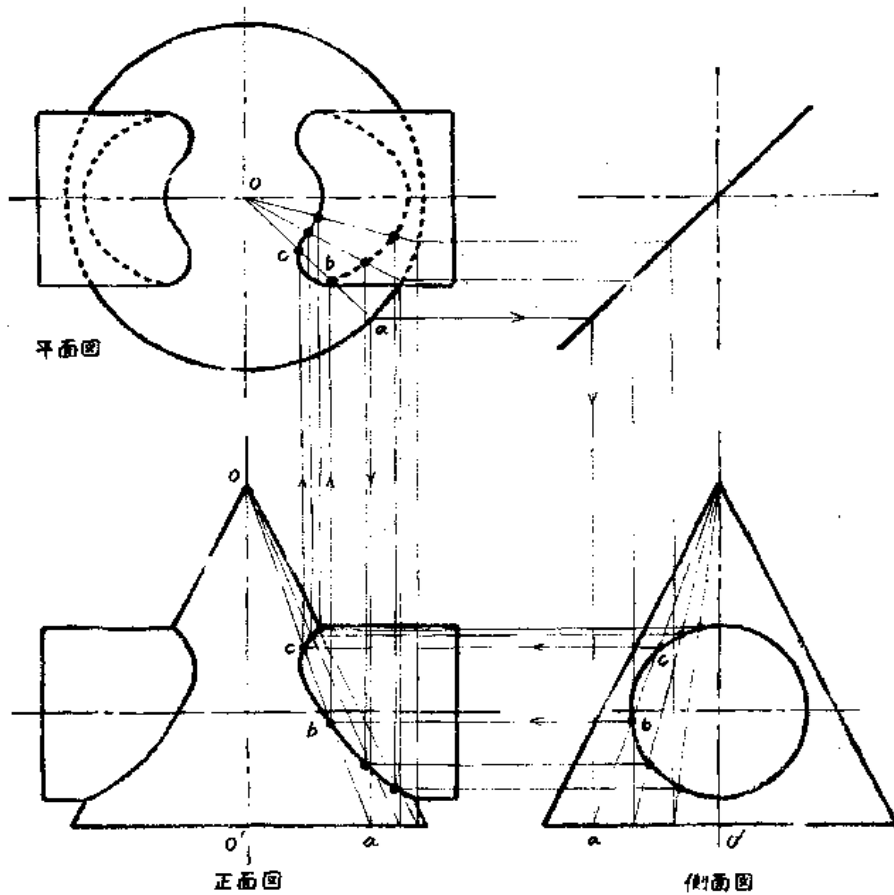


わかる図形科学 付録

2022年10月11日 現在



目次

付録 A 補足の章末問題	1
A.1 第1章 図学の基礎	1
A.2 第2章 平面図形	2
A.3 第3章 正投影と主投影	3
A.4 第4章 1次副投影	5
A.5 第5章 直線	6
A.6 第6章 平面	8
A.7 第7章 高次副投影	9
A.8 第8章 直線と平面の関係	11
A.9 第9章 平行と垂直	13
付録 B 章末問題の解答	15
B.1 第1章 図学の基礎 (解答)	15
B.2 第2章 平面図形 (解答)	16
B.3 第3章 正投影と主投影 (解答)	17
B.4 第4章 1次副投影 (解答)	20
B.5 第5章 直線 (解答)	22
B.6 第6章 平面 (解答)	25
B.7 第7章 高次副投影 (解答)	27
B.8 第8章 直線と平面の関係 (解答)	30
B.9 第9章 平行と垂直 (解答)	32
付録 C ユークリッド幾何学	35
付録 D 直線・曲線・平面・曲面の解析幾何学	39
D.1 直線の方程式	39
D.1.1 2点間の距離と内分点・外分点	39
D.1.2 直線の方程式の導出	40
D.1.3 直線のベクトル方程式と媒介変数表示	41
D.1.4 平面上の直線	43
D.1.5 平面上の点と直線の距離	44
D.2 曲線と曲率	44
D.2.1 曲線のフレネ・セレの公式	44
D.3 平面の方程式	47
D.3.1 ベクトル方程式による媒介変数表示	47

D.3.2	法線ベクトルとの内積	48
D.3.3	2直線を含む平面	48
D.3.4	3点を通る平面	49
D.3.5	1点と平面の距離	49
D.4	曲面論	49
D.4.1	曲面の方程式	49
付録 E	円錐曲線	52
E.1	円錐曲線の作図	52
E.1.1	楕円	52
E.1.2	双曲線	52
E.1.3	放物線	54
E.2	円錐曲線の性質	55
付録 F	役立つポイント集	57

あとがき

ガスパール・モンジュ (Gaspard Monge, 1746-1818) が創始した図法幾何学 (*Géométrie descriptive*) は長年の教育経験の結晶であり、版を重ね世界的に波及した。それは、機械・土木・建築技術者に製作されるべき企画を予め示すもので手作業による職人芸に代わって 19 世紀以降の大量生産社会の数学的準備となった。彼は、大学で主に図法幾何学と解析幾何学の教鞭をとり、解析の講義では、代数解析的機能を十分に生かしながらも、幾何学的直観を軽視せず、それをさまざまな自然科学や技術に応用するのに大いに役立てようとするものであった。

本書を読み進み、図学の作図問題を解くことによって、読者の方には普段あまり頭を使うのことがない立体的思考のトレーニングができたことと思います。これは、「まえがき」で述べた、「空間認識力」と「図形理解力」の修得に繋がります。また、図学と、この基盤となっている幾何学は図形の論理と作図によって図形の性質を明らかにする「図形の科学」といえます。図形の作図では図形を正確かつ丁寧に描かなければなりません。物理学・工学では実験を細心の注意をもって精密に行わなければならないことと同じです。

図学は、平たくいえば「頭の体操」として、楽しみながら論理の訓練を行える格好の教材といえます。授業アンケートには、「図学は楽しい」との学生の声も聞こえます。実際に、定規とコンパスだけを使って正投影の基準線を 1 本引くことによって、物体に対する視線を自在に変更して見たい投影図を道筋をたてて作図できます。そして、別の投影図に描きこまれている物体の高さ、奥行き、幅の長さを新しく作図する投影図にうつすことによって、図形の実長、実形、交点、交線などをあぶりだして解明できます。これらの作図には、本書の「役立つポイント」として掲げた、論理的に導かれた主投影図の基本的性質を定理として、これらを組み合わせることにより、図形や図形間の測量を実現できます。

このような図形の測量は、今ではデカルトの座標の発明に基づく解析幾何学と線形代数の数学によって、図形の測量のみならず図形移動・回転などの図形変換も、論理の積み上げによらずにコンピュータの操作によってできます。一方、図学によれば簡単な定理を用いるだけで、投影面に傾いた直線・平面の実長・実形を見つることができるし、本書の表紙に示した互いに交わる複雑な曲線を 3 次元空間をイメージしながら描くことができます。これが図学の面白さであり、論理のもつ力を示してくれます。

論理の力は古代ギリシャで認識され、近代の欧米に受け継がれましたが、特に東洋の漢字文化圏ではあまり認識されなかったようです。欧米の「討論」の文化では、意見を闘わせる場においては論理の力の効力が発揮されます。これに対し、我が国では、論理を徹底することにポイントを置く教育が不十分であったといえます。

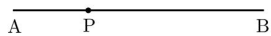
「国際化」というスローガンは、外からの情報を吸収するだけではありません。意識して自ら海外にでかけたり、日本で勉強しようとする海外の人たちとの討論に備えるには、まえがきでも述べた「論理的思考力」が重要となるのです。学問の境界を越えて論理は学問の進め方と構築に共通して大切です。

付録 A 補足の章末問題

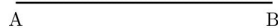
A.1 第1章 図学の基礎

【1.3】 問題図 1.3 について，以下の問いに答えなさい．

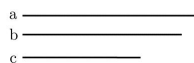
- (1) 線分 AB 上の任意の点 P から垂線をたてなさい． (問題図 (a))
- (2) 線分 AB の端点 B より垂線をたてなさい． (問題図 (b))
- (3) 線分 a, b, c を辺とする三角形 ABC を作図しなさい． (問題図 (c))
- (4) 直角を三等分しなさい． (問題図 (d))



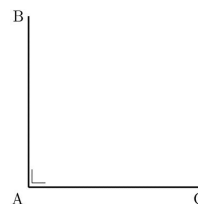
(a) 垂線をたてる．



(b) 垂線をたてる．



(c) 三角形の作図

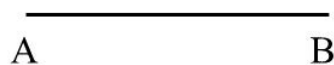


(d) 直角の3等分

問題図 1.3 作図題

A.2 第2章 平面図形

【2.3】 一辺を AB とする正五角形を作図しなさい (問題図 2.3). また AB の長さを a とすると正五角形の対角線の長さは $(\sqrt{5} + 1)a/2$ となることを示しなさい.



問題図 2.3 正五角形の作図

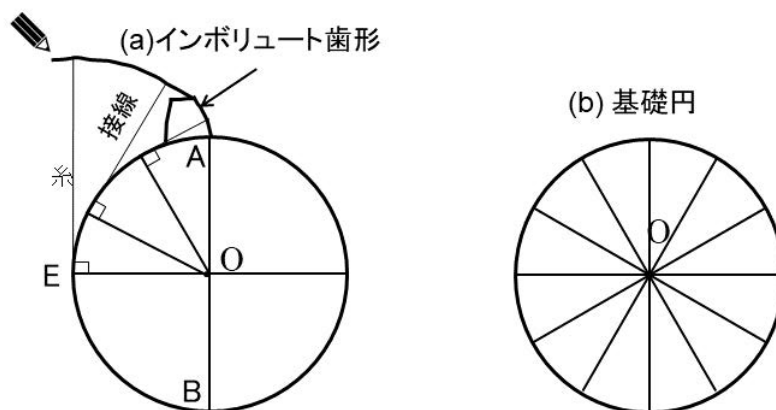
【2.4】 焦点法により楕円を作図しなさい (第2章図 2.37 参照).

【2.5】 焦点法により双曲線を作図しなさい (第2章図 2.39 参照).

【2.6】 焦点・準線法により放物線を作図しなさい (第2章図 2.41 参照).

【2.7】 円 O の半円周の長さを作図によって求めなさい (第2章図 2.29 参照, 半円の直延).

【2.8】 問題図 2.4 に示すように, 糸を円の半周 \widehat{BEA} に巻き付け, 糸の一端 A を持ち, 糸をピンと張ったままほどくとき, 糸をつまんだ 1 点 A が描く軌跡を伸開線 (インボリュート曲線) という. インボリュート曲線は歯車のインボリュート歯形の形状を定める曲線として重要である. 問題図 (b) の基礎円を O を描き, インボリュート曲線 $\widehat{P_1 \cdots P_6}$ を作図しなさい (本文第2章 2.4.4 節の手順と図 2.46 を参照).



問題図 2.4 インボリュート曲線の作図

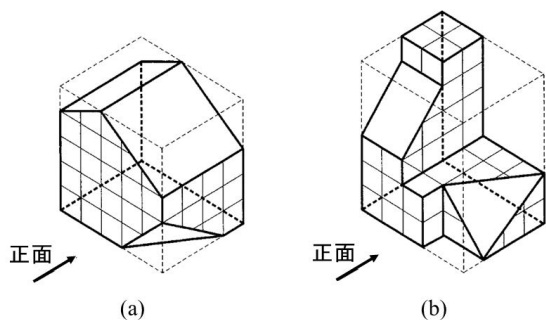
A.3 第3章 正投影と主投影

【3.3】 問題図 3.3 について以下の問いに答えなさい。かくれ線を点線で作図しなさい。

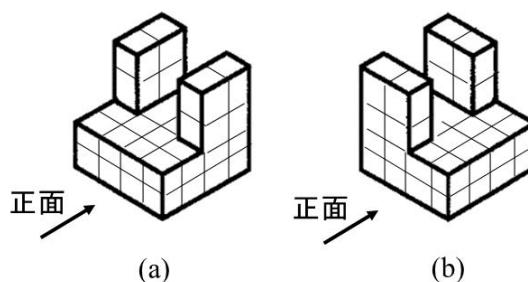
- (1) 立体の主投影図(正面図, 平面図, 右側面図)を作図しなさい。(図(a))
- (2) 立体の主投影図を作図しなさい。(図(b))

【3.4】 問題図 3.4 について以下の問いに答えなさい。かくれ線を点線で作図しなさい。

- (1) 立体の主投影図(正面図, 平面図, 右側面図)を作図しなさい。(図(a))
- (2) 立体の主投影図を作図しなさい。(図(b))



問題図 3.3 主投影図の作図

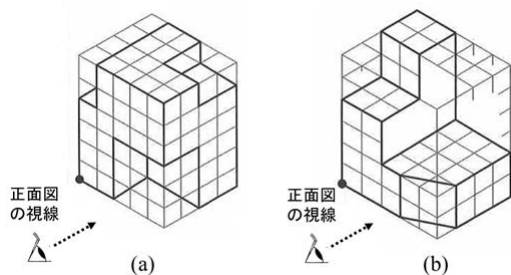


問題図 3.4 主投影図の作図

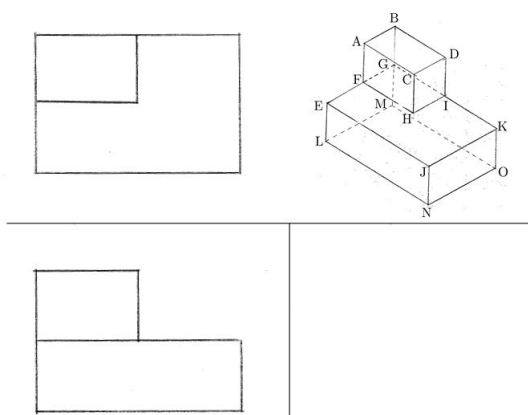
【3.5】 問題図 3.5 について以下の問いに答えなさい。かくれ線を点線で作図しなさい。

- (1) 立体の主投影図(正面図, 平面図, 右側面図)を作図しなさい。(問題図(a))
- (2) 立体の主投影図を作図しなさい。(問題図(b))

【3.6】 問題図 3.6 の右側面図を作図しなさい。



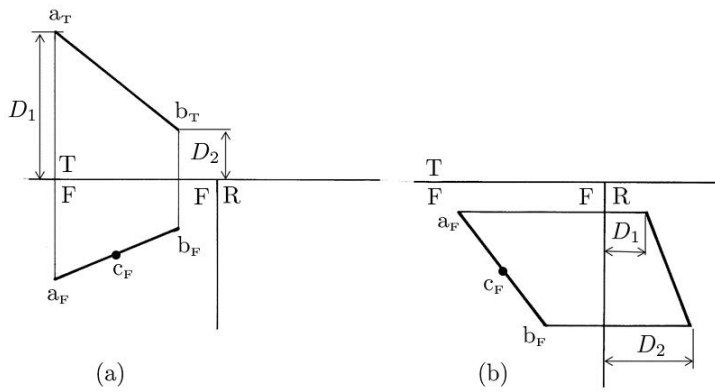
問題図 3.5 主投影図の作図



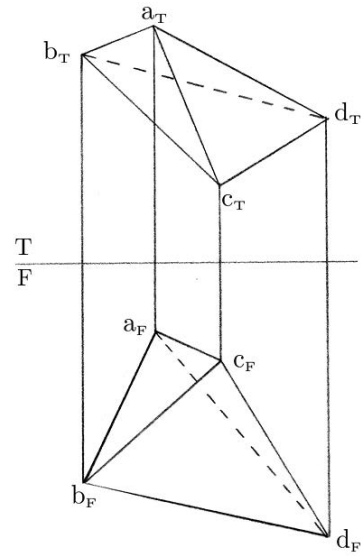
問題図 3.6 主投影図の作図

【3.7】 問題図 3.7 の直線の主投影図の作図について、以下の問いに答えなさい。

- (1) 直線 AB の右側面図 $a_R b_R$, 点 C の右側面図 c_R と平面図 c_T を作図しなさい。(問題図(a))
- (2) 直線 AB の平面図 $a_T b_T$, 点 C の右側面図 c_R と平面図 c_T を作図しなさい。(問題図(b))



