$$\delta_2 = \frac{P L_2}{A_2 E_2} = \frac{6 \times 10^3 \times 0.1}{\pi 0.005^2 \times 180 \times 10^9} = 4.24 \times 10^{-5} \text{ (m)}$$

全体の伸びは

$$\delta_1 + \delta_2 = 8.08 \times 10^{-6} + 4.24 \times 10^{-5} = 5.05 \times 10^{-5} \text{ (m)} \text{ (0.051 (mm))}$$

2.5 (解答)

必要なボルトの本数を n とすると、物体に作用する重力とボルトの最大発生力の釣り合いから以下の式が得られる。

$$6000 \times 9.8 = \frac{\pi \times 0.012^2}{4} \times 150 \times 10^6 \times n$$

したがって、 $n = 3.46$

ボルトの本数は整数値をとり、4本

2.6 (解答)

垂直ひずみは、 $\varepsilon = \frac{0.5}{1000} = 5 \times 10^{-4}$

横ひずみは、 $\varepsilon' = \frac{-0.015}{100} = -1.5 \times 10^{-4}$

したがってポアソン比は

$$\nu = \left| \frac{\varepsilon'}{\varepsilon} \right| = 0.3$$

演習問題解答

3.1 (解答)

式(3.1)で、断面積 $A(x) = a^2$ (一定)とにおいて、軸力 N は

$$N(x) = P + \int_0^x \rho A(x) g dx = P + \rho a^2 g x$$

式(3.3)から

$$\delta = \int_0^L \frac{N(x)}{AE} dx = \int_0^L \frac{(P + \rho a^2 g x)}{a^2 E} dx = \frac{P}{a^2 E} L + \frac{\rho g}{2E} L^2$$

3.2 (解答)

図のように x 座標をとると、座標 x における断面積は

$$A(x) = \left(0.5 + \frac{1-0.5}{3} x\right)^2 = (0.5 + 0.17x)^2$$

上端の変位 δ は式(3.3)から

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^h \frac{P}{A(x)E} dx = \frac{P}{E} \int_0^3 (0.5 + 0.17x)^{-2} dx = -\frac{P}{0.17 \times E} [(0.5 + 0.17x)^{-1}]_0^3 \\ &= -\frac{1000 \times 10^3}{0.17 \times 30 \times 10^9} \times -1.01 = 1.98 \times 10^{-4} \text{ (m) (0.198 mm)} \end{aligned}$$

3.3 (解答)

左右の棒に生ずる軸力を N_1, N_2 とする(上向き+)。

力の釣合いから

$$N_1 + N_2 - P = 0 \quad \text{①}$$

変位の条件として、2本の棒の伸びは等しいから、式(2.6)より

$$\frac{N_1 L}{AE_1} = \frac{N_2 L}{AE_2} \quad \text{②}$$

①, ②から

$$N_1 = \frac{PE_1}{E_1 + E_2}, \quad N_2 = \frac{PE_2}{E_1 + E_2}$$

3.4 (解答)

棒における力の釣合いから

$$-R_1 + P + R_2 = 0 \quad \text{①}$$

図の①～③の各部に生ずる伸びを $\delta_1 \sim \delta_3$ とすると、式(2.6)から

$$\delta_1 = \frac{R_1 L_1}{A_1 E_1}, \quad \delta_2 = \frac{R_1 L}{A_2 E_2}, \quad \delta_3 = \frac{R_2 L}{A_2 E_2}$$

変位の条件(両端固定)から

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 0 \quad \text{②}$$

①, ②から

$$R_1 = \frac{PL}{A_2 E_2} \left(\frac{L_1}{A_1 E_1} + \frac{2L}{A_2 E_2} \right)^{-1}$$

$$R_2 = \frac{PL}{A_2 E_2} \left(\frac{L_1}{A_1 E_1} + \frac{2L}{A_2 E_2} \right)^{-1} - P$$

3.5 (解答)

この問題は静定である。水平方向および鉛直方向の力の釣合いは

$$-N_1 \sin 30^\circ + N_2 \sin 60^\circ + P = 0 \quad \text{①}$$

$$N_1 \cos 30^\circ + N_2 \cos 60^\circ = 0 \quad \text{②}$$

①, ②から

$$N_1 = \frac{P}{2}, \quad N_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} P$$

3.6 (解答)

温度変化(ΔT)と荷重(R)が同時に作用した時の部材①, ②の伸びを δ_1, δ_2 とす

る。式(3.6)から

$$\delta_1 = -\frac{RL}{AE_1} + \alpha_1 \Delta TL, \quad \delta_2 = -\frac{RL}{AE_2} + \alpha_2 \Delta TL$$

変位の条件(両端固定)から

$$\delta_1 + \delta_2 = 0$$

即ち

$$-\frac{RL}{AE_1} + \alpha_1 \Delta TL - \frac{RL}{AE_2} + \alpha_2 \Delta TL = 0$$

$$\therefore R = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2) \Delta T}{\frac{1}{AE_1} + \frac{1}{AE_2}}$$

3.7 (解答)

ボルトについては添字を1, 円管については添字を2として示す。

ボルトと円管の変形量 δ は

$$\delta_1 = \alpha_1 \Delta TL, \quad \delta_2 = \alpha_2 \Delta TL$$

$\alpha_1 < \alpha_2$ であるから, 無荷重の場合は円管の方の変位が大きい。

しかしナットで拘束され両者の変位は等しいため, 円管は圧縮力 $-P$, ボルトは引張力 P を受ける。 ($P = 50 \times 10^6 \times A_2 \times 10^{-6} = 1500 \text{ N}$)

これらの力による変形量は, 式(2.6)から

$$\delta_1 = \frac{PL}{A_1 E_1}, \quad \delta_2 = -\frac{PL}{A_2 E_2}$$

熱および荷重による変位の和はボルトと円管では等しいから, 式(3.6)より

$$\alpha_1 \Delta TL + \frac{PL}{A_1 E_1} = \alpha_2 \Delta TL - \frac{PL}{A_2 E_2}$$

これを ΔT について解くと

$$\Delta T = \frac{P}{\alpha_2 - \alpha_1} \left(\frac{1}{A_1 E_1} + \frac{1}{A_2 E_2} \right) = \frac{1500}{6 \times 10^{-6}} \left(\frac{1}{50 \times 10^{-6} \times 210 \times 10^9} + \frac{1}{30 \times 10^{-6} \times 130 \times 10^9} \right) = 87.9 \text{ }^\circ\text{C}$$

演習問題

4.1 (解答)

$A = \frac{\pi d^4}{4}$, $Q = T/(D/2)$ であるから

ボルトのせん断応力は, $\tau = Q/A = \frac{8T}{\pi d^2 D} = \frac{8 \times 20}{\pi \times 0.01^2 \times 0.05} = 10.2 \times 10^6$ (Pa)

せん断ひずみは, $\gamma = \tau/G = \frac{10.2 \times 10^6}{80 \times 10^9} = 1.28 \times 10^{-4}$

4.2 (解答)

ボルト 1 本の許容せん断力は

$$F = \tau_a \times \frac{\pi d^4}{4} = 80 \times 10^6 \times \frac{\pi \times 0.012^4}{4} = 9.05 \times 10^3 \text{ (N)}$$

ボルトは n 本で回転中心からの距離は $D/2$ であるから, トルク (T) の釣合いから

$$n \times F \times \frac{D}{2} = T$$

$$n = \frac{2T}{FD} = \frac{2 \times 7 \times 10^3}{9.05 \times 10^3 \times 0.2} = 7.73$$

したがって, 必要なボルトの本数は 8 本である。

4.3 (解答)

式(4.10)より

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2}$$

$$M_t = \frac{2 \times \tau_{\max} \times I_p}{d} = \frac{\pi d^3}{16} \tau_{\max} = \frac{\pi \times (35 \times 10^{-3})^3}{16} \times 75 \times 10^6 = 631 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