問題図 3.7 主投影図の作図

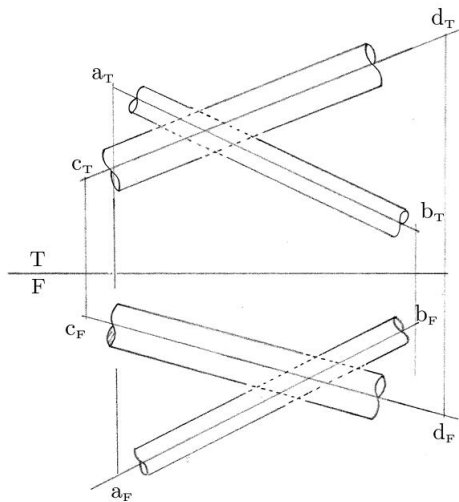


問題図 3.8 主投影図の作図

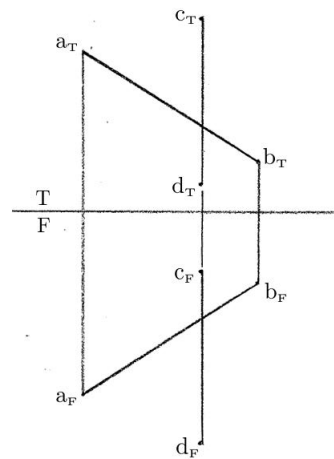
【3.8】 問題図 3.8 に示す四面体の左側面図を作図しなさい。

【3.9】 問題図 3.9 に示す交差しない2つの棒の投影図について、かくれ線を作図しなさい。

【3.10】 問題図 3.10 に示す2直線は交わっているか交わっていないかを判別しなさい。



問題図 3.9 かくれ線の作図

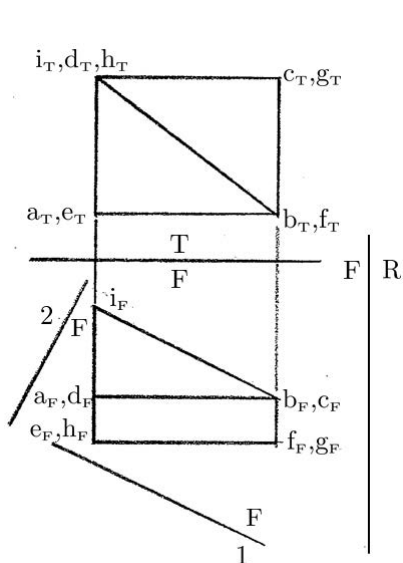


問題図 3.10 交差の判定

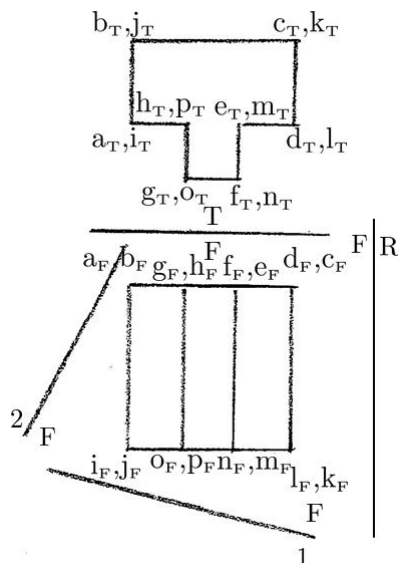
A.4 第4章 1次副投影

【4.3】 問題図 4.3 の副平面図を作図しなさい。

【4.4】 問題図 4.4 の副平面図を作図しなさい。



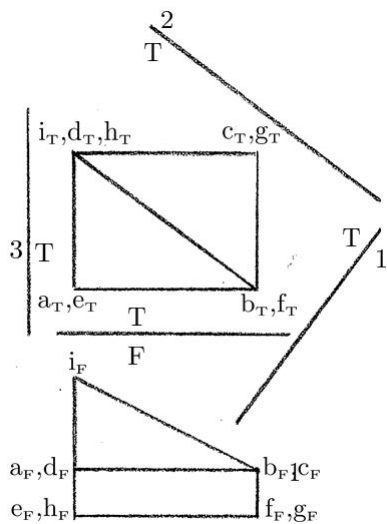
問題図 4.3 副平面図



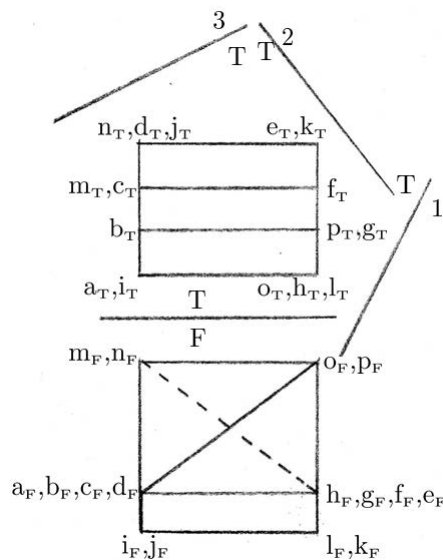
問題図 4.4 副平面図

【4.5】 問題図 4.5 の左側面図と副平面図を作図しなさい。

【4.6】 問題図 4.6 の副平面図を作図しなさい。



問題図 4.5 副立面図



問題図 4.6 副立面図

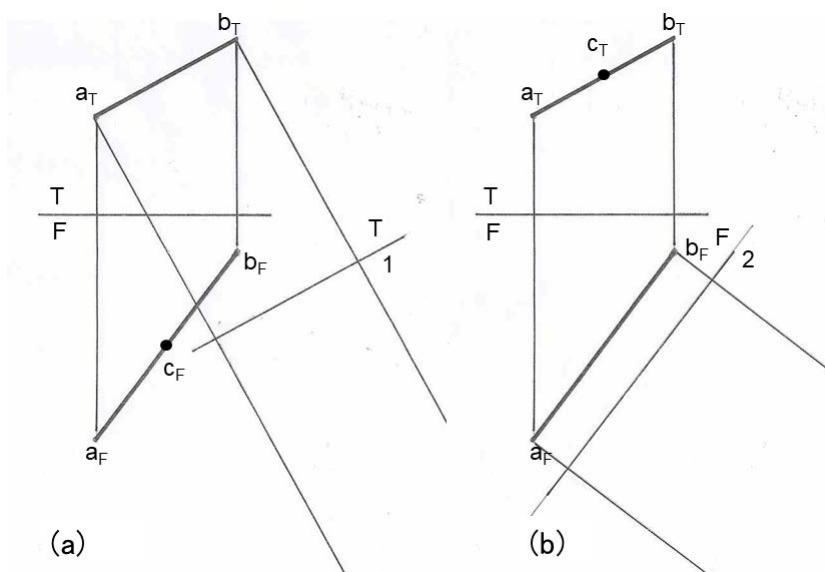
A.5 第5章 直線

【5.3】 問題図 5.3 について、以下の問いの (1)~(3) に答えなさい。の副平面図を作図しなさい。

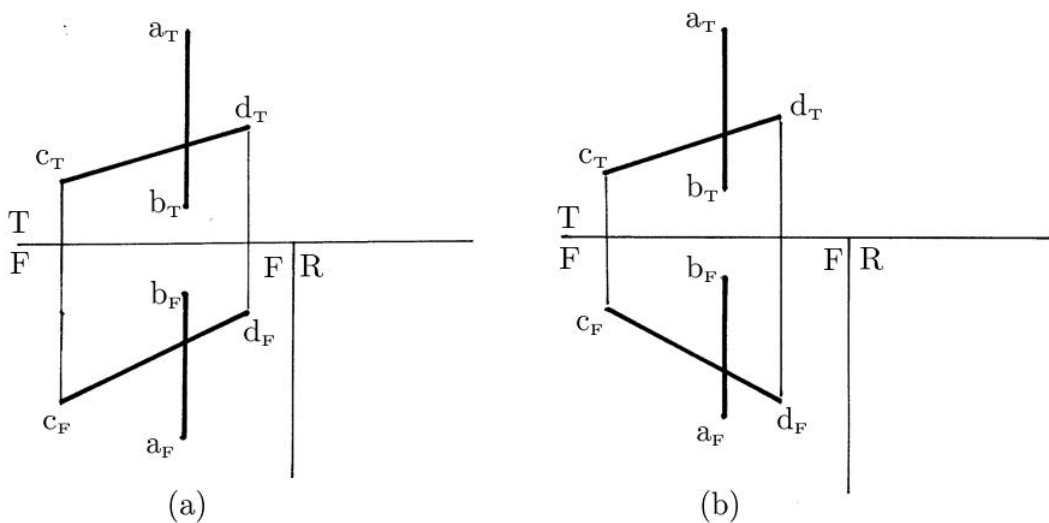
- (1) 直線 AB の平面図に対する副投影図 1(副立面図 1) を作図しなさい。(問題図 (a))
- (2) 直線 AB の正面図に対する副投影図 2(副平面図 2) を作図しなさい。(問題図 (b))
- (3) 副投影図 1 の a_1b_1 と副投影図 2 の a_2b_2 の長さを比較しなさい。

【5.4】 問題図 5.4 について、以下の問いの (1)~(2) に答えなさい。の副平面図を作図しなさい。

- (1) 2 直線 AB と CD が交わるか否かを判定しなさい。(問題図 (a))
- (2) 2 直線 B と CD が交わるか否かを判定しなさい。(問題図 (b))



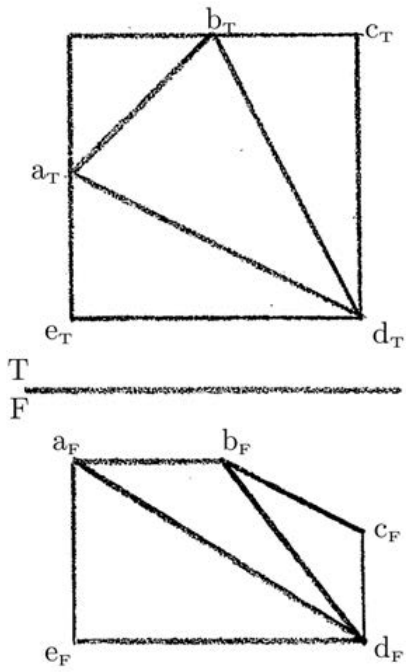
問題図 5.3 副立面図と副平面図



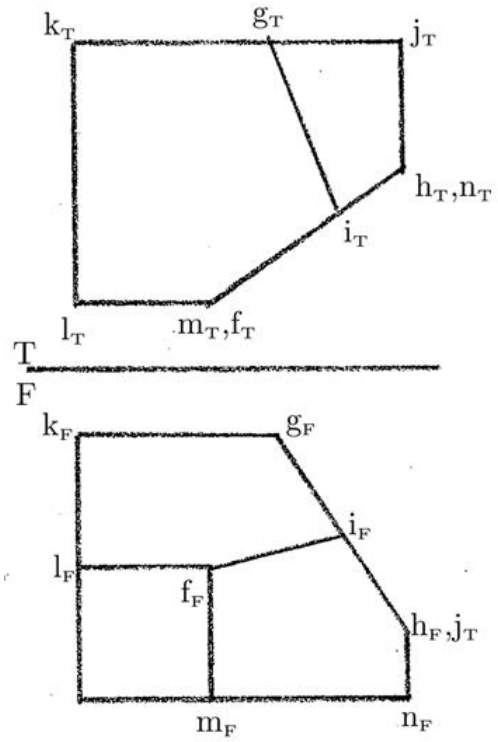
問題図 5.4 副立面図と副平面図

【5.5】 問題図 5.5 の AD, BD, CD の実長を求めなさい.

【5.6】 問題図 5.6 の FI, GI の実長を求めなさい.



問題図 5.5 実長の作図

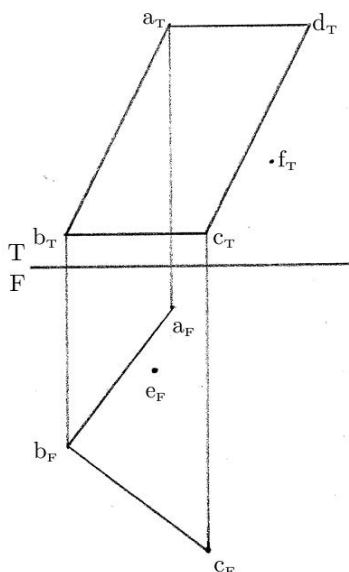


問題図 5.6 実長の作図

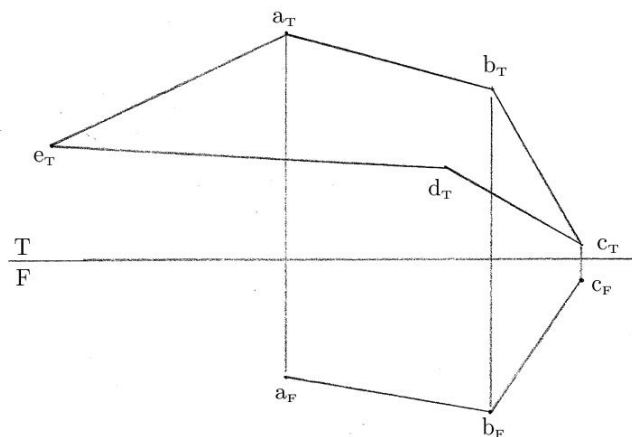
A.6 第6章 平面

【6.3】 問題図 6.3 について、平面の主投影図を完成しなさい。

【6.4】 問題図 6.4 について、平面 ABCDE の主投影図を完成し平面上の点の投影を求めなさい。



問題図 6.3 実長の作図

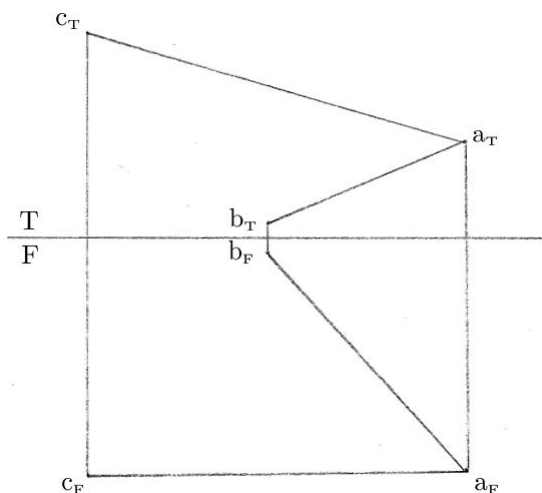


問題図 6.4 実長の作図

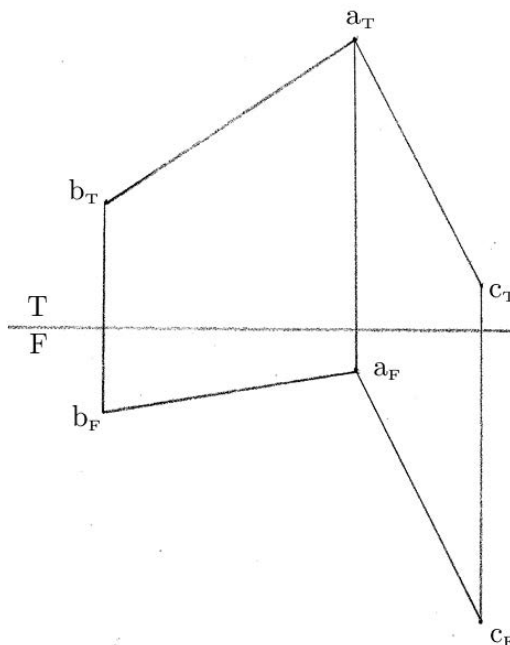
【6.5】 問題図 6.5 の三角形平面 ABC に対し、長さ 65mm の水平線を水平線 AC の 25mm 上に引きなさい。その後、長さ 50mm の正面投影面に平行な正面直線を点 B の背後 18mm に引きなさい。

【6.6】 問題図 6.6 の $\angle BAC$ の二等分線を引きなさい。

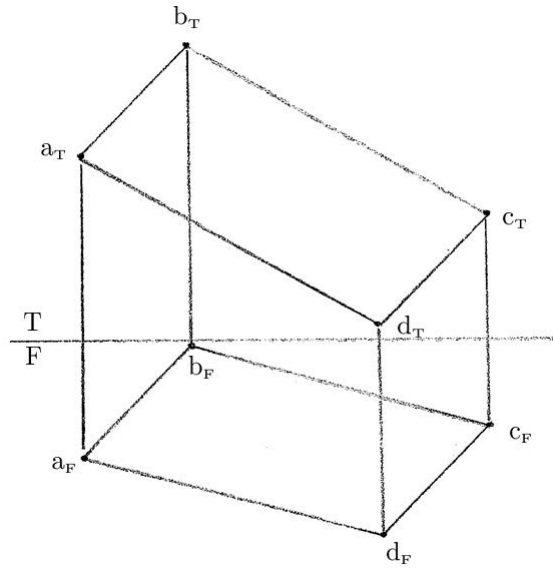
【6.7】 問題図 6.7 の点 A を通る正面投影面に平行な直線を引きなさい。点 C を通る正面投影面上の直線を引きなさい。これらの直線の実長を求めなさい



問題図 6.5 実長の作図



問題図 6.6 実長の作図

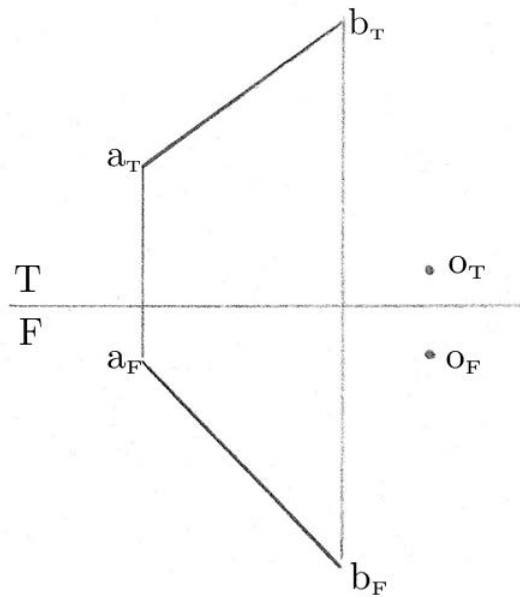


問題図 6.7 実長の作図

A.7 第7章 高次副投影

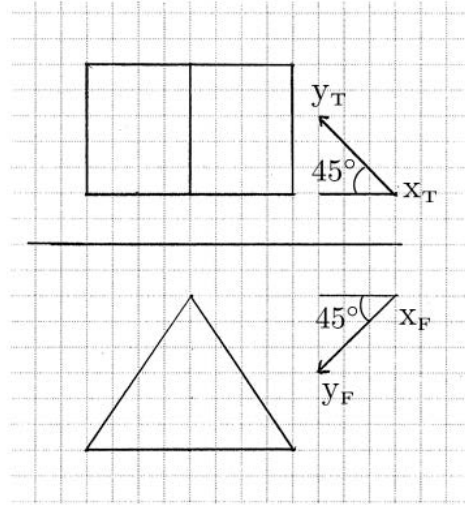
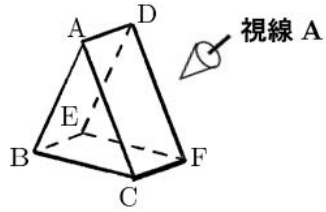
【7.3】 問題図 7.3 の直線 AB とその中点と点 O を結ぶ直線のつくる角度を示しなさい。

【7.4】 問題図 7.4 の視線 A の副投影を作図しなさい。

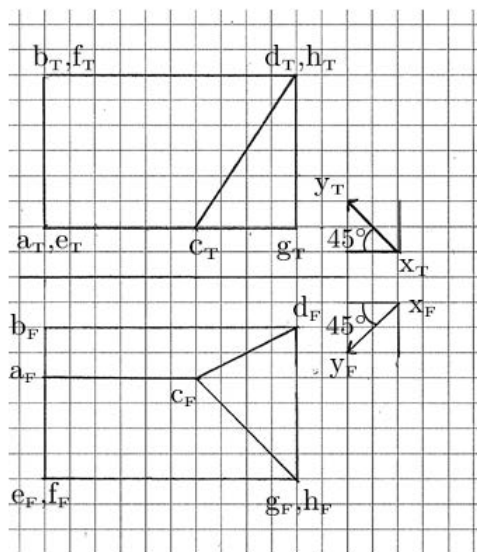
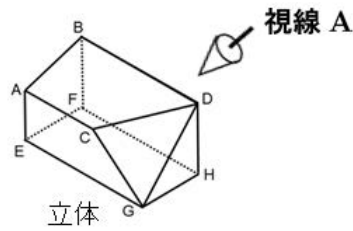


問題図 7.3 高次副投影

【7.5】 問題図 7.5 に示す立体を視線 A からみた副投影図を作図しなさい。



問題図 7.4 高次副投影: 視線 A からの作図



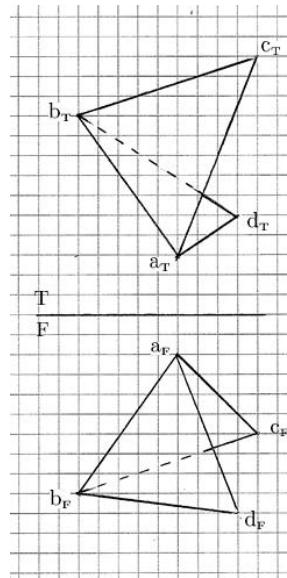
問題図 7.5 高次副投影: 視線 A からの作図

A.8 第8章 直線と平面の関係

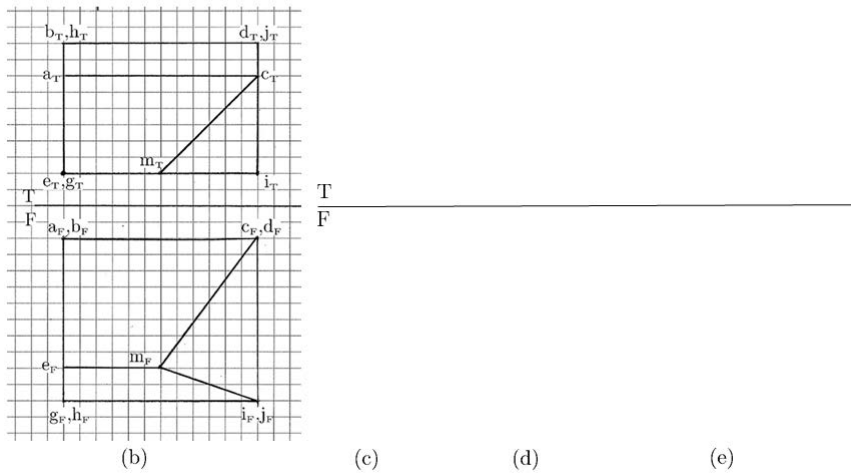
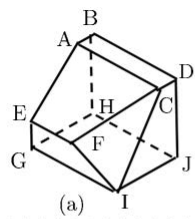
【8.3】 問題図 8.3 問題図 A.27 は 1 辺 AB を共有する 2 つの三角形 ABC と三角形 ABD を示す。これらのなす角度を作図して求めなさい。

【8.4】 問題図 8.4 は立体を示し、同図 (b) は同図 (a) の立体の正面図と平面図を示す。以下の問いの (1)~(3) について解答しなさい。

- (1) 図 (c) は直線 GH の正面図を示す。直線 GH の実長を図 1(c) の平面図に作図しなさい。
- (2) 図 (d) は直線 MI の平面図を示す。直線 MI の実長を図 3(d) の正面図に作図しなさい。
- (3) 図 (e) は直線 MC の正面図と平面図を示す。直線 MC の実長、直線 MC と正面投影面とのなす正面傾角 θ_F と、MC と水平面とのなす平面傾角 θ_H を作図しなさい。



問題図 8.3 二面角

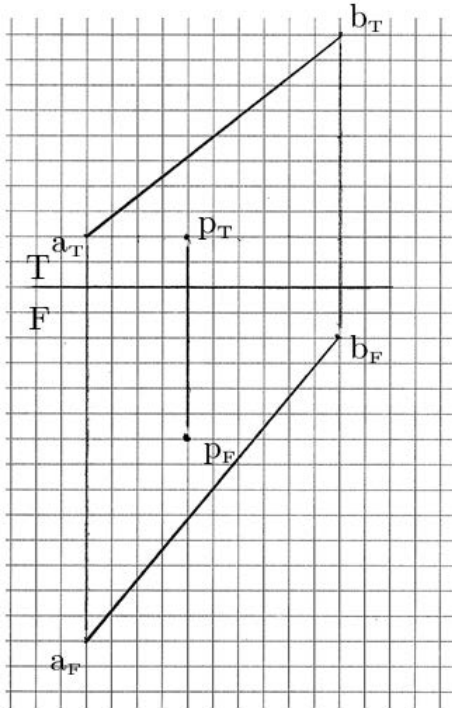


問題図 8.4 直線の実長

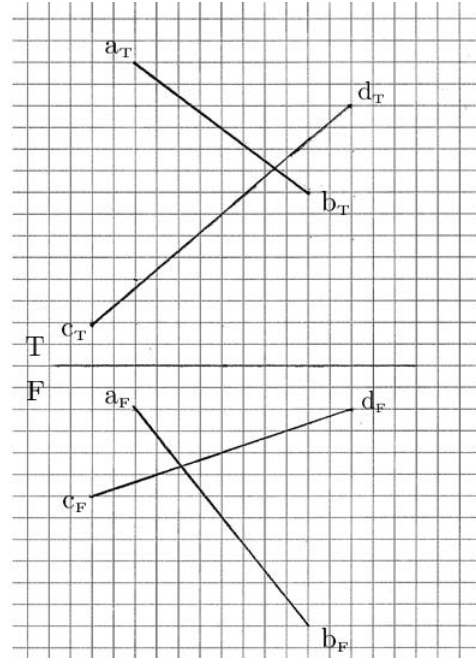
A.9 第9章 平行と垂直

【9.3】 問題図 9.3 において，点 P から直線 AB への垂線を作図しその垂線の実長 (TL) を示しなさい。垂線の足を点 Q とし垂線 PQ の実長を作図しなさい。

【9.4】 問題図 9.4 にすねじれ 2 直線 AB と CD 間の距離を作図しなさい。



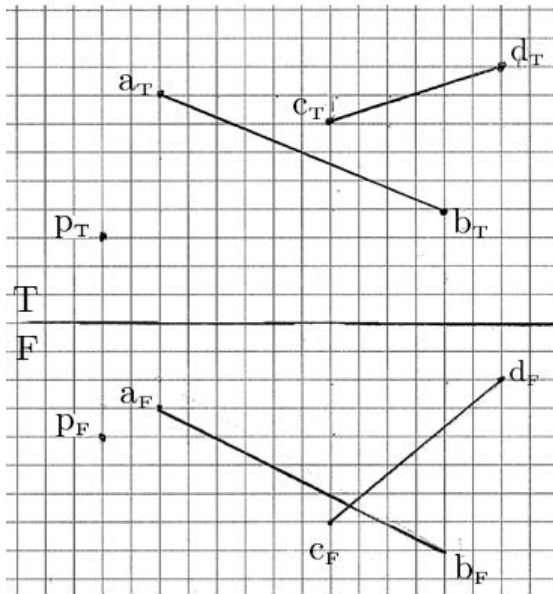
問題図 9.3 垂線の実長



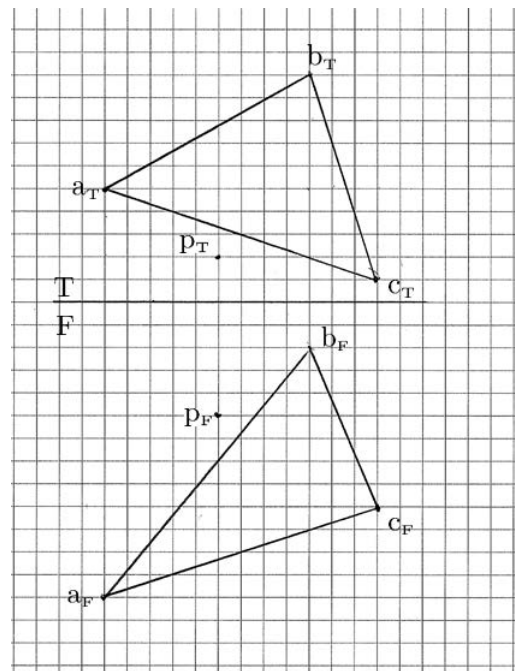
問題図 9.4 ねじれ 2 直線間の距離

【9.5】 問題図 9.5 はねじれの関係にある直線 AB と直線 CD と，点 P の正面図と平面図を示す。点 P を通って，直線 AB と CD の双方に交わる直線を作図しなさい。

【9.6】 問題図 9.6 に示す点 P から三角形 ABC への垂線 PQ を作図しなさい。



問題図 9.5 ねじれ 2 直線と交わる直線

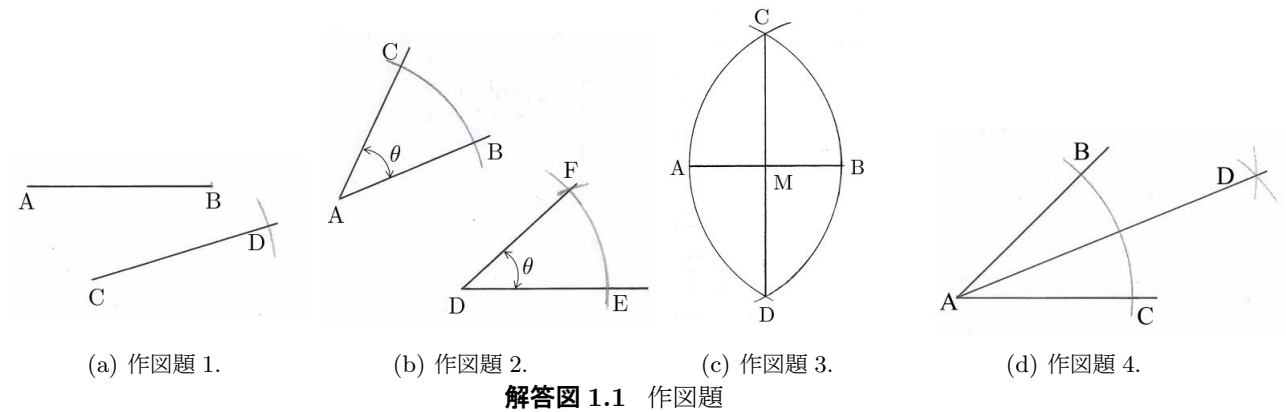


問題図 9.6 点から平面への垂線

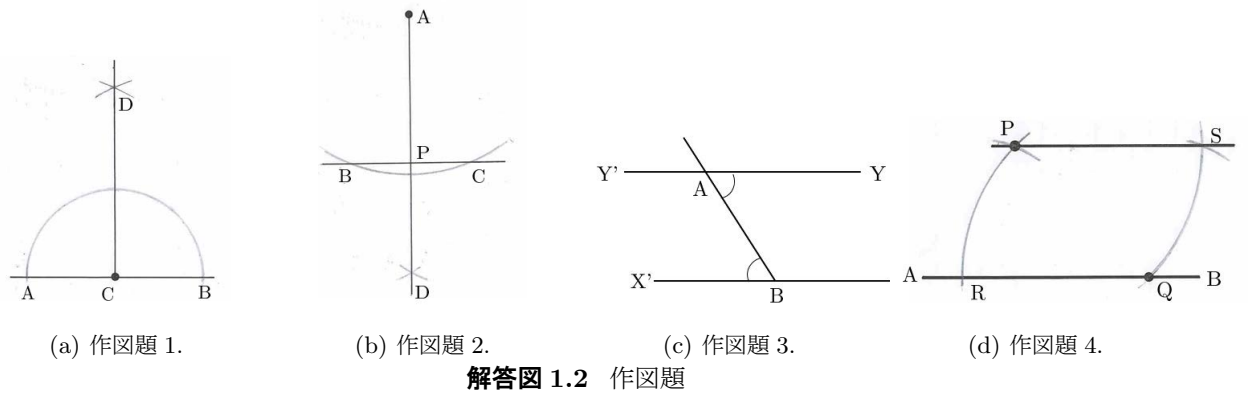
付録 B 章末問題の解答

B.1 第 1 章 図学の基礎 (解答)

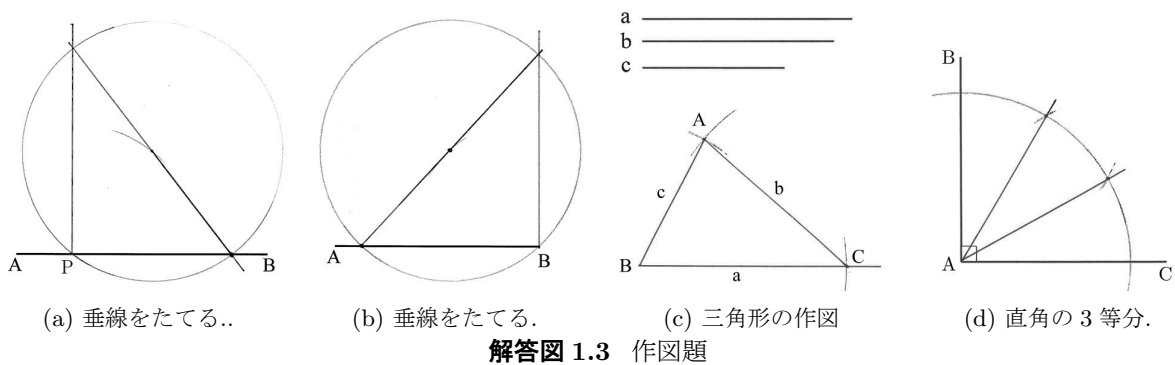
【1.1】 問題図 1.1 の解答図 1.1 を示す.



【1.2】 問題図 1.2 の解答図 1.2 を示す.



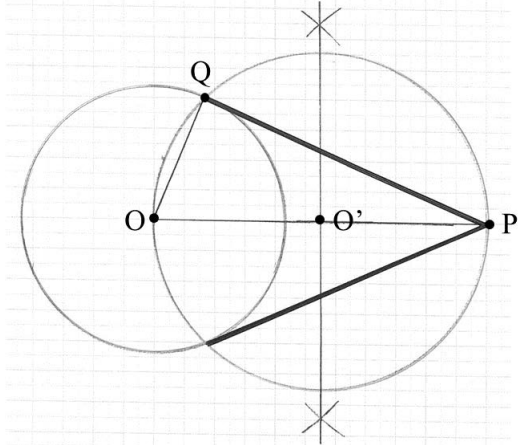
【1.3】 問題図 1.3 の解答図 1.3 を示す.



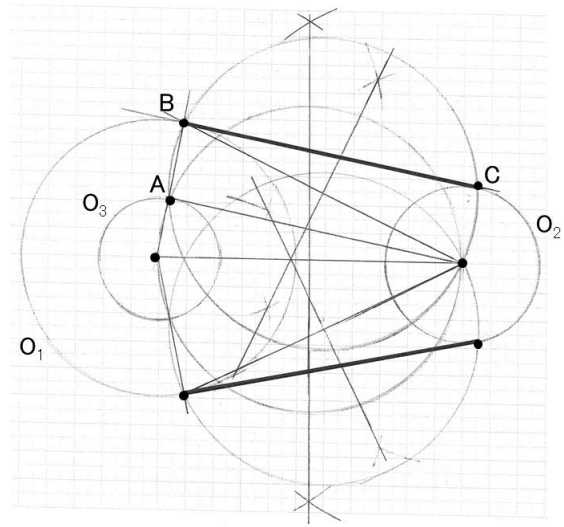
B.2 第2章 平面図形 (解答)

【2.1】 問題図 2.1 の解答図 2.1 を示す.