4.4 (解答)

内径は $35 - (5 \times 2) = 25$ (mm) である。

外径, 内径の断面 2 次モーメントを I_{p1}, I_{p2} とすると

$$I_p = I_{p1} - I_{p2} = \frac{\pi \{(35 \times 10^{-3})^4 - (25 \times 10^{-3})^4\}}{32} = 1.09 \times 10^{-7} \text{ (m}^4\text{)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2} \text{ より}$$

$$M_t = \frac{2\tau_{\max} \times I_p}{d} = \frac{2 \times 75 \times 10^6 \times 1.09 \times 10^{-7}}{35 \times 10^{-3}} = 467 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

4.5 (解答)

d_1 部に作用するねじれモーメントは $2M_t$, d_2 部に作用するねじれモーメントは M_t である。各部に生ずるねじれ角の和が全体のねじれ角となる。

各部の断面 2 次極モーメントは

$$I_{p1} = \frac{\pi d_1^4}{32} = 7.95 \times 10^{-8} \text{ (m}^4\text{)}, I_{p2} = \frac{\pi d_2^4}{32} = 1.57 \times 10^{-8} \text{ (m}^4\text{)}$$

d_1 部に生ずるねじれ角は式(4.9)から

$$\theta_1 = \frac{2M_t \times 0.5}{GI_{p1}} = \frac{2 \times 500 \times 0.5}{75 \times 10^9 \times 7.95 \times 10^{-8}} = 0.084 \text{ (rad)}$$

d_2 部に生ずるねじれ角は

$$\theta_2 = \frac{M_t \times 0.3}{GI_{p2}} = \frac{500 \times 0.3}{75 \times 10^9 \times 1.57 \times 10^{-8}} = 0.13 \text{ (rad)}$$

したがって

$$\theta = \theta_1 + \theta_2 = 0.21 \text{ (rad) (12.3}^\circ\text{)}$$

4.6 (解答)

区間 AB に生ずるねじりモーメントは $2M_t$, 区間 BC に生ずるねじりモーメントは M_t となる。

ねじれ角の式(4.9)およびせん断応力の式(4.10)より各部の値は以下となる。

$$\theta_{AB} = \frac{2M_t L/2}{GI_{p1}} = \frac{32M_t L}{G \pi d^4 (2^4 - 0.5^4)} = \frac{2.01 M_t L}{\pi d^4 G}$$

$$\theta_{BC} = \frac{M_t \times L/2}{GI_{p2}} = \frac{32M_t L/2}{\pi d^4 G} = \frac{16M_t L}{\pi d^4 G}$$

したがって全体のねじれ角は

$$\theta_{\text{total}} = \theta_{AB} + \theta_{BC} = \frac{18.01 M_t L}{\pi d^4 G}$$

せん断応力は

$$\tau_{AB} = \frac{2M_t}{I_{p1}} \times \frac{2d}{2} = \frac{4.02 M_t}{\pi d^3}$$

$$\tau_{BC} = \frac{M_t}{I_{p2}} \times \frac{d}{2} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

せん断応力の最大値は、大きい方の値をとって

$$\tau_{\max} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

4.7 (解答)

軸のねじれ角を rad 単位に変換すると、 $1.5/57.3 = 0.0262$ (rad)

式(4.9)より

$$\theta = \frac{M_t \times L}{G \times I_p} = \frac{M_t \times L \times 32}{G \times \pi d^4} = \frac{3000 \times 1.5 \times 32}{80 \times 10^9 \times \pi d^4} \leq 0.0262 \text{ (rad)}$$

$$\therefore d = 6.84 \times 10^{-2} \text{ (m)} \quad (68.4 \text{ (mm)})$$

4.8 (解答)

図1に示したように点A, Bの反力のモーメントを M_A, M_B とする。ただし, M_A, M_B のねじりの向きを+とする。

(1)長さ a の区間の任意の断面においては, その断面で切断した部分のモーメントの釣合いから, 内力のモーメントは $-M_A$ となる。

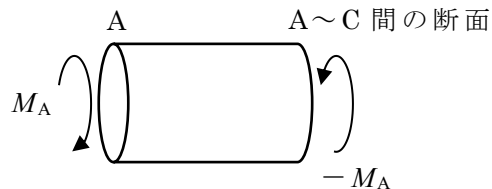


図 1

(2)長さ b の区間の任意の断面においても同様に, 内力のモーメントは $M_t - M_A$ となる ($M_A - M_t + M_B = 0$ より)。

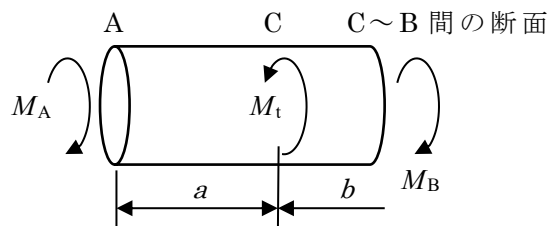


図 2

(3) 長さ c の区間の任意の断面における内力のモーメントは $-M_B$ となる。

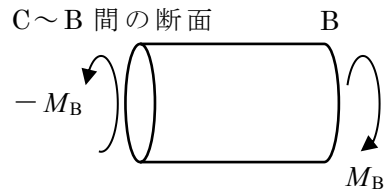


図 3

棒全体のモーメントの釣り合いから

$$M_A - M_t - M_t + M_B = 0 \quad \text{①}$$

長さ a, b, c の各区間のねじれ角を $\theta_a, \theta_b, \theta_c$ とすると、両端固定の条件から

$$\theta_a + \theta_b + \theta_c = 0 \quad \text{②}$$

(1)において、点 C におけるねじれ角は点 A を基準として

$$\theta_a = -\frac{a \times M_A}{G I_p} \quad \text{(注) } M_A \text{ の方向を+とする。}$$

(2)において、点 D におけるねじれ角は点 C を基準として

$$\theta_b = \frac{b \times (M_t - M_A)}{G I_p} \quad \text{(注) } M_A \text{ の方向を+とする。}$$

(3)において、点 B におけるねじれ角は点 D を基準として

$$\theta_c = \frac{c \times M_B}{G I_p} \quad \text{(注) } M_A \text{ の方向を+とする。}$$

(注) I_p は断面 2 次極モーメント

これらを②へ代入すると

$$-a \times M_A + b (M_t - M_A) + c \times M_B = 0 \quad \text{②'}$$

①, ②' を連立して解くと

$$M_A = \frac{b + 2c}{a + b + c} M_t$$

$$M_B = \frac{2a + b}{a + b + c} M_t$$

4.9 (解答)

軸外径を d とすると、内径は $0.5d$ となる。

この軸の断面 2 次極モーメントは

$$I_p = \frac{\pi d^4(1 - 0.5^4)}{32} = 9.20 \times 10^{-2} \times d^4 \text{ (m}^4\text{)}$$

式(4.14)より

$$T = \frac{H}{\omega} = \frac{1.5 \times 10^5}{2\pi \times 200/60} = 7.16 \times 10^3 \text{ (N} \cdot \text{m)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{T}{I_p} \times \frac{d}{2} = \frac{7.16 \times 10^3}{9.20 \times 10^{-2} \times d^4} \times \frac{d}{2} = \frac{7.16 \times 10^3}{18.4 \times 10^{-2} \times d^3} = 75 \times 10^6$$

$$\therefore d = 8.04 \times 10^{-2} \text{ (m) (80.4 (mm))}$$

演習問題解答

5.1 (解答)

例題 5.3(b-2)の解答により、BMD は $x = L/2$ において最大となる。最大値は $fL^2/8$ である。断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{\pi d^4(1-(2/3)^4)}{64} = 1.25 \times 10^{-2} \pi d^4$$