【2.2】 問題図 2.2 の解答図 2.2 を示す.



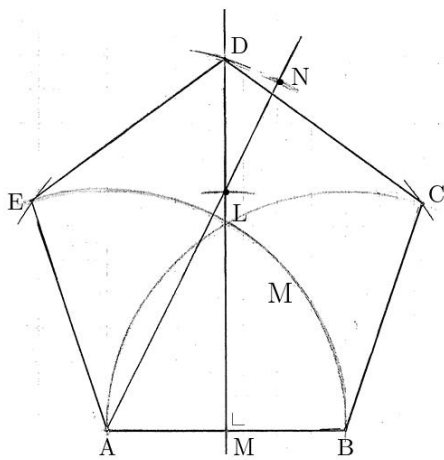
解答図 2.1 点 P から円 O への接線



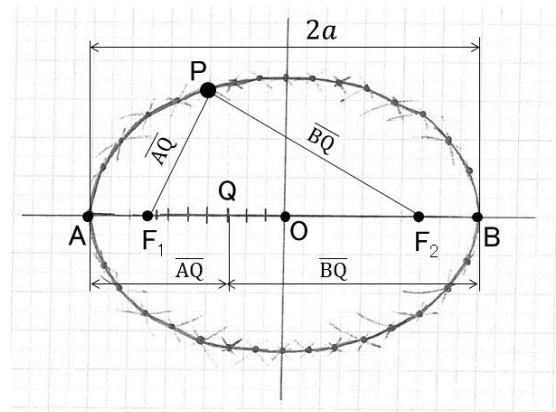
解答図 2.2 二円の共通接線

【2.3】 問題図 2.3 の解答図 2.3 を示す.

【2.4】 問題図 2.4 の解答図 2.4 を示す.



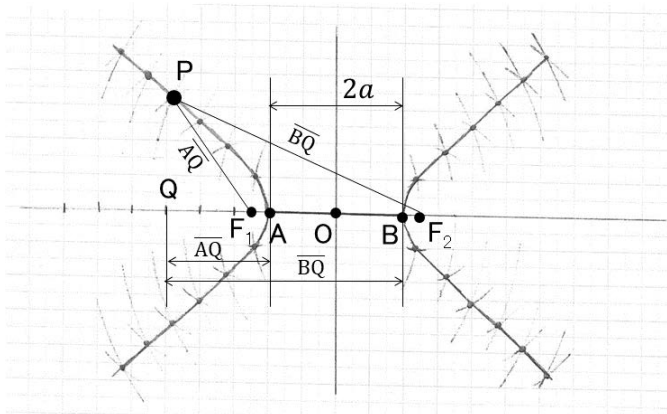
解答図 2.3 正五角形の作図



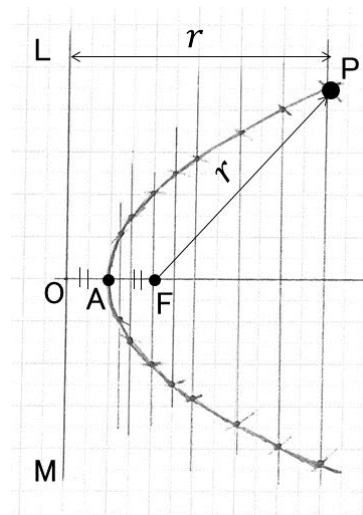
解答図 2.4 楕円の作図

【2.5】 問題図 2.5 の解答図 2.5 を示す.

【2.6】 問題図 2.6 の解答図 2.6 を示す.



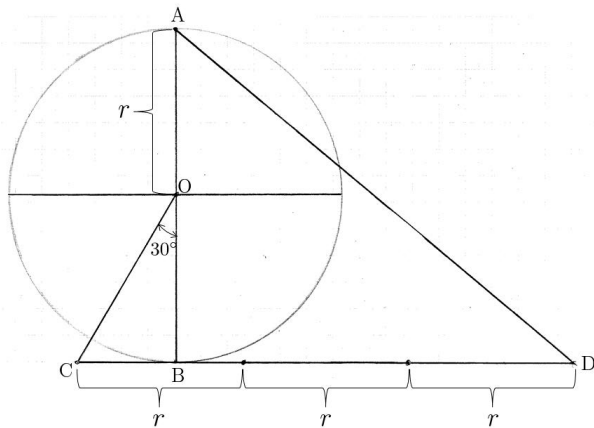
解答図 2.5 双曲線の作図



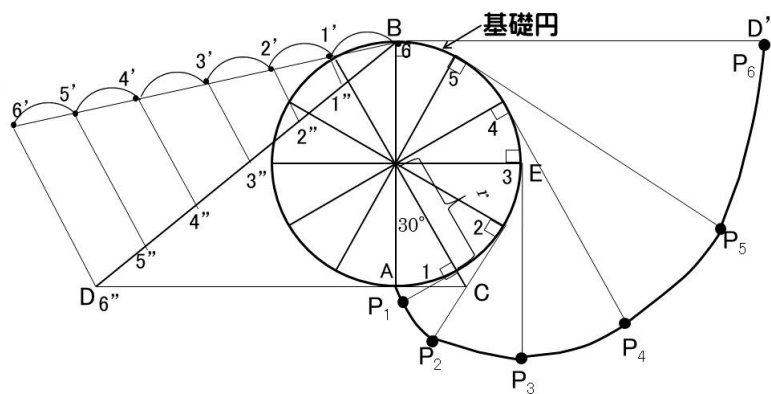
解答図 2.6 放物線の作図

【2.7】 問題図 2.7 の解答図 2.7 を示す.

【2.8】 問題図 2.8 の解答図 2.8 を示す.



解答図 2.7 半円の直延



解答図 2.8 インボリュート曲線の作図

B.3 第3章 正投影と主投影 (解答)

【3.1】 問題図 3.1 の解答図 3.1 を示す.

【3.2】 問題図 3.2 の解答図 3.2) を示す.

【3.3】 問題図 3.3 の解答図 3.3 を示す.

【3.4】 問題図 3.4 の解答図 3.4 を示す.

【3.5】 問題図 3.5 の解答図 3.5 を示す.

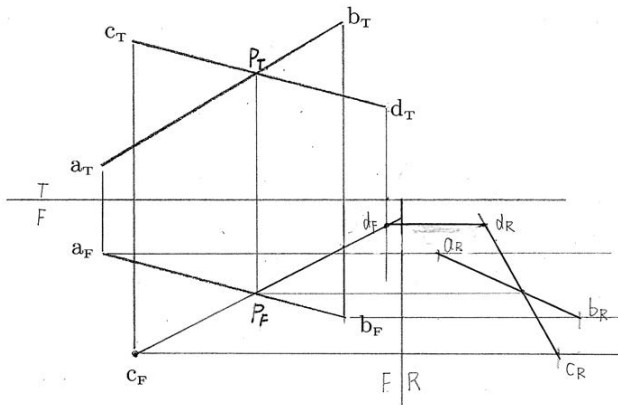
【3.6】 問題図 3.6 の解答図 3.6 を示す.

【3.7】 問題図 3.7 の解答図 3.7 を示す.

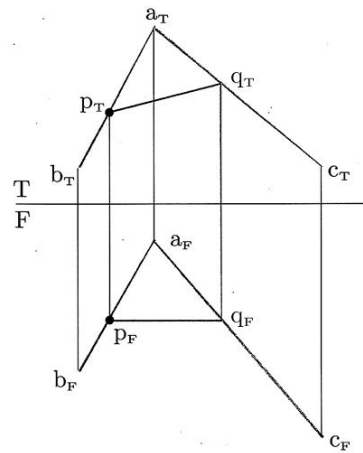
【3.8】 問題図 3.8 の解答図 3.8 を示す.

【3.9】 問題図 3.9 の解答図 3.9 を示す.

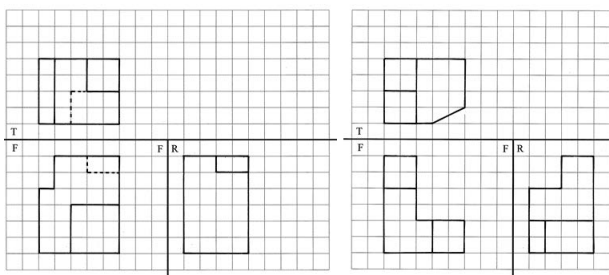
【3.10】 問題図 3.10 の解答図 3.10 を示す.



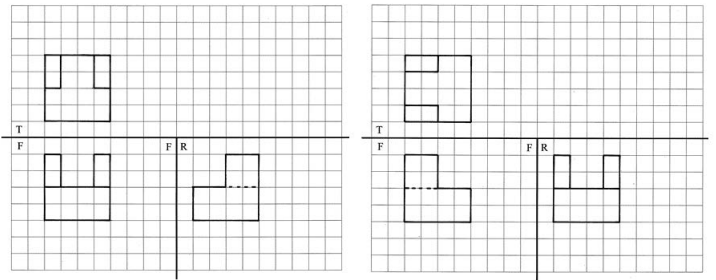
解答図 3.1 たがいに交わる 2 直線の主投影図



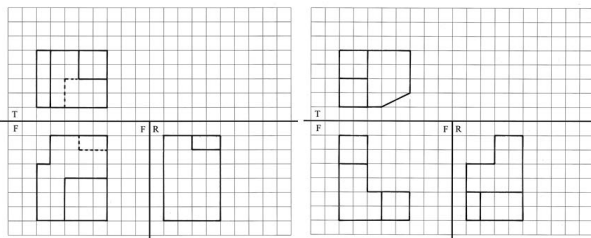
解答図 3.2 たがいに交わる 2 直線の主投影図



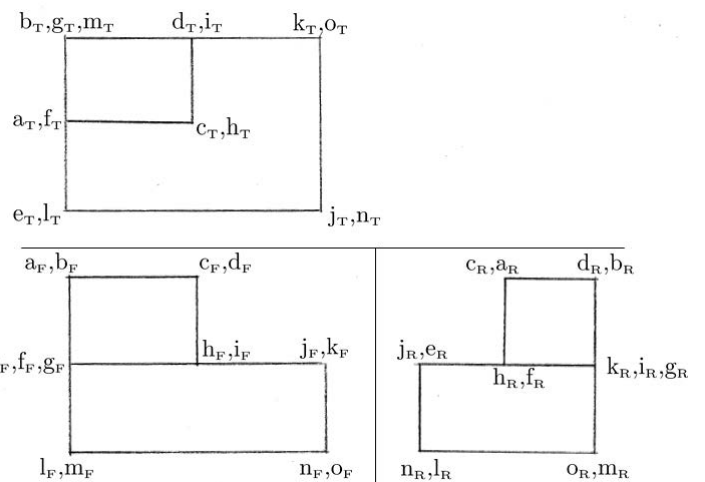
解答図 3.3 主投影図の作図



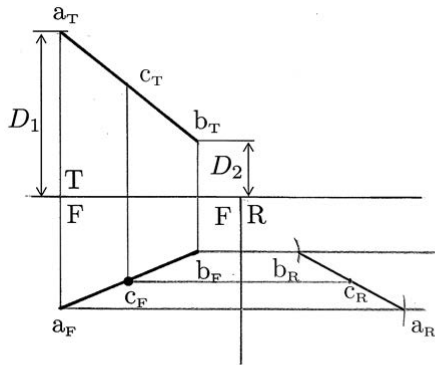
解答図 3.4 主投影図の作図



解答図 3.5 主投影図の作図

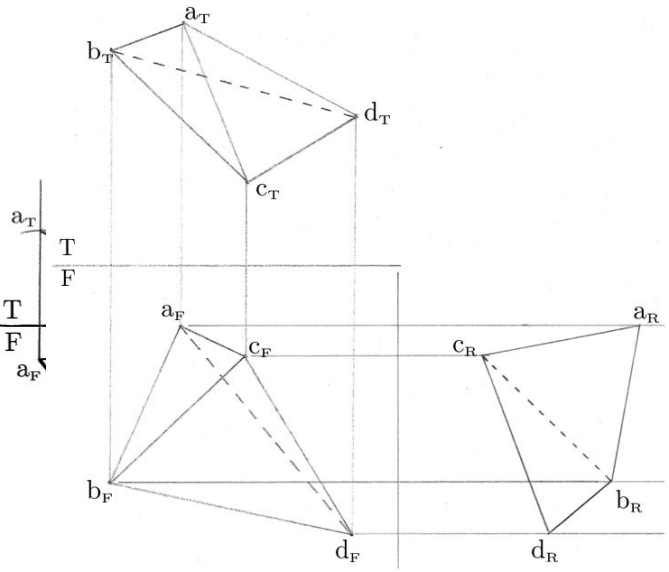


解答図 3.6 主投影図の作図

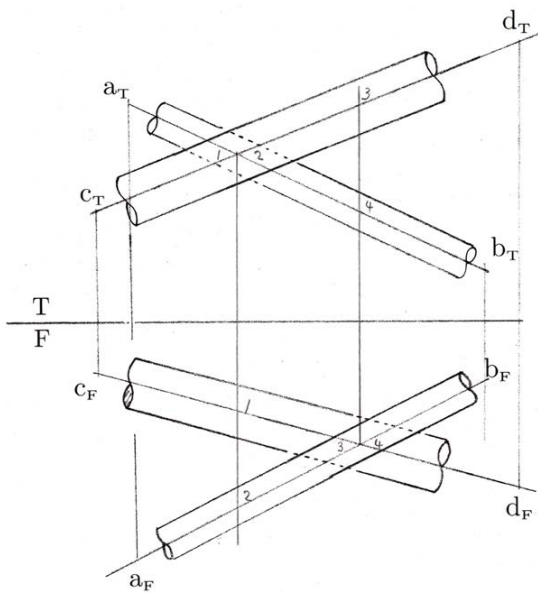


(a)

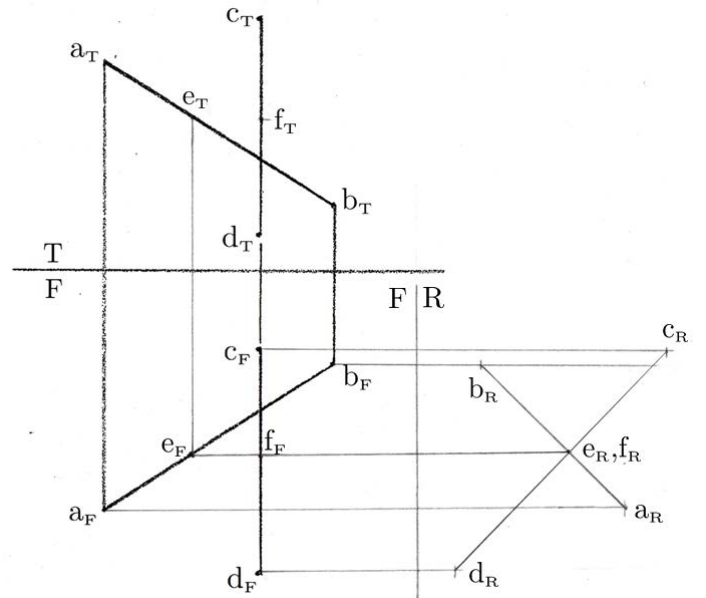
解答図 3.7 主投影図の作図



解答図 3.8 主投影図の作図



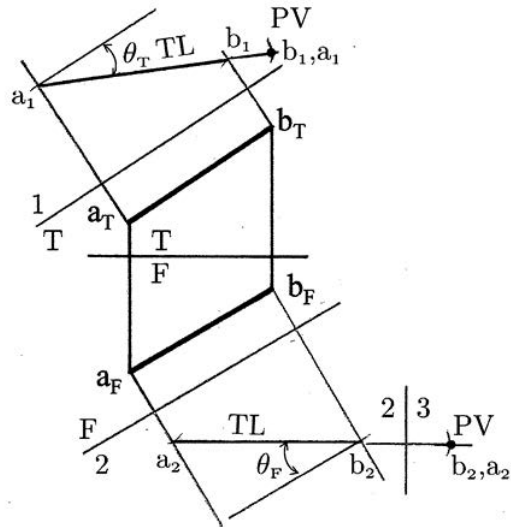
解答図 3.9 主投影図の作図



解答図 3.10 主投影図の作図

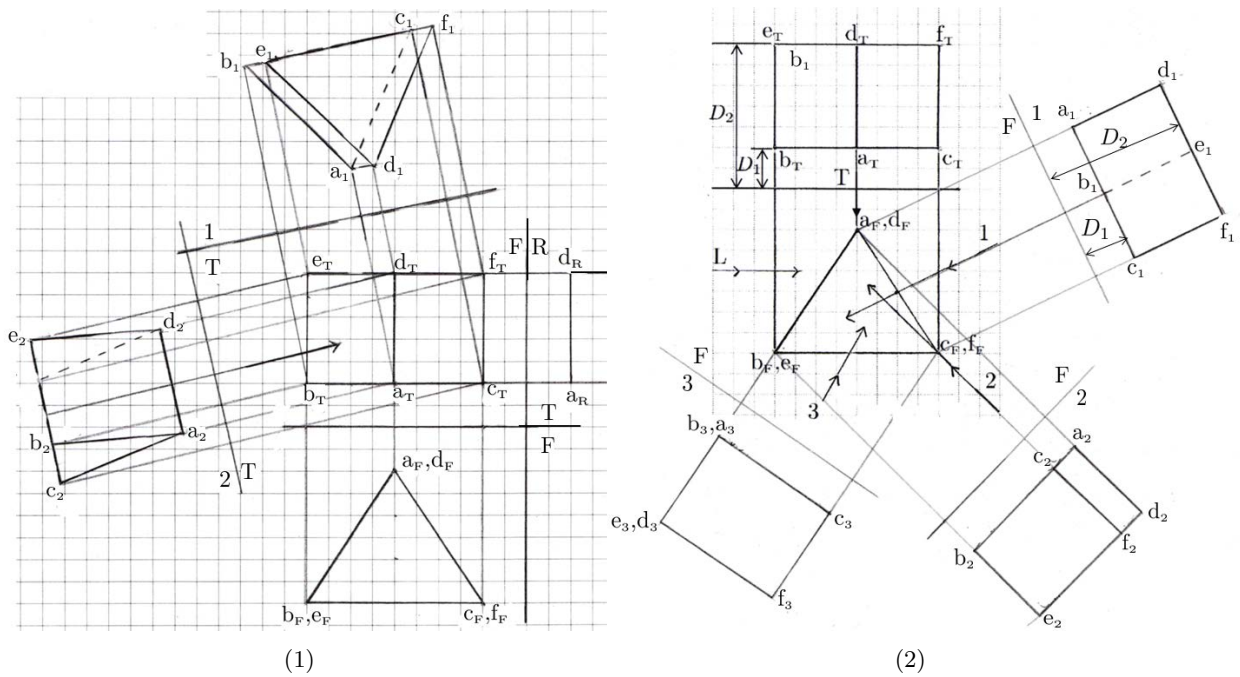
B.4 第4章 1次副投影 (解答)

【4.1】 問題図 4.1 の解答図 4.1 を示す.