したがって最大曲げ応力は

$$\sigma_{\max} = \frac{M(x)_{\max}}{I} \times \frac{d}{2} = \frac{fL^2}{8} \times \frac{1}{1.25 \times 10^{-2} \pi d^4} \times \frac{d}{2} = \frac{5fL^2}{d^3}$$

5.2 (解答)

全体(幅 b 、高さ h の長方形)の断面 2 次モーメントを I_A 、上下の四角形(幅 b_1 、高さ h_1) の断面 2 次モーメントを I_B とする。

平行軸の定理により I_B は

$$I_B = \frac{b_2 h_1^3}{12} + b_2 h_1 \times \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2$$

したがって H 型の断面 2 次モーメントは

$$I = I_A - 2 \times I_B = \frac{bh^3}{12} - 2 \times \left\{ \frac{b_2 h_1^3}{12} + b_2 h_1 \times \left(\frac{h_1 + h_2}{2}\right)^2 \right\}$$

5.3 (解答)

内力のモーメントは、モーメントの釣合いから

$$-M_0 - Px - \frac{f}{2} x^2 + M(x) = 0$$

$$\therefore M(x) = \frac{f}{2} x^2 + Px + M_0$$

これをはりのたわみの基本式に代入して 2 回積分すると

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = -\frac{M_1(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{2} x^2 + Px + M_0 \right)$$

$$v' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{6} x^3 + \frac{P}{2} x^2 + M_0 x + C_1 \right)$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{24}x^4 + \frac{P}{6}x^3 + \frac{M_0}{2}x^2 + C_1x + C_2 \right)$$

境界条件： $x = L$ で $v' = 0$, $v = 0$ から

$$C_1 = -\frac{fL^3}{6} - \frac{PL^2}{2} - M_0L$$

$$C_2 = \frac{fL^4}{8} + \frac{PL^3}{3} + \frac{M_0L^2}{2}$$

たわみ v の式に $x = 0$ を代入して

$$v(0) = -\frac{C_2}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{fL^4}{8} + \frac{PL^3}{3} + \frac{M_0L^2}{2} \right)$$

5.4 (解答)

この問題は対称性が使えるため、 $0 \leq x \leq L/2$ の範囲で考える。

y 方向の釣合いから、点 A の支点反力： $R_A = \frac{P+fL}{2}$

内力モーメントは、モーメントの釣合いから

$$R_Ax - \frac{f}{2}x^2 + M(x) = 0$$

$$\therefore M(x) = \frac{f}{2}x^2 - R_Ax$$

これをはりのたわみの基本式に代入して 2 回積分する。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{2}x^2 - R_Ax \right)$$

$$v' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{6}x^3 - \frac{R_A}{2}x^2 + C_1 \right)$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{24}x^4 - \frac{R_A}{6}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

境界条件： $x = 0$ で $v = 0$, $x = L/2$ で $v' = 0$ から

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{fL^3}{24} + \frac{PL^2}{16}$$

したがって

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{f}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^4 - \frac{P+fL}{12} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{fL^3}{24} + \frac{PL^2}{16}\right) \frac{L}{2} \right\} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{5fL^4}{384} + \frac{PL^3}{48} \right)$$

5.5 (解答)

点 A, B の支点反力を R_A, R_B とする。

力およびモーメント (点 B まわり) の釣合いから

$$R_A + R_B = 0$$

$$-M_0 + R_A \times L + M_0 = 0$$

したがって, $R_A = R_B = 0$

内力のモーメントは

$$M(x) = M_0$$

これをはりのたわみの基本式に代入して 2 回積分する。

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} M_0$$

$$v' = -\frac{1}{EI} (M_0x + C_1)$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{M_0}{2} x^2 + C_1x + C_2 \right)$$

境界条件: $x = 0$ で $v = 0$, $x = L$ で $v = 0$ から

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = -\frac{M_0L}{2}$$

(注) 対称性も使える. この場合は, 境界条件 $x = L$ で $v = 0$ の代わりに $x = L/2$ で $v' = 0$ を使う。

したがって

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{M_0}{2} \left(\frac{L}{2}\right)^2 - \frac{M_0L}{2} \frac{L}{2} \right\} = \frac{M_0L^2}{8EI}$$

5.6 (解答)

反力を求める。対称性から

$$R_A = R_B = \frac{1}{2} \frac{fL}{2} = \frac{fL}{4}$$

$0 \leq x \leq L/2$ の範囲で内力モーメントを求める。

図より

$$R_A x - \frac{f}{L} x^2 \times \frac{x}{3} + M(x) = 0$$

$$\text{したがって, } M(x) = \frac{f}{3L} x^3 - \frac{fL}{4} x$$

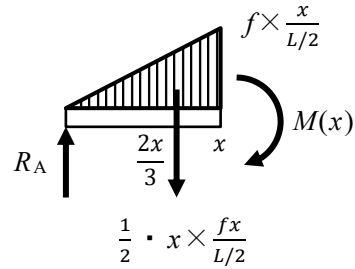


図 自由体図

これをはりのたわみの基本式に代入して2回積分すると

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{3L} x^3 - \frac{fL}{4} x \right)$$

$$v' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{12L} x^4 - \frac{fL}{8} x^2 + C_1 \right)$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{60L} x^5 - \frac{fL}{24} x^3 + C_1 x + C_2 \right)$$

境界条件： $x = 0$ で $v = 0$, $x = L/2$ で $v' = 0$ から

$$C_2 = 0$$

$$C_1 = \frac{5fL^3}{192}$$

したがって

$$v\left(\frac{L}{2}\right) = -\frac{1}{EI} \left\{ \frac{f}{60L} \left(\frac{L}{2}\right)^5 - \frac{fL}{24} \left(\frac{L}{2}\right)^3 + \frac{5fL^3 L}{192 \cdot 2} \right\} = -\frac{fL^4}{120EI}$$

5.7 (解答)

2つの荷重 P が個々に作用した場合のたわみを求めて、重ね合わせの原理によって解を求める。

(注)通常の解き方では、2区間($x = 0 \sim L/2$ および $x = L/2 \sim L$)の問題となり計算量が多くなる。)

(1) 片持ちはりの自由端 ($x = 0$) に荷重 P のみが作用した場合の自由端のたわみ v_1

例題 5.12(a-1)の結果により

$$v_1(0) = -\frac{PL^3}{3EI}$$

(2) $x = L/2$ に荷重 P のみが作用した場合の自由端のたわみ v_2

$x = L/2$ の位置に生ずるたわみ角およびたわみは、例題 5.12(a-1)の結果により

$$v_2' \left(\frac{L}{2} \right) = \frac{P}{2EI} \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{PL^2}{8EI}$$

$$v_2 \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{P}{3EI} \left(\frac{L}{2} \right)^3 = -\frac{PL^3}{24EI}$$

したがって、この場合における自由端のたわみは

$$v_2(0) = v_2 \left(\frac{L}{2} \right) - \frac{L}{2} \times v_2' \left(\frac{L}{2} \right) = -\frac{PL^3}{24EI} - \frac{L}{2} \times \frac{PL^2}{8EI} = -\frac{5PL^3}{48EI}$$

(1), (2)の場合のたわみの和をとり

$$v(0) = v_1(0) + v_2(0) = -\frac{7PL^3}{16EI}$$

5.8 (解答)

この問題では、はりの張り出し部に荷重が作用していないので、 x 座標の原点を点 B とする。

はりの中央部は分布荷重を受ける単純支持はりであるから、点 B のたわみ角は例題 5.12(b-2)の結果から

$$v_B' = -\frac{f}{24EI} L^3$$

自由端 A でのたわみは、はり AB 部が直線のままたわみ角 v_B' 傾くことで生ずる。したがって

$$v_A = -\frac{L}{4} \times v_B' = \frac{f}{96EI} L^4$$

5.9 (解答)