解答図 4.1 直線の実長, 水平傾角 θ_T , 正面傾角 θ_F の作図

【4.2】 問題図 4.2 の解答図 4.2 を示す.



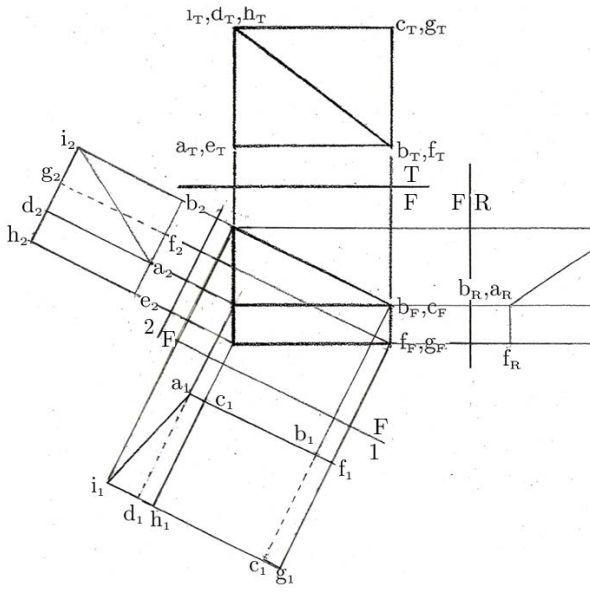
解答図 4.2 副立面図と副平面図

【4.3】 問題図 4.3 の解答図 4.3 を示す.

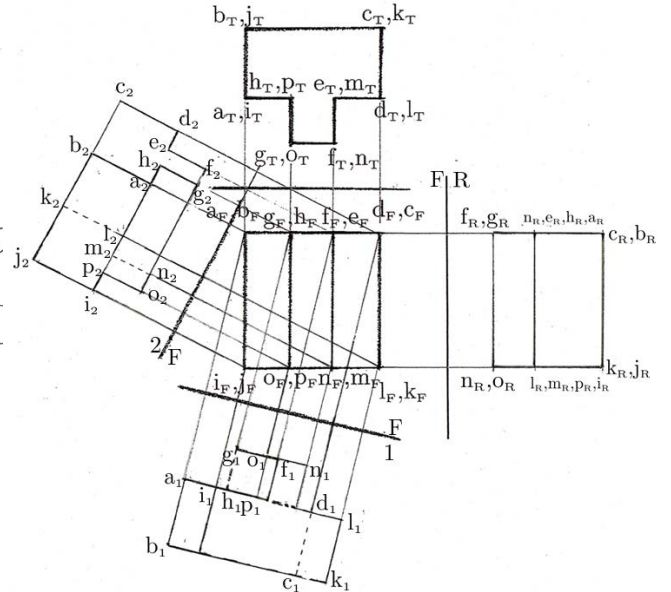
【4.4】 問題図 4.4 の解答図 4.4 を示す.

【4.5】 問題図 4.5 の解答図 4.5 を示す.

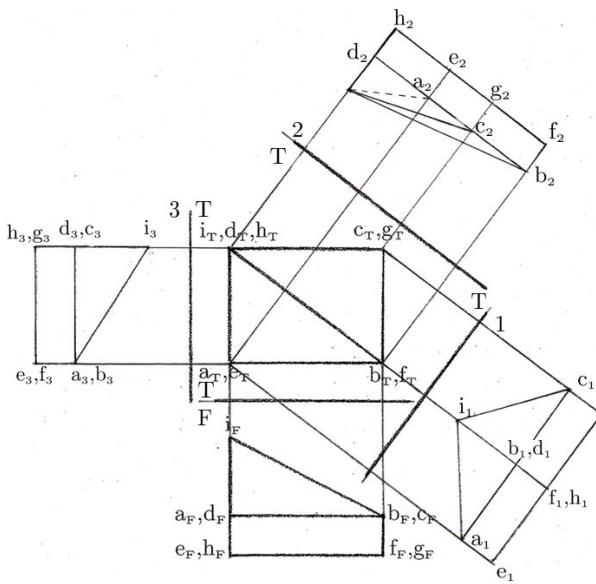
【4.6】 問題図 4.6 の解答図 4.6 を示す.



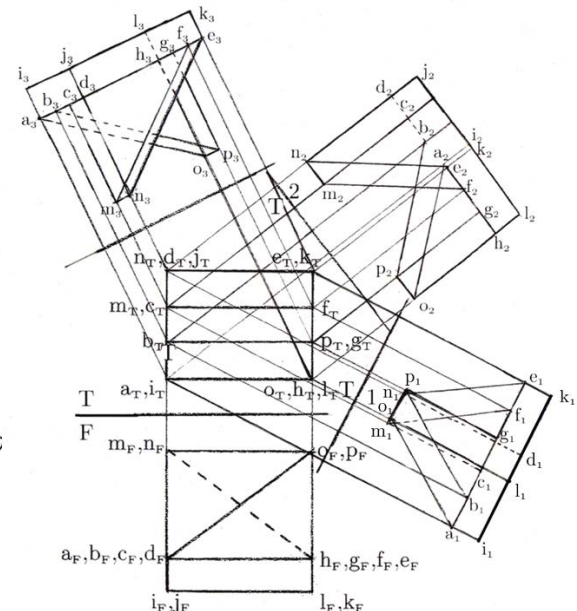
解答图 4.3 副平面图



解答图 4.4 副平面图



解答图 4.5 副立面图

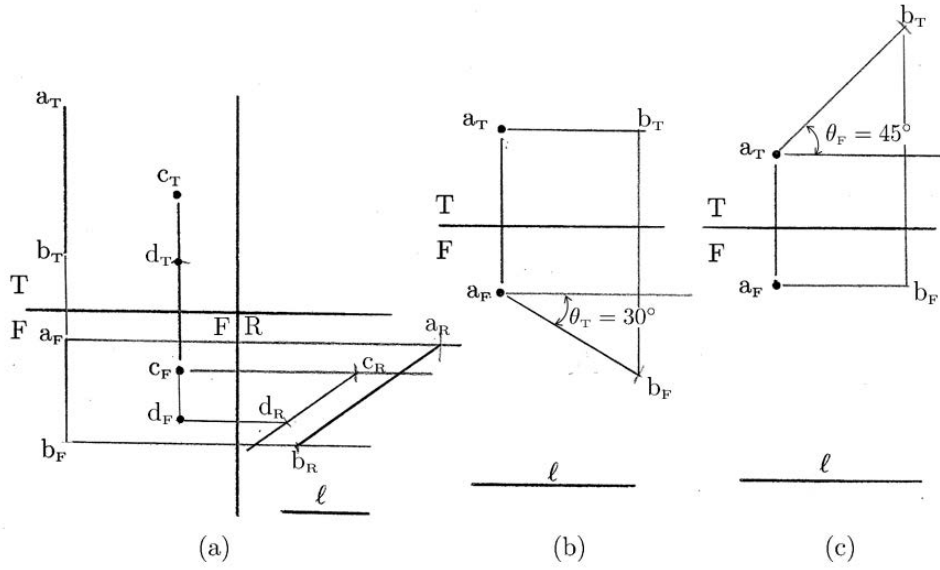


解答图 4.6 副立面图

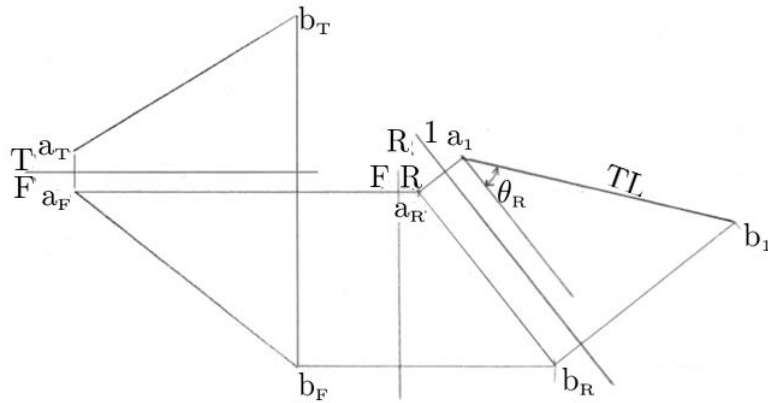
B.5 第5章 直線 (解答)

【5.1】 問題図 5.1 の解答図 5.1 を示す.

【5.2】 問題図 5.2 の解答図 5.2 を示す.

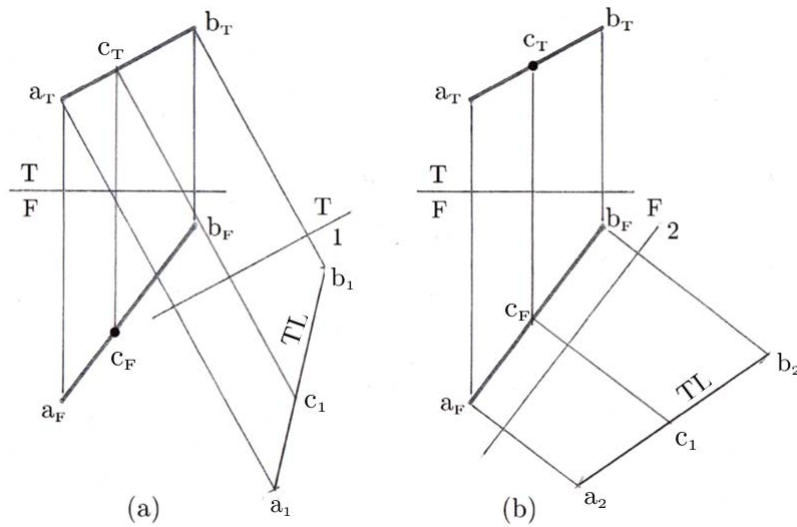


解答図 5.1 直線の実長, 水平傾角 θ_T , 正面傾角 θ_F の作図



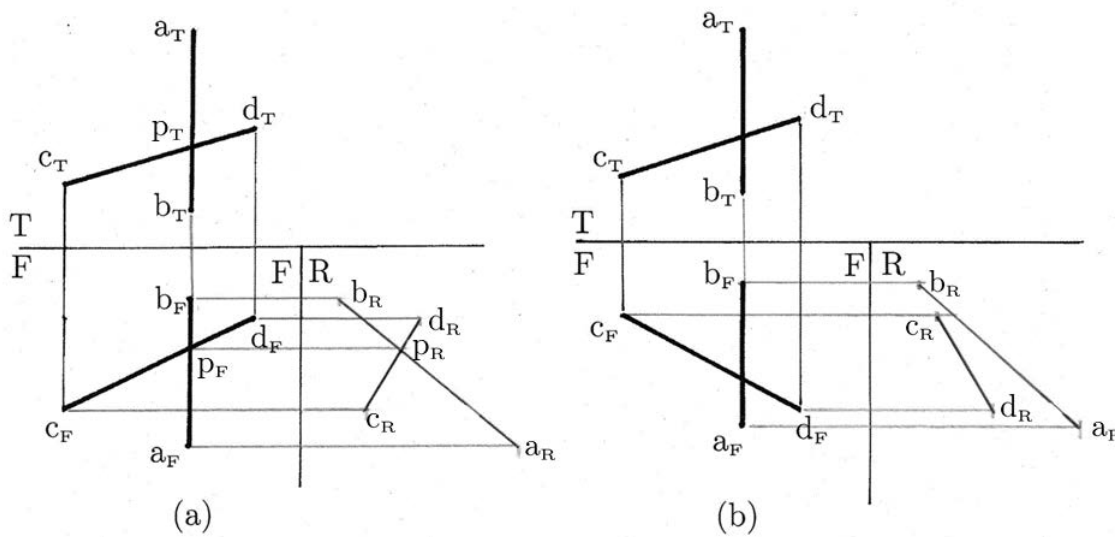
解答図 5.2 直線の実長と右側面図傾角 θ_R

【5.3】 問題図 5.3 の解答図 5.3 を示す.



解答図 5.3 副立面図と副平面図

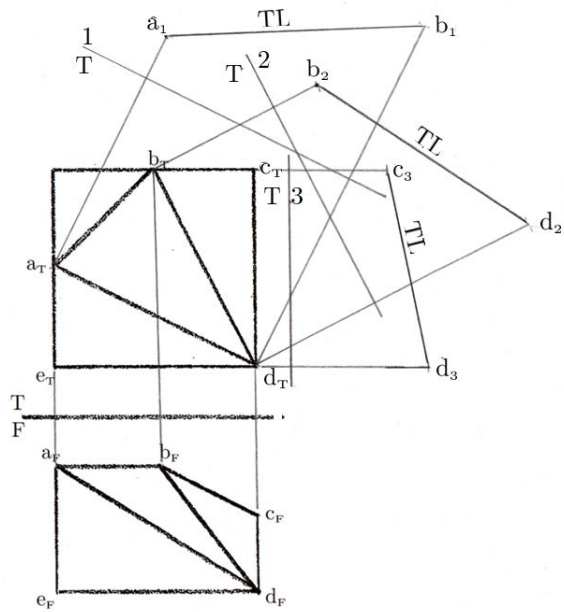
【5.4】 問題図 5.4 の解答図 5.4 を示す.



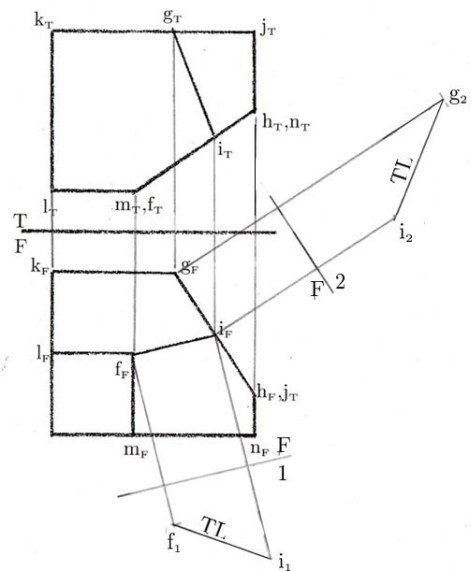
解答図 5.4 副立面図と副平面図

【5.5】 問題図 5.5 の解答図 5.5 を示す.

【5.6】 問題図 5.6 の解答図 5.6 を示す.