このはり是对称性が使えるので、区間 AC (C: 中点) で考える。

点 B における反力は

$$R_A = R_B = P$$

(i) 区間 AB において、内力モーメントは、 $M_1(x) = Px$

これをはりのたわみの基礎式に代入して 2 回積分すると、

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{M_1(x)}{EI} = -\frac{Px}{EI}$$

$$v_1' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{P}{2}x^2 + C_1 \right)$$

$$v_1 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{P}{6}x^3 + C_1x + C_2 \right)$$

(ii) 区間 BC において内力モーメント $M_2(x)$ は

$$-Px + R_B \left(x - \frac{L}{4} \right) + M_2(x) = 0 \quad \text{より,} \quad M_2(x) = \frac{PL}{4}$$

これをはりのたわみの基本式に代入して 2 回積分すると

$$\frac{d^2v_2}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \frac{PL}{4}$$

$$v_2' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{4}x + C_3 \right)$$

$$v_2 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{PL}{8}x^2 + C_3x + C_4 \right)$$

$$\text{境界条件: } x = L/4 \text{ で } v_1 = v_2 = 0 \quad \text{①, ②}$$

$$x = 3L/4 \text{ (点 C) で } v_2' = 0 \quad \text{③}$$

$$\text{連続の条件: } x = L/4 \text{ で, } v_1' = v_2' \quad \text{④}$$

$$\text{①から, } \frac{P}{6} \left(\frac{L}{4} \right)^3 + C_1 \frac{L}{4} + C_2 = 0$$

$$\textcircled{2} \text{ から, } \frac{PL}{8} \left(\frac{L}{4}\right)^2 + C_3 \left(\frac{L}{4}\right) + C_4 = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ から, } \frac{PL}{4} \frac{3L}{4} + C_3 = 0$$

$$\textcircled{4} \text{ から, } \frac{P}{2} \left(\frac{L}{4}\right)^2 + C_1 = \frac{PL}{4} \frac{L}{4} + C_3$$

これらを連立して解くと

$$C_1 = -\frac{5PL^2}{32}, \quad C_2 = \frac{7PL^3}{192}$$

$$C_3 = -\frac{3PL^2}{16}, \quad C_4 = \frac{5PL^3}{128}$$

これより点 A のたわみは

$$v_1(0) = -\frac{C_2}{EI} = -\frac{7PL^3}{192EI}$$

5.10 (解答)

反力を求める。

$$y \text{ 方向の力の釣合い: } -2fL + R_A + R_B = 0$$

$$(\text{点 B まわり}) \text{ モーメントの釣合い: } R_A \cdot L + 2fL \times 0 = 0$$

これより

$$R_A = 0, R_B = 2fL$$

区間 AB ($0 \leq x \leq L$) の範囲での内力モーメントは

$$M_1(x) = \frac{1}{2} \cdot fx^2$$

区間 BC ($L \leq x \leq 2L$) の範囲での内力モーメントは

$$M_2(x) = (1/2)fx^2 - 2fLx + 2fL^2$$

各区間において、内力のモーメントをはりのたわみの基礎式に代入して、2回積分する。

(i) 区間 AB

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{2}x^2\right)$$

$$v_1' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{6}x^3 + C_1\right)$$

$$v_1 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{24} x^4 + C_1 x + C_2 \right)$$

(ii) 区間 BC

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{2} x^2 - 2fLx + 2fL^2 \right)$$

$$v_2' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{6} x^3 - fLx^2 + 2fL^2 x + C_3 \right)$$

$$v_2 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{24} x^4 - \frac{fL}{3} x^3 + fL^2 x^2 + C_3 x + C_4 \right)$$

積分定数 $C_1 \sim C_4$ を境界条件および連続の条件で求める。

$$\text{境界条件 : } x = 0 \text{ で } v_1 = 0 \quad \text{①}$$

$$x = L \text{ で } v_1 = v_2 = 0 \quad \text{②, ③}$$

$$\text{連続の条件 : } x = L \text{ で, } v_1' = v_2' \quad \text{④}$$

$$\text{①から, } C_2 = 0, \text{ ②から, } C_1 = -L^3/24$$

$$\text{③, ④から, } C_3 = -25L^3/24, C_4 = L^4/3$$

自由端 C のたわみは

$$v_2(2L) = -\frac{fL^4}{4EI}$$

5.11 (解答)

点 C のたわみを δ (上向き) とすると, 点 C は荷重 P とばねからの反力 $k \cdot \delta$ (向き: 下) を受けている。即ち, 点 C に $P + k \cdot \delta$ の下向き荷重が作用して, たわみが δ である。

単純支持はりのたわみの結果から

$$\delta = -\frac{(P + k\delta)L^3}{48EI}$$

これより δ を求めると

$$\delta = -\frac{PL^3}{48EI + kL^3}$$

演習問題解答

6.1 (解答)

対称性により反力は

$$R_A = R_B = P/2, M_A = M_B$$

M_A は釣合いの式から求まらないので未知数とする。

区間 $0 \sim x$ におけるモーメントの釣合いから

$$-M_A + R_A \cdot x + M(x) = 0$$

$$M(x) = -\frac{P}{2}x + M_A$$

たわみの基本式(5.16)に代入して

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{M(x)}{EI} = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{2}x + M_A\right)$$

$$v' = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{4}x^2 + M_Ax + C_1\right)$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{1}{2}M_Ax^2 + C_1x + C_2\right)$$

境界条件： $x=0$ のとき、 $v' = v = 0$ から、 $C_1 = C_2 = 0$

$$x = L/2 \text{ のとき、 } v' = 0 \text{ から、 } M_A = PL/8$$

したがって、 $v = -\frac{1}{EI} \left(-\frac{P}{12}x^3 + \frac{PL}{16}x^2\right)$

$$x = L/2 \text{ を代入して、 } v = -\frac{PL^3}{192EI}$$

6.2 (解答)

反力 R_A は未知数とすると、内力モーメント $M(x)$ は

$$-M_0 + R_A \cdot x - \frac{fx^2}{2} + M(x) = 0$$

$$M(x) = \frac{fx^2}{2} - R_A \cdot x + M_0$$

たわみの基本式に代入して

$$\frac{d^2v}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{2}x^2 - R_Ax + M_0\right)$$

$$v' = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{6} x^3 - \frac{R_A}{2} x^2 + M_0 x + C_1 \right)$$

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{f}{24} x^4 - \frac{R_A}{6} x^3 + \frac{1}{2} M_0 x^2 + C_1 x + C_2 \right)$$

境界条件： $x = 0$ のとき， $v = 0$ から， $C_2 = 0$

$x = L$ のとき， $v' = v = 0$ より

$$R_A = \frac{3fL}{8} + \frac{3M_0}{2L}$$

$$C_1 = \frac{fL^3}{48} - \frac{M_0L}{4}$$

たわみの式に $x = L/2$ を代入して

$$v = -\frac{1}{EI} \left(\frac{fL^4}{192} - \frac{M_0L^2}{32} \right)$$

6.3 (解答)

問題における不静定はりは， 図 1 に示すようにモーメント荷重を受ける単純支持はりの重ね合わせと等価である。



(i) 両端に M_A, M_B が作用する単純支持はり (ii) 中点に M_0 が作用する単純支持はり

図 1 固定-固定はりの重ね合わせ法による置換え

(i) まず両端にモーメント荷重 M_A, M_B を受ける単純支持はりを考える。

支点反力 R_A, R_B を y 方向の力の釣合いから求めると

$$R_A = \frac{1}{L} (M_A - M_B), R_B = -\frac{1}{L} (M_A - M_B)$$

したがって内力モーメントは， $M(x) = M_A - (M_A - M_B) \frac{x}{L}$

これをたわみの基本式に代入して積分すると

$$\frac{d^2v_1}{dx^2} = -\frac{1}{EI} \left(M_A - (M_A - M_B) \frac{x}{L} \right)$$

$$v_1' = -\frac{1}{EI} \left(M_A x - (M_A - M_B) \frac{x^2}{2L} + C_1 \right)$$

$$v_1 = -\frac{1}{EI} \left(\frac{M_A x^2}{2} - (M_A - M_B) \frac{x^3}{6L} + C_1 x + C_2 \right)$$