解答図 5.5 実長の作図

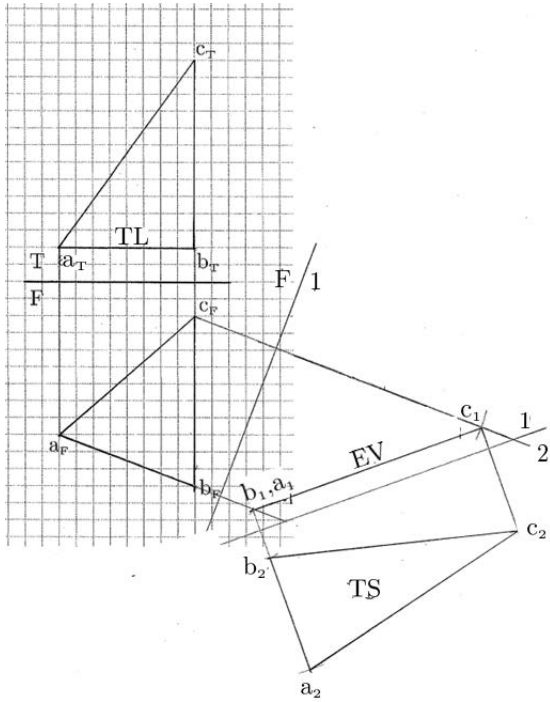


解答図 5.6 実長の作図

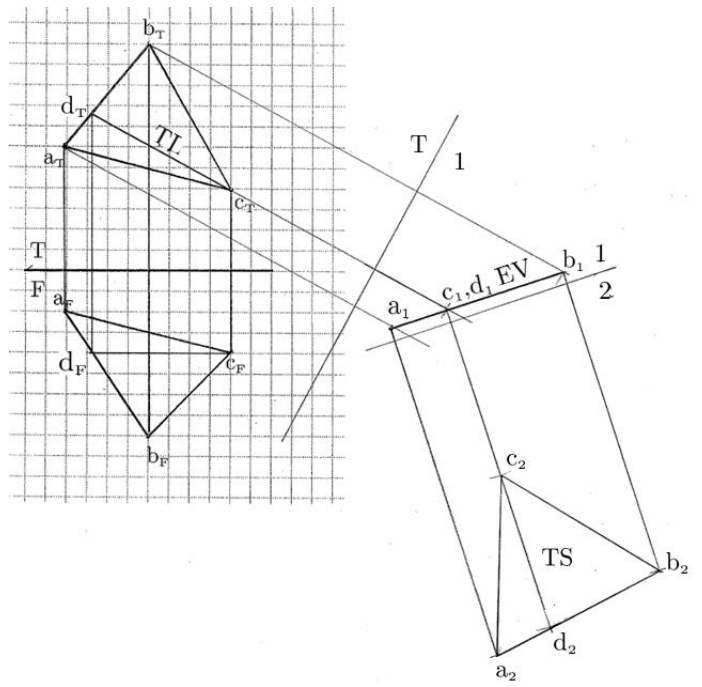
B.6 第6章 平面 (解答)

【6.1】 問題図 6.1 の解答図 6.1 を示す.

【6.2】 問題図 6.2 の解答図 6.2 を示す.



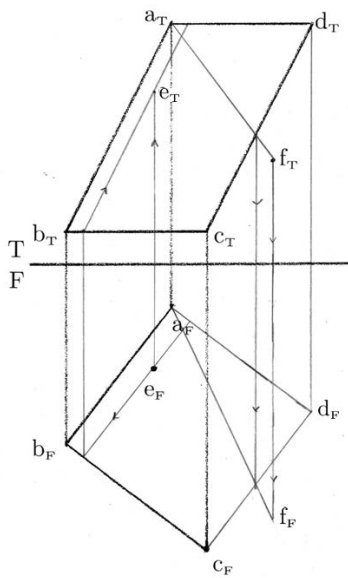
解答図 6.1 平面の実形



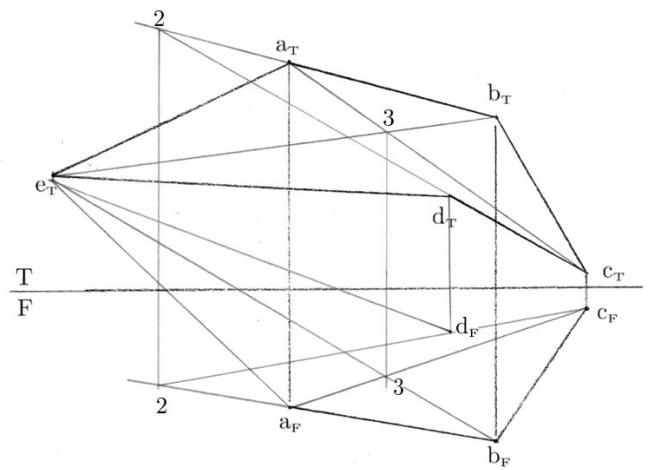
解答図 6.2 平面の実形

【6.3】 問題図 6.3 の解答図 6.3 を示す.

【6.4】 問題図 6.4 の解答図 6.4 を示す.



解答図 6.3 平面の主投影図

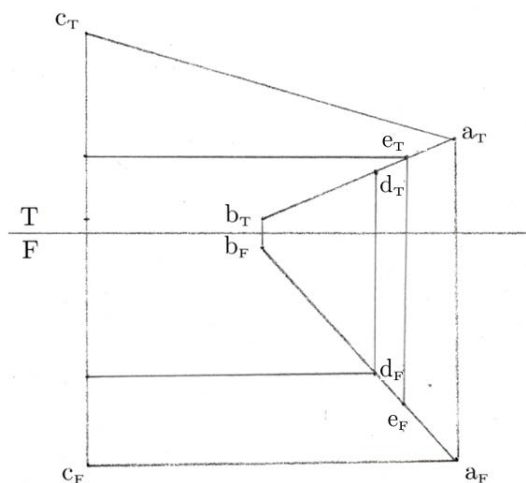


解答図 6.4 平面上の点の投影図

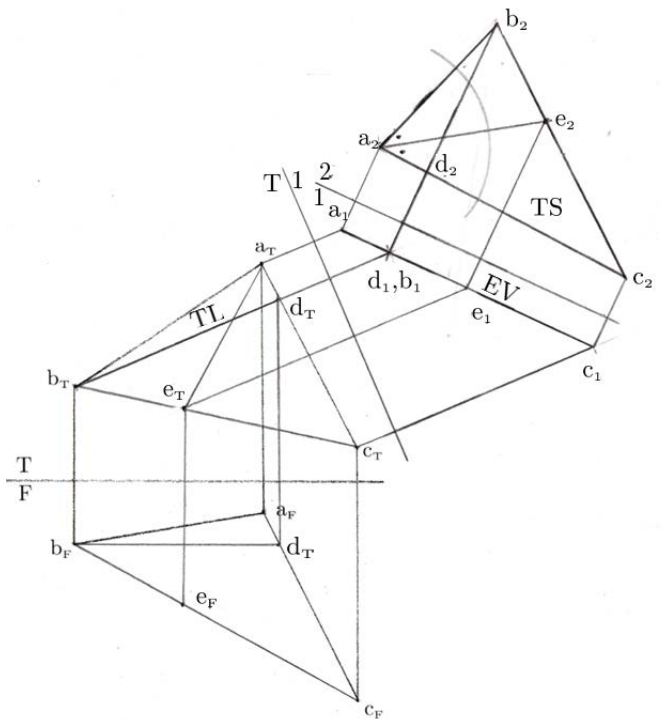
【6.5】 問題図 6.5 の解答図 6.5 を示す.

【6.6】 問題図 6.6 の解答図 6.6 を示す.

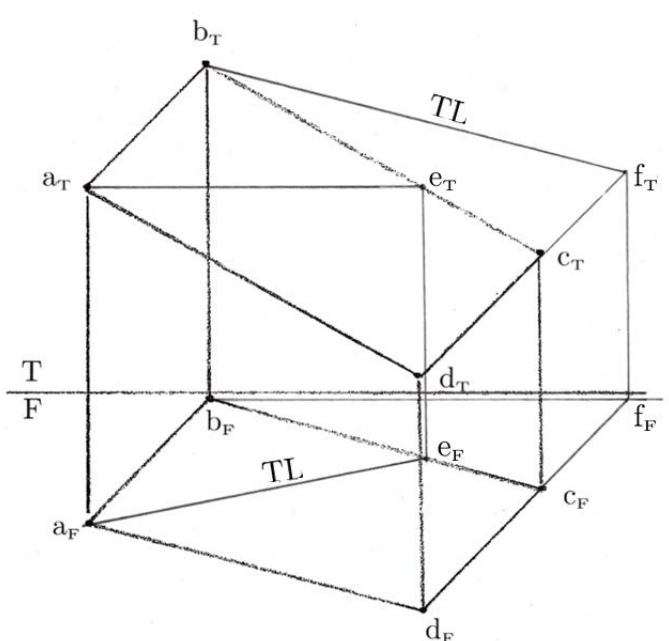
【6.7】 問題図 6.7 の解答図 6.7 を示す.



解答図 6.5 水平線と鉛直線



解答図 6.6 角の2等分線

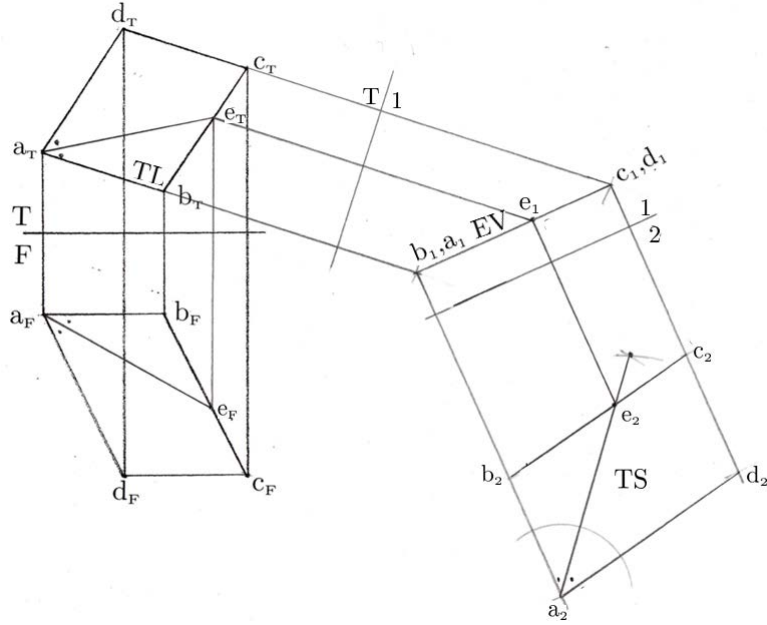


解答図 6.7 実長

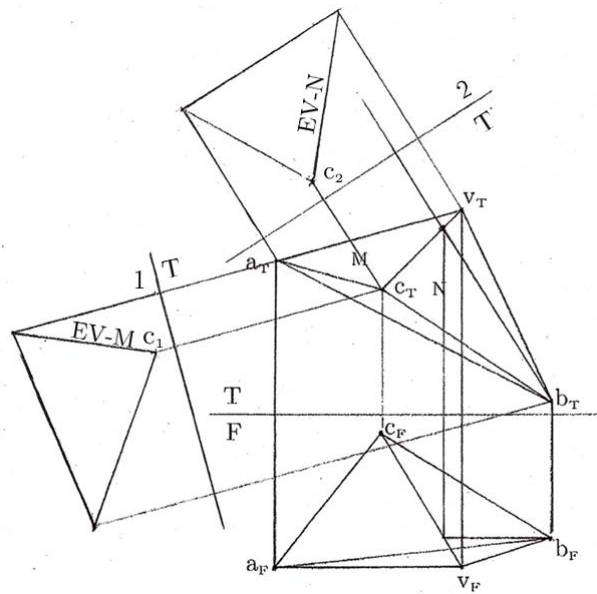
B.7 第7章 高次副投影(解答)

【7.1】 問題図 7.1 の解答図 7.1 を示す.

【7.2】 問題図 7.2 の解答図 7.2 を示す.



解答図 7.1 平面の実形と角の2等分線

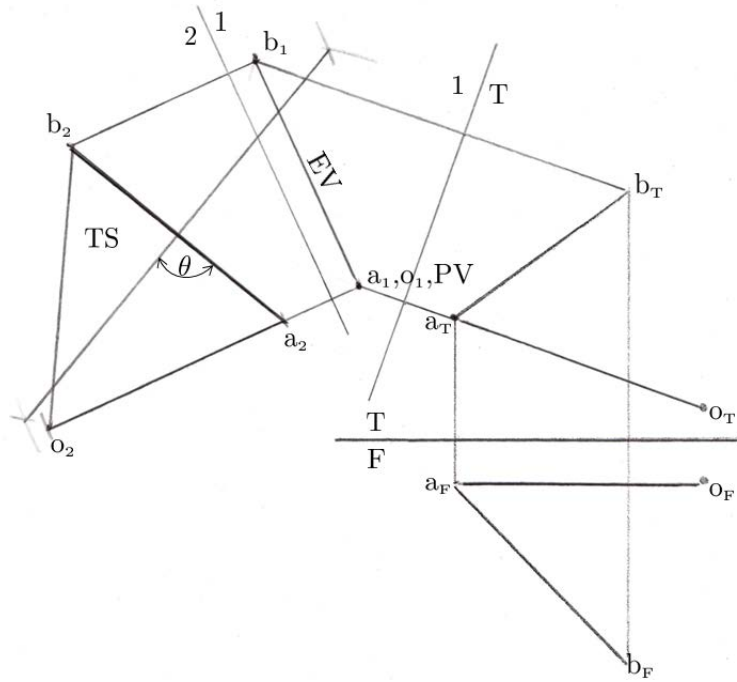


解答図 7.2 平面の端視図

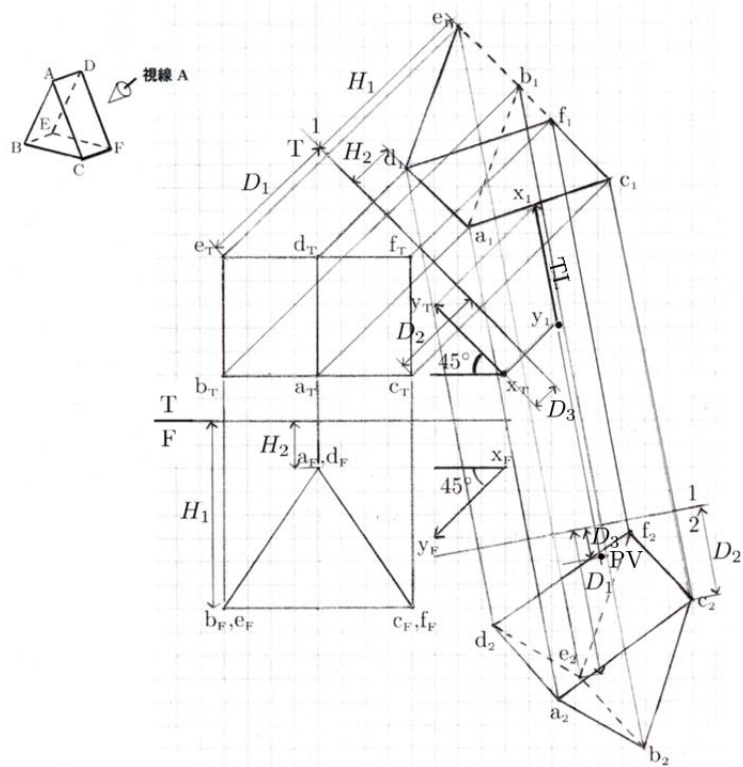
【7.3】 問題図 7.3 の解答図 7.3 を示す.

【7.4】 問題図 7.4 の解答図 7.4 を示す.

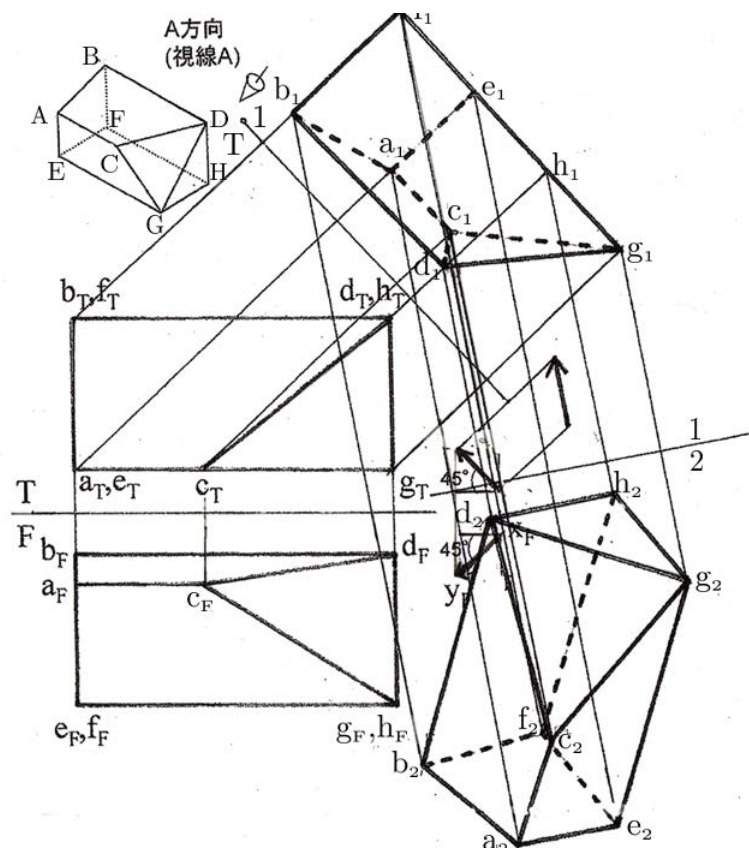
【7.5】 問題図 7.5 の解答図 7.5 を示す.