境界条件： $x = 0$ および $x = L$ で $v = 0$ から

$$C_1 = -\frac{1}{6}(2M_A + M_B)L, C_2 = 0$$

したがってたわみ角は

$$v_1' = \frac{L}{6EI} \left\{ 3(M_A - M_B) \frac{x^2}{L^2} - 6M_A \frac{x}{L} + (2M_A + M_B) \right\} \quad \textcircled{1}$$

(ii) はりの中間部にモーメント荷重 M_0 を受ける単純支持はりを考える。

反力を R_A, R_B として、はりにおける釣合いの式をたてると

$$R_A + R_B = 0, R_A \cdot L - M_0 = 0$$

したがって、

$$R_A = -R_B = M_0/L$$

区間 $0 \leq x \leq L/2$ における内力モーメント $M_1(x)$ は

$$M_1(x) = -\frac{M_0}{L} x$$

これをたわみの基本式に代入して2回積分すると

$$\frac{d^2 v_1}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \frac{x}{L}$$

$$v_1' = \frac{M_0}{EIL} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right)$$

$$v_1 = \frac{M_0}{EIL} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right)$$

区間 $L/2 \leq x \leq L$ における内力モーメント $M_2(x)$ は

$$M_2(x) = -\frac{M_0}{L} (x - L)$$

これをたわみの基本式に代入して2回積分すると

$$\frac{d^2 v_2}{dx^2} = \frac{M_0}{EI} \frac{(x-L)}{L}$$

$$v_2' = \frac{M_0}{EIL} \left\{ \frac{(x-L)^2}{2} + C_3 \right\}$$

$$v_2 = \frac{M_0}{EIL} \left\{ \frac{(x-L)^3}{6} + C_3(x-L) + C_4 \right\}$$

境界条件： $x = 0$ で $v_1 = 0$, $x = L$ で $v_2 = 0$

連続の条件： $x = L/2$ で $v_1' = v_2'$, $v_1 = v_2$

これらから

$$C_1 = -\frac{L^2}{24}, C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{L^2}{24}, C_4 = 0$$

したがってたわみ角は

$$\text{区間 } 0 \leq x \leq L/2 \text{ で, } v_1' = \frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{L^2}{24} \right) \quad \textcircled{2}$$

$$\text{区間 } L/2 \leq x \leq L \text{ で, } v_2' = \frac{M_0}{EI} \left\{ \frac{(x-L)^2}{2} - \frac{L^2}{24} \right\} \quad \textcircled{3}$$

(1) および (2) のたわみ角の式①, ②, ③に $x = 0$ および L を代入すると各はりにおける両端 A, B のたわみ角は

$$(1) \text{ のたわみ角: } \theta_{1A} = \frac{(2M_A + M_B)L}{6EI}, \quad \theta_{1B} = -\frac{(M_A + 2M_B)L}{6EI}$$

$$(2) \text{ のたわみ角: } \theta_{2A} = -\frac{M_0L}{24EI}, \quad \theta_{2B} = -\frac{M_0L}{24EI}$$

(i) における両端のたわみ角 θ_{1A}, θ_{1B} , (ii) における両端のたわみ角を θ_{2A}, θ_{2B} において, はりは両端固定であるから

$$\theta_{1A} + \theta_{2A} = 0 \quad \text{および} \quad \theta_{1B} + \theta_{2B} = 0$$

したがって

$$M_A = \frac{M_0}{4}, \quad M_B = -\frac{M_0}{4}$$

支点反力は最初に導いた R_A, R_B に M_A, M_B を代入して

$$R_A = \frac{M_0}{2L}, \quad R_B = -\frac{M_0}{2L}$$

6.4 (解答)

はりは図 2 に示す各荷重を受ける片持ちはりの重ね合わせと等価である。

各はりの先端 ($x=0$) におけるたわみをそれぞれ, v_1, v_2, v_3 とすれば, 重ね合わせた先端のたわみが 0 であることから, 反力 R_A が求められる。

(i) 三角形の分布荷重を受ける片持ちはりの先端のたわみは, 例題 5.15 より

$$v_1 = -\frac{fL^4}{30EI}$$

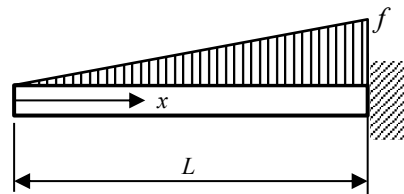


図 2

(ii) 曲げモーメント M_0 を受ける片持ちはり先端のたわみは, 例題 5.12(a-3) より

$$v_2 = -\frac{M_0 L^2}{2EI}$$

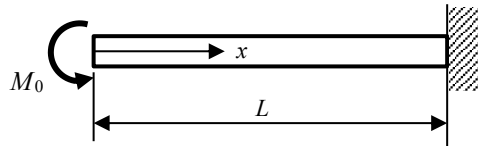


図 3

(3) 集中荷重 R_A を受ける片持ちはり先端のたわみは、例題 5.12(a-1) より

$$v_3 = \frac{R_A L^3}{3EI}$$

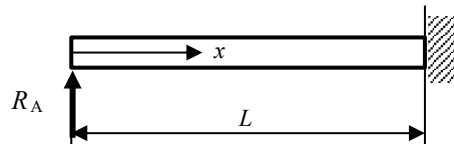


図 4

したがって、 $v_A = v_1 + v_2 + v_3 = -\frac{fL^4}{30EI} - \frac{M_0 L^2}{2EI} + \frac{R_A L^3}{3EI} = 0$ より

$$R_A = \frac{fL}{10} + \frac{3M_0}{2L}$$

6.5 (解答)

座標 x における断面 2 次モーメントは

$$I = \frac{bh^3}{12}$$

したがって、座標 x における曲げ応力は

$$\sigma(x) = P \cdot x \times \frac{12}{bh(x)^3} \times \frac{h(x)}{2} = \frac{6Px}{bh(x)^2}$$

最大曲げ応力は固定端に生じて

$$\sigma_{\max} = \frac{6PL}{bh_0^2}$$

$\sigma(x) = \sigma_{\max}$ とするので

$$h(x) = h_0 \sqrt{\frac{x}{L}}$$

6.6 (解答)

図 5 に示すように座標系をとると、各点に生じるたわみは以下となる。

(注) 各点のたわみおよびたわみ角は例題 5.12 参照、ねじれ角は式 (4.9) 参照。

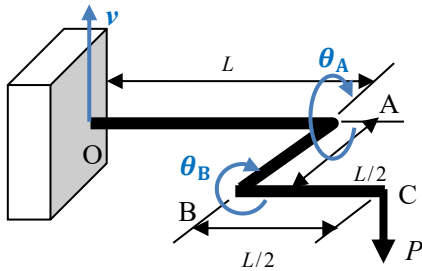


図 5

(i) 点 A

① 荷重 P によるたわみ： $v_{A1} = -\frac{pL^3}{3EI}$

② モーメント $M_0 (= PL/2)$ によるたわみ： $v_{A2} = -\frac{M_0L^2}{2EI} = -\frac{PL^2}{4EI}$

荷重 P とモーメント M_0 によるたわみ角の和： $v'_A = \frac{PL^2}{EI}$

ねじりモーメント $M_{t0} (= PL/2)$ によるねじれ角： $\theta_A = -\frac{M_{t0}L}{GI_p} = -\frac{PL^2}{2GI_p}$