問題図 7.3 高次副投影



問題図 7.4 高次副投影: 視線 A からの作図

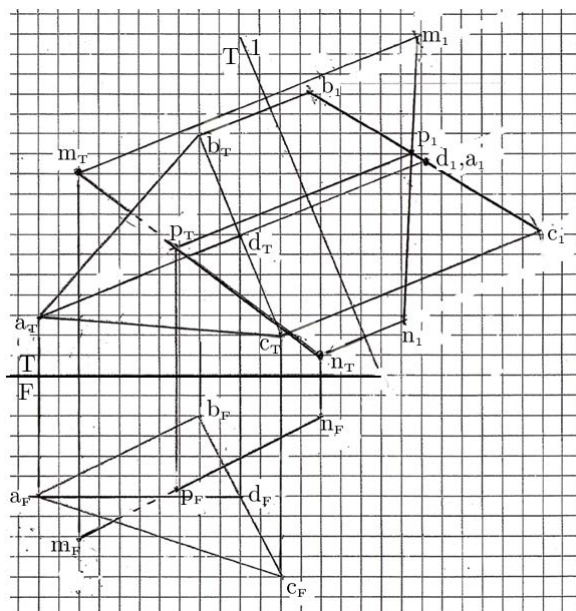


解答図 7.5 高次副投影: 視線 A からの作図

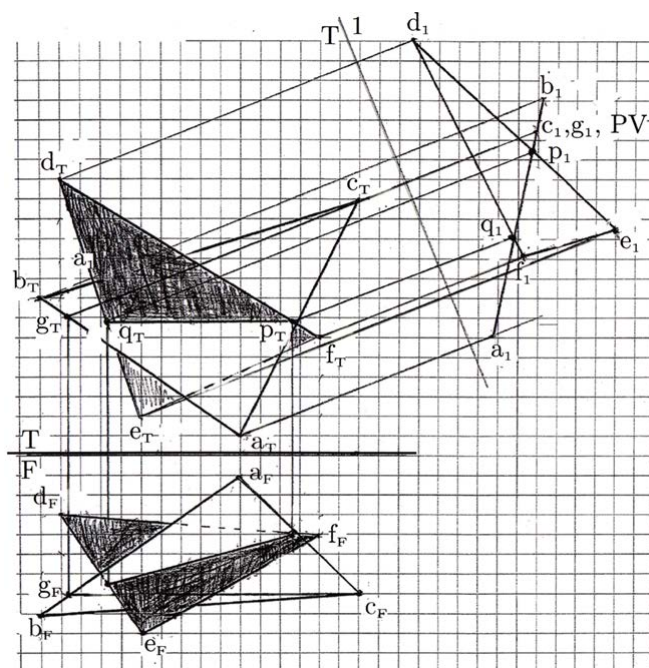
B.8 第8章 直線と平面の関係 (解答)

【8.1】 問題図 8.1 の解答図 8.1 を示す.

【8.2】 問題図 8.2 の解答図 8.2 を示す.



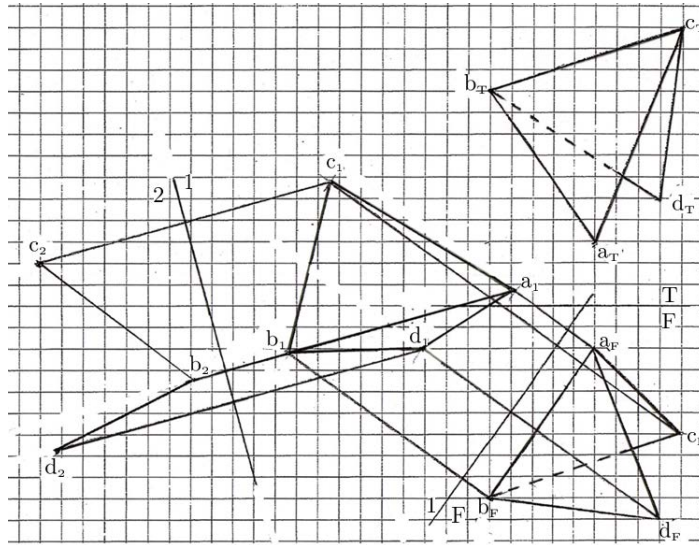
解答図 8.1 直線と平面の交点



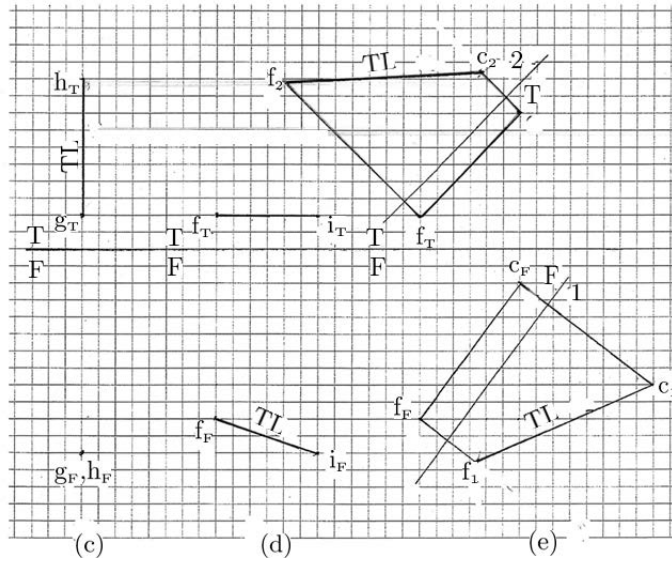
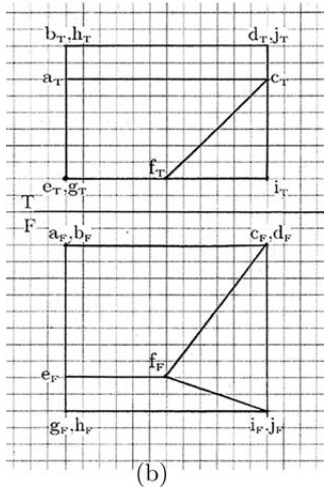
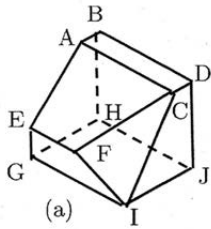
解答図 8.2 平面と平面の交線

【8.3】 問題図 8.3 の解答図 8.3 を示す.

【8.4】 問題図 8.4 の解答図 8.4 を示す.



解答図 8.3 二面角

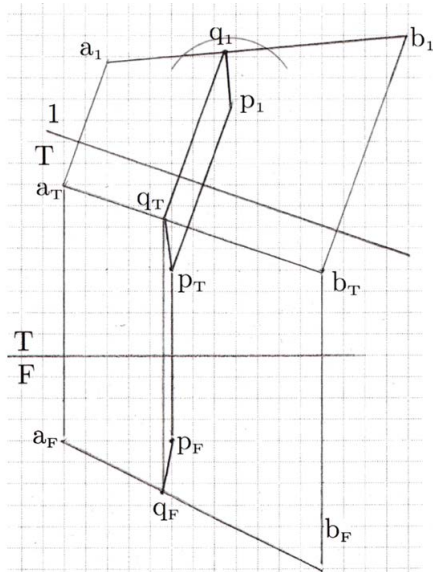


解答図 8.4 直線の実長

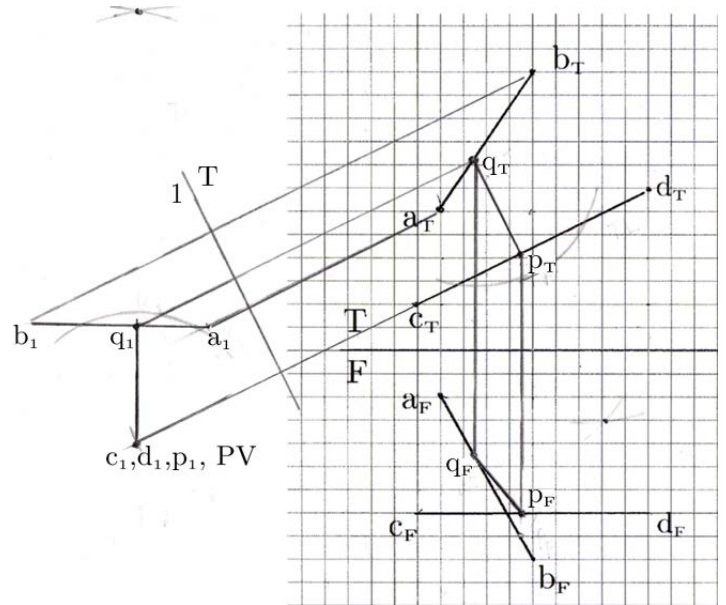
B.9 第9章 平行と垂直 (解答)

【9.1】 問題図 9.1 の解答図 9.1 を示す.

【9.2】 問題図 9.2 の解答図 9.2 を示す.



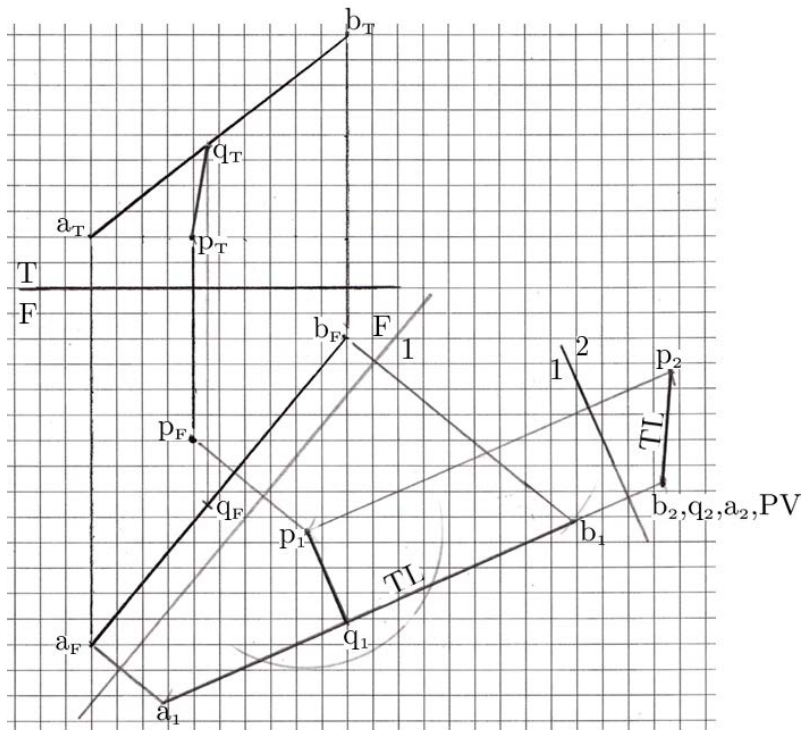
問題図 9.1 垂線の実長



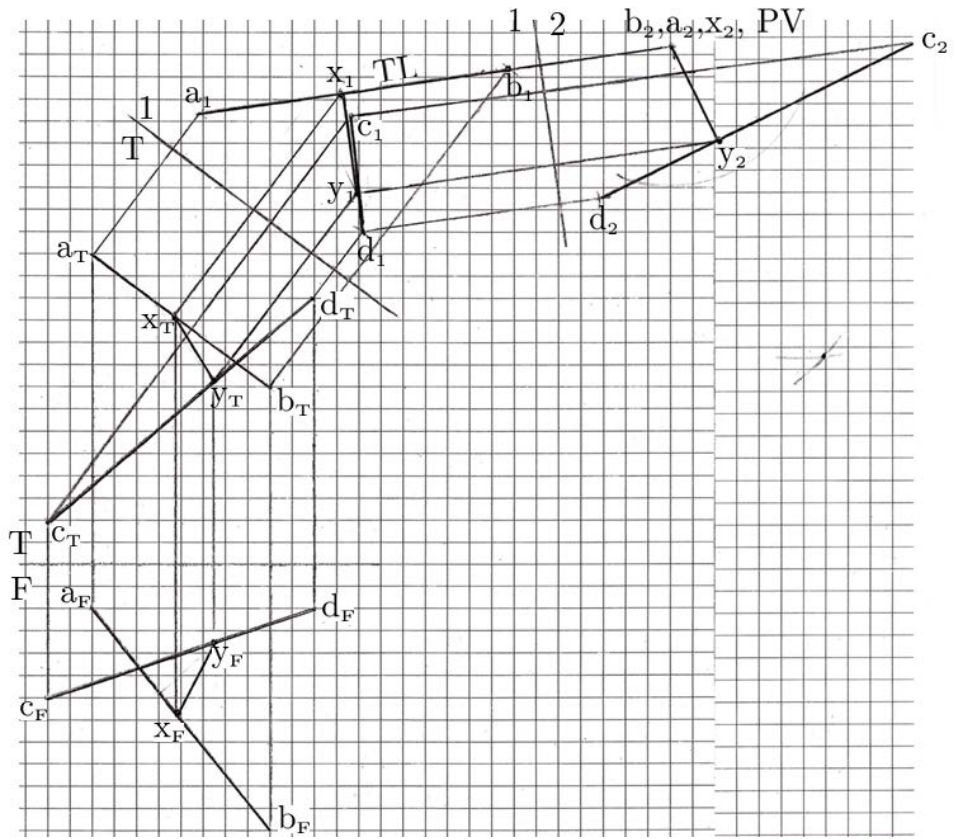
問題図 9.2 直線間の距離

【9.3】 問題図 9.3 の解答図 9.3 を示す.

【9.4】 問題図 9.4 の解答図 9.4 を示す.



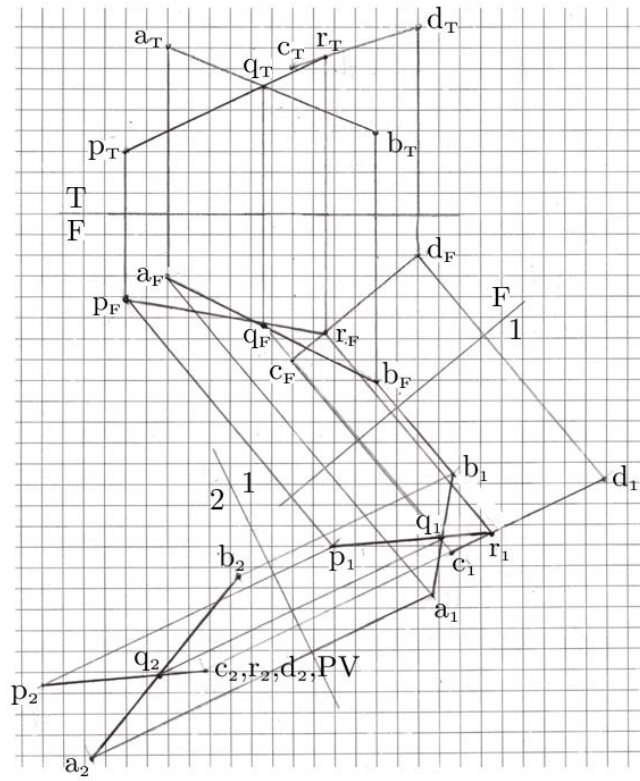
問題図 9.3 垂線の実長



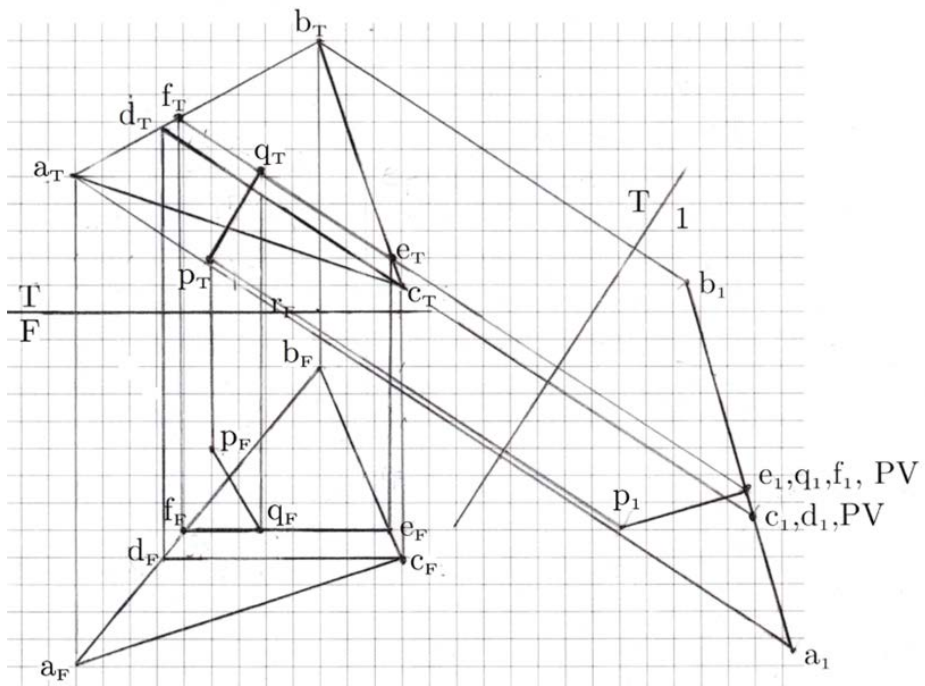
問題図 9.4 ねじれ 2 直線間の距離

【9.5 問題図 9.5 の解答図 9.5 を示す.

【9.6 問題図 9.6 の解答図 9.6 を示す.