(ii) 点 B

③ 荷重 P による AB 間のたわみ： $v_{B1} = -\frac{p(\frac{L}{2})^3}{3EI} = -\frac{PL^3}{24EI}$

④ 点 A のねじれ角による AB 間の剛体回転によるたわみ： $v_{B2} = \frac{L}{2} \times \theta_A = -\frac{PL^3}{4GI_p}$

ねじりモーメント $M_t (= P \times L/2)$ によるねじれ角： $\theta_B = \frac{M_t L/2}{GI_p} = \frac{PL^2}{4GI_p}$

(iii) 点 C

⑤ 荷重 P による BC 間のたわみ： $v_{C1} = -\frac{p(\frac{L}{2})^3}{3EI} = -\frac{PL^3}{24EI}$

⑥ 点 A のたわみ角による BC 間の剛体回転によるたわみ：

$$v_{C2} = -\frac{L}{2} \times v'_A = -\frac{PL^3}{2EI}$$

⑦ 点 B のねじれ角 θ_B によるたわみ： $v_{C3} = -\frac{L}{2} \times \theta_B = -\frac{PL^3}{8GI_p}$

①～⑦によるたわみの和が点 C のたわみ v となる。

$$\begin{aligned} v &= v_{A1} + v_{A2} + v_{B1} + v_{B2} + v_{C1} + v_{C2} + v_{C3} \\ &= -\frac{pL^3}{3EI} - \frac{PL^3}{4EI} - \frac{PL^3}{24EI} - \frac{PL^3}{4GI_p} - \frac{PL^3}{24EI} - \frac{PL^3}{2EI} - \frac{PL^3}{8GI_p} = -\frac{7PL^3}{6EI} - \frac{3PL^3}{8GI_p} \end{aligned}$$

ここで,

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad I_p = \frac{\pi d^4}{32}$$

より

$$v = -\frac{224PL^3}{3\pi d^4 E} - \frac{12PL^3}{\pi d^4 G}$$

演習問題解答

7.1 (解答)

式(7.11), (7.13)から

$$\begin{aligned}\sigma_1 \text{ or } \sigma_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2}(80 - 30) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(80 + 30)^2 + 4 \times 25^2} = 85.4, -35.4 \text{ (MPa)} \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\sqrt{(80 + 30)^2 + 4 \times 25^2} = 60.4 \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

式(7.8)から

$$\begin{aligned}\sigma_x' &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta + \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(80 - 30) + \frac{1}{2}(80 + 30)\cos(-90^\circ) - 25\sin(-90^\circ) = 50 \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_y' &= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y)\cos 2\theta - \tau_{xy} \sin 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(80 - 30) - \frac{1}{2}(80 + 30)\cos(-90^\circ) + 25\sin(-90^\circ) = 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\tau_{xy}' &= \frac{1}{2}(\sigma_y - \sigma_x)\sin 2\theta + \tau_{xy} \cos 2\theta \\ &= \frac{1}{2}(-30 - 80)\sin(-90^\circ) - 25\cos(-90^\circ) = 55 \text{ (MPa)}\end{aligned}$$

7.2 (解答)

式(7.11)から

$$\sigma_1 \text{ or } \sigma_2 = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 50^2} = 50, -50 \text{ (MPa)}$$

式(7.13)から

$$\tau_{\max} = \pm \frac{1}{2}\sqrt{4 \times 50^2} = \pm 50 \text{ (MPa)}$$

式(7.10), (7.12)から

$$\theta_0 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\infty = \pm 0.785 \text{ (rad)}$$

$$\theta_1 = \frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{0}{2 \times 50} = 0 \text{ (rad)}$$

(注) θ_0 の方向は $90^\circ/2$ で $\pi/4$ rad である。

7.3 (解答)

(1)

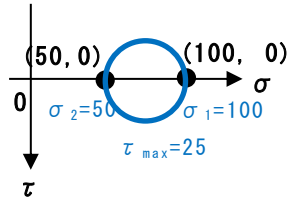


図 1

(2)

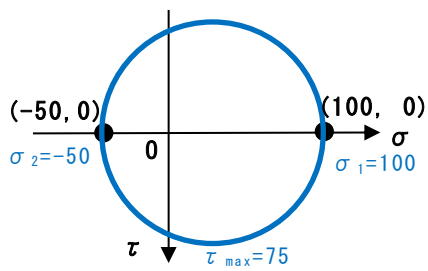


図 2

(3)

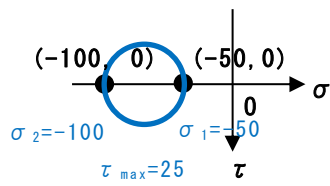


図 3

(4)

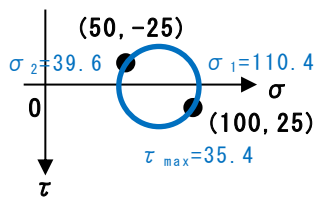


図 4

(5)

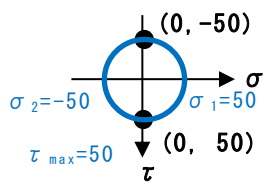


図 5

7.4 (解答)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{1000}{\frac{\pi \times (0.05^2 - 0.044^2)}{4}} = 2.26 \times 10^6 \text{ (Pa)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2} = \frac{100}{2.46 \times 10^{-7}} \times \frac{0.05}{2} = 1.02 \times 10^7 \text{ (Pa)}$$

$$\left(\text{ここで, } I_p = \frac{\pi(d_0^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi}{32} \times (0.05^4 - 0.044^4) = 2.46 \times 10^{-7} \text{ (m}^4\text{)} \right)$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (2.26, 0, 10.2)$ (MPa) であるから

$$\begin{aligned} \sigma_1 \text{ or } \sigma_2 &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2} \times 2.26 \pm \frac{1}{2} \sqrt{2.26^2 + 4 \times 10.2^2} = 11.4, -9.13 \text{ (MPa)} \\ \tau_{\max} &= \frac{1}{2} \sqrt{2.26^2 + 4 \times 10.2^2} = 10.3 \text{ (MPa)} \end{aligned}$$

7.5 (解答)

$$\text{許容応力} = \frac{200}{2} = 100 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_\theta = \frac{r}{t} p = \frac{0.25 \times 0.5}{t} = \frac{0.125}{t} \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_z = \frac{r}{2t} p = \frac{0.25 \times 0.5}{2t} = \frac{0.0625}{t} \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{\theta z} = 0 \text{ (MPa)}$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (\sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z})$ と対応するので(例題 7.5 参照)

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{0.125}{t} + \frac{0.0625}{t} \right) + \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{0.125}{t} - \frac{0.0625}{t} \right)^2} = \frac{0.0938}{t} + \frac{0.0625}{2t} = \frac{0.125}{t} \leq 100 \\ t &\geq \frac{0.125}{100} = 1.25 \times 10^{-3} \text{ (m) (1.25 mm)} \end{aligned}$$

7.6 (解答)

$$\sigma_\theta = \frac{r}{t} p = \frac{300 \times 10^{-3}}{3 \times 10^{-3}} \times 3 = 300 \text{ (MPa)}$$

$$\sigma_z = \frac{r}{2t} p = \frac{300 \times 10^{-3}}{2 \times 3 \times 10^{-3}} \times 3 = 150 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_0}{I_p} \times \frac{d}{2} = \frac{50 \times 10^3}{\frac{\pi(0.606^4 - 0.6^4)}{32}} \times \frac{0.606}{2} = 2.93 \times 10^7 \text{ (Pa)} \text{ (29.3 (MPa))}$$

$(\sigma_x, \sigma_y) = (\sigma_\theta, \sigma_z)$ と対応するので (例題 7.5 参照)

$$\sigma_1 \text{ or } \sigma_2 = \frac{1}{2} (\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2} \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2}$$

$$= \frac{1}{2} (300 + 150) \pm \frac{1}{2} \sqrt{150^2 + 4 \times 29.3^2}$$

$$= 305.5, 144.5 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{150^2 + 4 \times 29.3^2} = 80.5 \text{ (MPa)}$$

7.7 (解答)

部材 OA において, 点 A には荷重 P とねじりモーメント $M_t = P \times L_2$ が作用する。

$$\sigma_{Ax} = \frac{M_0}{I} \times \frac{d}{2} = P \times L \times \frac{64}{\pi d^4} \times \frac{d}{2} = 800 \times 1 \times \frac{32}{\pi \times 0.05^3} = 6.52 \times 10^7 \text{ (Pa)}$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2} = P \times L_2 \times \frac{32}{\pi d^4} \times \frac{d}{2} = 800 \times 0.5 \times \frac{16}{\pi \times 0.05^3} = 1.63 \times 10^7 \text{ (Pa)}$$

$(\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}) = (65.2, 0, 16.3)$ (MPa) であるから

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{2} \times 65.2 + \frac{1}{2} \sqrt{65.2^2 + 4 \times 16.3^2} = 69.0 \text{ (MPa)}$$

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{65.2^2 + 4 \times 16.3^2} = 36.4 \text{ (MPa)}$$

7.8 (解答)

板の x, y 方向の側面の面積は

$$A_x = 0.5 \times 0.02 = 0.01 \text{ (m}^2\text{)}$$

$$A_y = 0.01 \text{ (m}^2\text{)}$$

したがって側面に生ずる応力は

$$\sigma_x = \frac{P_x}{A_x} = \frac{800 \times 10^3}{0.01} = 80 \times 10^6 \text{ (Pa)}$$

$$\sigma_y = \frac{P_y}{A_y} = \frac{500 \times 10^3}{0.01} = 50 \times 10^6 \text{ (Pa)}$$

式(7.21)～式(7.23)からひずみを求めると

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu\sigma_y) = \frac{1}{130 \times 10^9} (80 \times 10^6 - 0.33 \times 50 \times 10^6) = 4.88 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu\sigma_x) = \frac{1}{130 \times 10^9} (50 \times 10^6 - 0.33 \times 80 \times 10^6) = 1.82 \times 10^{-4}$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E} (\sigma_x + \sigma_y) = -\frac{0.33}{130 \times 10^9} (80 \times 10^6 + 50 \times 10^6) = -3.30 \times 10^{-4}$$

演習問題解答

8.1 (解答)

$\tau = 0$ で, $\sigma_x > 0, \sigma_y < 0$ であるから, $\sigma_1 = \sigma_x = \sigma, \sigma_2 = 0, \sigma_3 = \sigma_y = -\sigma/2$

(1) 最大主応力説

$$\sigma_1 \cong \sigma_Y \quad \text{即ち,} \quad \sigma \cong \sigma_Y$$

(2) 最大せん断応力説

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_Y$$

$$\text{即ち,} \quad \sigma + \sigma/2 = 3\sigma/2 = \sigma_Y$$

(3) せん断ひずみエネルギー説

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_Y^2$$

ここで

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma/2$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = -3\sigma/2$$

これらをせん断ひずみエネルギー説の式(8.4)に代入して

$$\frac{7\sigma^2}{2} = 2\sigma_Y^2$$

$$\text{すなわち,} \quad \sigma = \frac{2}{\sqrt{7}} \sigma_Y$$

8.2 (解答)

$\tau \neq 0$ であるから, 主応力を求める。

$$\sigma_1 \text{ or } \sigma_3 = \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) \pm \frac{1}{2}\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + 4\tau_{xy}^2} = \frac{1}{2}\left(-\sigma + \frac{\sigma}{2}\right) \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(-\frac{3}{2}\sigma\right)^2 + 4\left(\frac{\sigma}{4}\right)^2}$$

$$= -\frac{\sigma}{4} \pm \frac{\sqrt{10}}{4}\sigma$$

$$\sigma_2 = 0$$

(注) $\sigma_3 < 0$ であるから, σ_2 が 0 となる。

(1) 最大主応力説

$$\sigma_1 = \frac{-1+\sqrt{10}}{4} \sigma \geq \sigma_Y$$

(2) 最大せん断応力説

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\sqrt{10}}{2} \sigma = \sigma_Y$$

(3) せん断ひずみエネルギー説

$$\sigma_1 - \sigma_2 = -\frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{4} (\sqrt{10})$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{4} (\sqrt{10})$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = -\frac{\sqrt{10}}{2} \sigma$$

より

$$\left(-\frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{4} (\sqrt{10})\right)^2 + \left(\frac{\sigma}{4} + \frac{\sigma}{4} (\sqrt{10})\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{10}}{2} \sigma\right)^2 = 2 \sigma_Y^2$$

$$\text{即ち, } \sigma = \frac{4}{\sqrt{31}} \sigma_Y$$

8.3 (解答)

$$\sigma_x = \frac{P}{A} = \frac{4P}{\pi d^2}$$

$$\sigma_y = 0$$

$$\tau_{xy} = \frac{M_t}{I_p} \times \frac{d}{2} = \frac{16M_t}{\pi d^3}$$

これより

$$\begin{aligned} \sigma_1 \text{ or } \sigma_3 &= \frac{1}{2} \sigma_x \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma_x^2 + 4\tau_{xy}^2} \\ &= \frac{2P}{\pi d^2} \pm \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{4P}{\pi d^2}\right)^2 + 4\left(\frac{16M_t}{\pi d^3}\right)^2} = \frac{2P}{\pi d^2} \pm \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64\left(\frac{M_t}{d}\right)^2} \end{aligned}$$

これより

$$\sigma_1 = \frac{2P}{\pi d^2} + \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}$$

$$\sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = \frac{2P}{\pi d^2} - \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}$$

(1) 最大主応力説

$$\sigma_1 \cong \sigma_Y$$

$$\frac{2P}{\pi d^2} + \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2} \cong \sigma_Y$$

(2) 最大せん断応力説

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{4}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2} = \sigma_Y$$

(3) せん断ひずみエネルギー説

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \frac{2P}{\pi d^2} + \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = -\frac{2P}{\pi d^2} + \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = -\frac{4}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}$$

したがって、式 $(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2 \sigma_Y^2$ は以下となる。

$$\left(\frac{2P}{\pi d^2} + \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}\right)^2 + \left(-\frac{2P}{\pi d^2} + \frac{2}{\pi d^2} \sqrt{P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2}\right)^2 + \left(-\frac{4}{\pi d^2}\right)^2 \left(P^2 + 64 \left(\frac{M_t}{d}\right)^2\right) = 2 \sigma_Y^2$$

8.4 (解答)

$$\sigma_\theta = \frac{r}{t} p$$

$$\sigma_z = \frac{r}{2t} p + \frac{r}{4t} p = \frac{3r}{4t} p$$

$$\tau_{xy} = 0$$

$\tau_{xy} = 0$ であるから, σ_θ, σ_z は主応力である。

$\sigma_\theta > \sigma_z > 0$ であるから

$$\sigma_1 = \sigma_\theta, \sigma_2 = \sigma_z, \sigma_3 = 0$$

(1) 最大主応力説

$$\sigma_1 \geq \sigma_Y \Rightarrow \sigma_\theta = \frac{r}{t} p \geq \sigma_Y$$

(2) 最大せん断応力説

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \sigma_\theta \Rightarrow \frac{r}{t} p = \sigma_Y$$

(3) せん断ひずみエネルギー説

$$\sigma_1 - \sigma_2 = \sigma_\theta - \sigma_z = \frac{r}{4t} p$$

$$\sigma_2 - \sigma_3 = \sigma_z = \frac{3r}{4t} p$$

$$\sigma_3 - \sigma_1 = -\frac{r}{t} p$$

これより

$$\left(\frac{r}{4t} p\right)^2 + \left(\frac{3r}{4t} p\right)^2 + \left(-\frac{r}{t} p\right)^2 = 2 \sigma_Y^2$$

$$\therefore p = \frac{4}{\sqrt{13}} \frac{t}{r} \sigma_Y$$

演習問題解答

9.1 (解答)

式(9.11)より曲げによるひずみエネルギーは

$$U = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx$$

自由端から固定部へ向かう座標を x とすると、内力曲げモーメントは

$M(x) = P \cdot x + M$ であるから

$$U_1 = \int_0^L \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L (Px + M)^2 dx = \frac{1}{6EI} \{(PL + M)^3 - M^3\}$$

断面 2 次モーメント $I = \frac{\pi d^4}{64}$ を代入して

$$U_1 = \frac{32}{3\pi d^4 E} \{(PL + M)^3 - M^3\}$$

式(9.8)によりねじりのひずみエネルギーは

$$U = \frac{M_t^2}{2G I_p} L$$

断面 2 次極モーメント $I_p = \frac{\pi d^4}{32}$ を代入して、 $U_2 = \frac{16M_t^2}{\pi d^4 G} L$

ひずみエネルギー U は両者の和をとり

$$U = \frac{32}{3\pi d^4 E} \{(PL + M)^3 - M^3\} + \frac{16M_t^2}{\pi d^4 G} L$$

9.2 (解答)

各トラスに生ずる軸力を $N_1(AC)$, $N_2(AB$ および $AD)$ とする。

鉛直方向の力の釣合いから

$$2N_2 \cos \theta + N_1 - P = 0$$

これより、 $N_2 = (P - N_1)/2\cos\theta$

トラスに蓄えられるひずみエネルギーは

$$U = \frac{N_1^2 L}{2AE} + 2 \times \frac{N_2^2}{2AE} \frac{L}{\cos\theta} = \frac{N_1^2 L}{2AE} + \frac{L}{AE \cos\theta} \left(\frac{P - N_1}{2\cos\theta} \right)^2$$

点 C における反力は N_1 であり、点 C の変位は 0 である。

したがって最小仕事の式(9.12')から、 $\frac{\partial U}{\partial N_1} = 0$

即ち、 $\frac{N_1 L}{AE} - \frac{(P - N_1)L}{2AE \cos^3 \theta} = 0$

これより

$$N_1 = \frac{P}{1+2\cos^3\theta}$$

軸力を受ける棒の伸びの式(2.6)にこの値を代入して

$$\delta_A = \frac{N_1 L}{AE} = \frac{PL}{AE(1+2\cos^3\theta)}$$

9.3 (解答)

重ね合わせの原理によって、 P のみ、 M_0 のみが作用した場合に分けて考える。

(1) P のみが作用した場合

$$\text{点 A の反力は, } R_A = \frac{P}{2}$$

区間 AC における内力モーメントは

$$M_1(x) = -R_A \cdot x$$

はり全長に生じるひずみエネルギーは

$$U_1 = 2 \times \int_0^{L/2} \frac{M_1(x)^2}{2EI} dx = \frac{P^2 L^3}{96EI}$$

(注) 対称性を利用

(2) M_0 のみが作用した場合

$$\text{点 A の反力は, } R_A = -\frac{M_0}{L}$$

区間 AC における内力のモーメントは

$$M_2(x) = \frac{M_0}{L} x$$

はり全長に生じるひずみエネルギーは

$$U_2 = 2 \times \int_0^{L/2} \frac{M_2(x)^2}{2EI} dx = \frac{M_0^2 L}{24EI}$$

荷重 P と曲げモーメント M_0 が同時に作用した場合のひずみエネルギーは

$$U = U_1 + U_2 = \frac{P^2 L^3}{96EI} + \frac{M_0^2 L}{24EI}$$

点 C のたわみは式(9.12)から

$$\frac{\partial U}{\partial P} = \frac{PL^3}{48EI}$$

点 C のたわみ角は式(9.12)から

$$\frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 L}{12EI}$$

9.4 (解答)

対称性から支点反力は、 $R_A = R_B = fL/2, M_A = M_B$ であるから

座標 x における内力のモーメントは

$$M(x) = M_A - R_A x + \frac{1}{2} f x^2$$

ひずみエネルギーは式(9.11)より

$$U = \int_0^L \frac{M(x)^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^L \left(M_A - R_A x + \frac{1}{2} f x^2 \right)^2 dx$$

ここで、左の固定端におけるたわみ角 = 0 の条件により

$$\frac{\partial U}{\partial M_A} = \frac{\partial U}{\partial M(x)} \frac{\partial M(x)}{\partial M_A} = \frac{1}{EI} \int_0^L M(x) \times \frac{\partial M(x)}{\partial M_A} dx = \frac{1}{EI} \int_0^L \left(M_A - R_A x + \frac{1}{2} f x^2 \right) dx = 0$$

したがって

$$M_A L - R_A \frac{L^2}{2} + \frac{1}{6} f L^3 = 0 \quad \therefore M_A = R_A \frac{L}{2} - \frac{1}{6} f L^2 = \frac{1}{12} f L^2$$

これより

$$M_A = M_B = fL^2/12 \quad (R_A = R_B = fL/2)$$

9.5 (解答)

図のはりにおいて、区間 OA では荷重 P による曲げとモーメント PL_2 によるねじれ、区間 AB では荷重 P による曲げが生じる。

区間 OA において、曲げモーメント： $M_1 = Px_1$ 、ねじりモーメント： $M_{1t} = PL_2$

区間 AB において、曲げモーメント： $M_2 = Px_2$ である。

式(9.8)、式(9.11)より

$$U = \int_0^{L_1} \frac{M_1^2}{2EI} dx_1 + \int_0^{L_1} \frac{M_{1t}^2}{2GI_p} dx_1 + \int_0^{L_2} \frac{M_2^2}{2EI} dx_2$$

$$U = \frac{P^2 L_1^3}{6EI} + \frac{P^2 L_2^3}{6EI} + \frac{P^2 L_1 L_2^2}{2GI_p}$$

式(9.12)により点 B の変位は

$$\delta_B = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{L_1^3 + L_2^3}{3EI} P + \frac{L_1 L_2^2}{GI_p} P$$

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad \text{を代入して}$$

$$\delta_B = \frac{32P}{3\pi d^4} \left\{ \frac{2}{E} (L_1^3 + L_2^3) + \frac{3}{G} L_1 L_2^2 \right\}$$

9.6 (解答)

衝撃ねじりモーメント M_t により軸に蓄えられるひずみエネルギーは、式(9.8)

から

$$U = \frac{1}{2Gl_p} \times \int_0^L M_t^2 dx = \frac{M_t^2 L}{2Gl_p}$$

ここで式(4.10)から

$$\tau_{\max} = \frac{M_t}{I_p} \frac{d}{2} \quad \text{より,} \quad M_t = \tau_{\max} I_p \frac{2}{d}$$

したがってひずみエネルギー U は以下のように書ける。

$$U = \frac{L}{2Gl_p} \times \tau_{\max}^2 I_p^2 \frac{4}{d^2} = \frac{\pi L d^2}{16G} \tau_{\max}^2$$

このひずみエネルギーは回転の運動エネルギー($I\omega^2/2$)に等しいので

$$\frac{\pi L d^2}{16G} \tau_{\max}^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 = \frac{1}{2} I \left(\frac{\pi n}{30} \right)^2$$

$$\tau_{\max} = \frac{\pi n}{15d} \sqrt{\frac{2GI}{\pi L}}$$