問題図 9.5 ねじれ 2 直線と交わる直線



問題図 9.6 点から平面への垂線

付録C ユークリッド幾何学

■ 幾何学の成り立ち

数は人間の論理的思考のために不可欠なものである。図形や面積に関する知識についても古代遺跡にみる高度な建築技術の背景として存在していたはずである。数学の起源は人類の文化そのものの起源にさかのぼり、幾何学は図形や空間を扱う数学の論理体系として集成された。

幾何学(geometry)の語源は「geo(地)」と「metry(測る)」,すなわち「土地測量」に由来している。エジプトではナイル河の氾濫が頻繁に起こったため、氾濫後の土地の境界決定の必要性から測量術が発達し、このことが幾何学の誕生につながったといわれる。古代ギリシャにおいて幾何学は図形や空間の性質を研究する数学の一つの分野として発達し、幾何学の論理体系は紀元前300年頃エジプトのアレキサンドリアで活躍した数学者ユークリッドによって**原論**(element)としてまとめられた¹。原論は全13巻からなり、その後2000年以上にわたって使われることになった長命な科学書となった。第1巻でピタゴラスの定理が、第4巻で正五角形の作図法が紹介されている。幾何学にとどまらず、第5巻では実数論が、第7巻から第9巻では整数論やユークリッドの互除法が、そして幾何学にとどまらず第10巻では無理数論が説かれている。中世の11~13世紀近代になるとヨーロッパ各地に大学²が創設され、当時の数学の主な講義科目は幾何学であり原論は教科書として用いられた。当時の大学生はこの原論をとて苦手としていたようである³。一方で、原論は465個の定理を集めた全13巻の教科書にすぎないともいえるが、原論はその後のヨーロッパ文化を支える大きな柱となった。その根本理由は、この本のもつ意義は「なに」が書かれていることよりも、「いかにして」普遍的心理を導くかを説く**科学的方法**が説かれていることにある。エジプトに芽生えた幾何学は、現代に至るまで科学⁴の礎となっている。

ユークリッドは議論を始める前提として、まず23個の**定義**、5個の**公準**(要請)、9個の**公理**(共通概念)を述べる。第1巻では48個の命題が述べられ、一つ一つ何故その命題が成り立つかの証明が示されている。47番目がピタゴラスの定理である。

原論ではだれもが納得できる前提として、定義、公理、公準を示すことからはじめ、その前提を基礎として精緻な論理を積み上げ、しだいに複雑な過程をたどり、平面幾何・立体幾何から整数論に至る多くの定理の存在を証明する科学的方法が示されている。

原論ではどのようにして数々の定理を証明したのであろうか。原論の第1巻は次のような用語の定義、すなわち、ものごとの意味を定めることから始まっている。

■ 定義

1. 点とは部分をもたず、また大きさをもたないものである。
2. 線は幅をもたず長さだけをもつ。

¹グーテンベルグ(Johannes Gutenberg, 1400-1468)が発明した活字印刷機によって出版された最初の書物は聖書であり、1455年のことである。30年後の1482年にイタリアのヴェニスでユークリッドの原論が出版された。

²イタリアのボローニャ大学、イギリスのオックスフォード大学、ケンブリッジ大学、フランスのパリ大学など

³現在では中学校・高等学校で初等幾何を習う。

⁴科学、すなわちサイエンスは知識という言葉に由来し、観察・実験・測定などの科学的方法によって獲得した知識体系といえる。

3. 線の端は点である.
4. 直線とはその上にある点について一様に横たわる線である.
5. 面は長さ幅だけをもつ.
6. 面の端は線である.
7. 平面は同じようにそれ自身の上の直線に横たわる.

これらの定義は明確といえない点もあるがこれらは本文では使われていない.

8. 平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互の傾きである.
9. 角をはさむ線が直線であるときその角は直線角とよばれる.
10. 直線が直線の上にたてられて接角を互いに等しくするとき、等しい角の双方は直角であり上にたつ直線に対して垂線とよばれる.
11. 直角より大きい角は鈍角である.
12. 直角より小さい角は鋭角である.

角についての定義であり、曲線のなす角を定義してから直線角を定めている.

13. 境界はあるものの端である.
14. 図形は一つまたはいくつかの境界で囲まれたものである.

図形を境界 (円 (円弧) と直線 (線分)) で囲まれた領域として定義する.

15. 円は一つの線で囲まれた平面図形であって、その中にある一点があってその点からその線までの線分がすべて互いに等しいものである.
16. この点は円の中心とよばれる.
17. 円の直径とは円の中心を横切る直線で円を二つに分割する.
18. 半円とは直径とそれ自身の円形によって分割されたものが取り囲む図形である.
19. 直線図形とは線分に囲まれた図形であり三角形とは三つの、四角形とは四つの、多角形とは四つより多くの線分で囲まれた図形である.
20. 三角形のなかで等辺三角形は三つの等しい辺をもつ正三角形である. 二等辺三角形とは二つの辺だけが等しい. 不等辺三角形は三つの等しくない辺をもつ.
21. 直角三角形とは一つの直角をもつ三角形である. 鈍角三角形は一つの鈍角をもつ. 鋭角三角形は三つの鋭角をもつ.
22. 正方形は等辺であり直角をもつ. 長方形は直角をもつが等辺ではない. ひし形は等辺であるが直角をもたない. 長斜方形とは、対辺と対角が等しいが、等辺ではなく角が直角でないものである.

原論で扱う図形が厳密に定義されている。最後の長斜方形は平行四辺形のことですが、平行の定義が済んでいないのでこの形で記述したと思われる。平行の定義は交わらないという性質で記述されています。

23. 平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれかの方向においても互いに交わらない直線である。

つぎに、数学の議論の出発点としてだれもが認める原則として以下の公理が示された。

■ 公理

1. 同じものに等しいいくつかのものは互いにも等しい
2. 等しいものに等しいものを加えれば全体も等しい
3. 等しいものから等しいものを取り去れば残りは等しい
4. 等しいものに等しくないものを加えれば全体は等しくない
5. 同じものの2倍は互いに等しい
6. 同じものの半分は互いに等しい
7. 重なり合うものは互いに等しい
8. 全体は部分より大きい
9. 二つの線分は面積を囲まない

公準は、哲学で使われる要請と同様に、公理ほど自明ではなく証明もできないが学問上の原理として認めようというものである。

■ 公準

1. 任意の点から任意の点へ直線を引くことができる。
2. 有限の直線を連続してまっすぐに延長することができる。
3. 任意の中心と半径をもって円を描くことができる。
4. すべての直角は互いに等しい。
5. 1直線が2直線に交わり、同じ側の内角の和が2直角より小さければ、この2直角を限りなく延ばすと2直角より小さい角のある側において交わる。

このように、当たり前とも思われることがらを前提として、普段何気なく使っている、「三角形の内角の和は2直角である」とか、有名な三平方の定理(ピタゴラスの定理)もユークリッド幾何学によって導かれたのである。くり返しになるが、幾何学では「同じものにひとしいものは互いに等しい」というような5項目の公理と、「任意の点から任意の点へ直線を引くことができる」などの5項目の公準だけを手掛かりにして、つまりは、誰もが直感的に同意できる極めて単純な自明の前提を出発点として、次々に論理を組立てて数々の定理を導いていくのが特長なのである。数学という学問では、絶対的に正しいと言えることを出発点としてあらゆる定理が導き出される。このことは物理法則とは決定的に異なる。例えば、力学では「物体間の引力は質量に比例し距離の2乗に反比例する」という万有引力の仮説をたて、その仮説に基づいて計算された物体の運動が

現実の自然現象の観測結果をうまく説明できれば仮説は正しいと証明され、その仮説は万有引力の法則として認められるということになる。

この方法の精神、すなわち「正しく真理を探求するためには、自然、あるいは対象をとことん分割して要素を明らかにせよ」と説いたのはユークリッドから 2000 年後のデカルト René Descartes, 1596 - 1650 である。曰く、もっとも単純な要素からはじめてそれを演繹して最も複雑なものに達しうするための 4 つの規則を定めた。この規則は**方法序説**に以下のように記されている。

■ 規則

1. **明証の規則**: 明証的に真であると認めることなしには、いかなる事実をも真であるとして受けとらぬこと。
2. **分析の規則**: 研究する問題を出来るかぎり細かな小部分に分割すること。
3. **総合**: 思索を順序に従ってみちびくこと、最も単純で最も容易であるものからはじめて最も複雑なものへの認識へだんだん登りゆくこと。
4. **枚挙の規則**: 何一つ見落とさなかったかと保証されるほど、どの部分についても完全な枚挙を全般にわたって余すことなく再検査を行うこと

付録 D 直線・曲線・平面・曲面の解析幾何学

デカルトは「方法序説」(1637)において「座標」という概念を導入し「解析幾何学」を創始した。それまでの幾何学が三角形の「合同」,「相似」などを**作図**によって調べたのに対して,座標の導入によって解析幾何学は物体の運動とその変化を**数**を用いて扱うのに威力を発揮した。こうして,解析幾何は力学と結びつき,やがて,ニュートン・ライプニッツによって微分積分学へと発展した。

例として,「平行四辺形の2本の対角線互いに相手を二等分する」という命題の証明問題を解析幾何によって考えてみよう。付録D図.1には,平行四辺形の辺の一つを x 軸に重ね,1つの頂点を原点 $(0,0)$ として3つの頂点の座標が示してある。点A, Cの2点を通る直線の方程式は

$$\frac{y-b}{x-a} = \frac{0-b}{c-a} \quad (\text{D.1})$$

となり,したがって,

$$y = \frac{b}{a-c}x - \frac{bc}{a-c}$$

となる。また,点O, Bを通る直線の方程式は

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a+c}, \quad \therefore y = \frac{b}{a+c}x \quad (\text{D.3})$$

と表される。これらから,2本の対角線の交点が

$$x = \frac{1}{2}(a+c), \quad y = \frac{1}{2}b \quad (\text{D.4})$$

と求まる。

この座標がどの位置かについては,付録D図.1をみれば,AとDを結ぶ線分の中点は x 軸方向について, a と c の中央となり $(a+c)/2$ となる。同様に,OからBへの対角線の中点は式(D.4)の座標とも一致する。

この命題は,初等幾何によって,図形の合同,相似などの性質を調べることによって証明する問題は初等・中等教育によって行われてきた。これに対し,ここで紹介した方法では,図形を座標上に描いて数値化し,代数方程式をたてこれを解くことによって命題を証明できた。このように,座標と代数的な計算によって図形の性質を解明しようとする幾何学を**解析幾何**とよぶ。

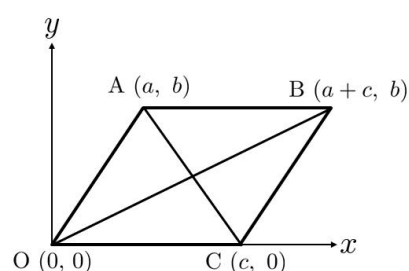
D.1 直線の方程式

D.1.1 2点間の距離と内分点・外分点

xy 座標に2つの点 $A(x_1, y_1)$ と $B(x_2, y_2)$ があり,この2点間の距離 d は三平方の定理から

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (\text{D.5})$$

と求まる。



付録図 D.1 座標による図形の表現 (D.2)

m と n を正の整数とするととき線分 AB を $m:n$ に内分する点と外分 ($m \neq n$) する点の座標を求める. 線分 AB において

$$\overline{AD} : \overline{DB} = m : n$$

となる点 D が線分 AB を $m:n$ に内分する点である (付録図 D.2 (1)). また, $m > n$ のとき, 線分 AB を B の方向に延長した半直線 AB 上の延長部分にある

$$\overline{AD} : \overline{DB} = m : n$$

となる点 D が線分 AB を $m:n$ に外分する点である (付録図 D.2 (2)).

また, $m < n$ のとき, 線分 BA を A の方向に延長した半直線 BA 上の延長部分にある

$$\overline{AD} : \overline{DB} = m : n$$

となる点 D が線分 AB を $m:n$ に外分する点である (付録図 D.2 (3)).

線分 AB を $m:n$ に内分, 外分する点の座標は次式から求まる. 2点 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ を結ぶ線分 AB を内分する点の座標は

$$\left(\frac{mx_2 + nx_1}{m+n}, \frac{my_2 + ny_1}{m+n} \right) \tag{D.6}$$

となる. また, $m:n$ の比に外分する点の座標は

$$\left(\frac{mx_2 - nx_1}{m-n}, \frac{my_2 - ny_1}{m-n} \right) \tag{D.7}$$

と求まる.

D.1.2 直線の方程式の導出

2点 (x_1, y_1) と (x_2, y_2) を通る方程式は以下で表される.

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \tag{D.8}$$

これを見なれた形に直すと

$$y = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}x + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2 - x_1} \tag{D.9}$$

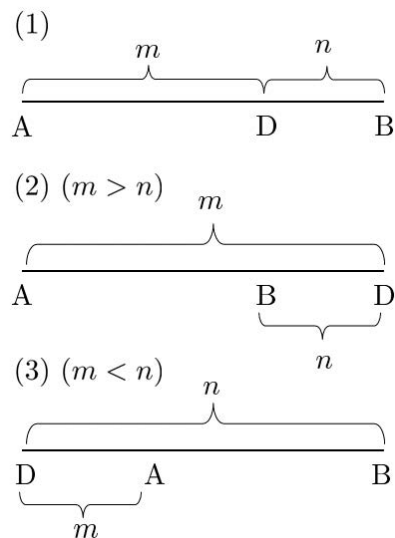
と書ける. 上式は一般には

$$ax + by = c \tag{D.10}$$

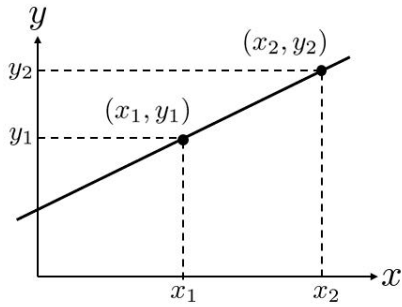
と書ける.

平面上の直線の方程式 (D.10) をベクトルの内積の観点で見直してみよう. 例えば,

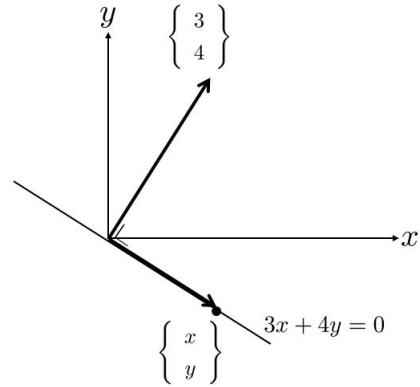
$$3x + 4y = 0 \tag{D.11}$$



付録図 D.2 内分点と外分点



付録図 D.3 座標に引いた直線



付録図 D.4 内積による直線の方程式の理解

という方程式で表される直線を考える．この式を y について解いて $y = -\frac{3}{4}x$ と表せば，傾きが $-\frac{3}{4}$ の直線とわかり $\begin{Bmatrix} 4 \\ -3 \end{Bmatrix}$ の方向に直線が伸びていることがわかる．一方，方程式 $3x + 4y = 0$ を内積を利用して表すと

$$\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = 0 \quad (\text{D.12})$$

と書ける．この図形的な意味を考えると，式 (D.12) は，式 (D.11) の直線上の各点に対して，位置ベクトル $\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix}$ がベクトル $\begin{Bmatrix} 3 \\ 4 \end{Bmatrix}$ と直交することを意味する．つまり，式 (D.12) は直線が原点を通過して常に特定の方向に対して直角となるように引かれることを意味する．これは直線に別の見方を与え，式 (D.11) の係数の意味を直接に表しています．原点を通らない場合には，式 (D.11) を平行移動して

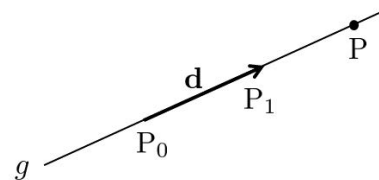
$$3(x - p) + 4(y - q) = 0 \quad (\text{D.13})$$

とすればよい．これを整理すれば $ax + by = c$ ， ($c = 3p + 4q$) となって式 (D.10) に一致する．

D.1.3 直線のベクトル方程式と媒介変数表示

空間に直線 g が与えられたとする (付録図 D.6)． g 上に相異なる 2 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ と $P_1(x_1, y_1, z_1)$ をとる． $\overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{d}$ を直線 g の**方向ベクトル**という．点 $P(x, y, z)$ が直線 g 上にあるための条件は，ベクトル $\overrightarrow{P_0P}$ が $\overrightarrow{P_0P_1} = \mathbf{d}$ の 1 次結合であること，

$$\overrightarrow{P_0P} = t\overrightarrow{P_0P_1} = t\mathbf{d} \quad (\text{D.14})$$



付録図 D.5 直線の方程式

となる．直交座標系の基底 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ に関する \mathbf{d} の成分 (**方向余弦**) を (L, M, N) とおくと，式 (D.4) より直線 g の方程式は

$$\begin{cases} x - x_0 = t(x_1 - x_0) = tL \\ y - y_0 = t(y_1 - y_0) = tM \\ z - z_0 = t(z_1 - z_0) = tN \end{cases} \quad (\text{D.15})$$

となる. これを g の t を媒介変数とする**媒介変数表示**という. これから,

$$\frac{x - x_0}{x_1 - x_2} = \frac{y - y_0}{y_1 - y_2} = \frac{z - z_0}{z_1 - z_2} \quad (\text{D.16a})$$

$$\frac{x - x_0}{L} = \frac{y - y_0}{M} = \frac{z - z_0}{N} \quad (\text{D.16b})$$

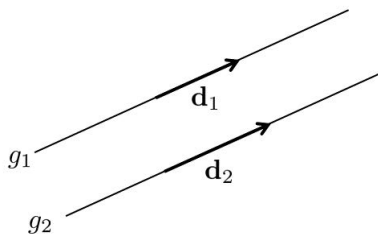
を得る. 式 (D.16a) は 2 点 P_0, P_1 を通る直線の方程式であり, 式 (D.16b) は 1 点 P_0 を通り方向ベクトル (L, M, N) をもつ直線の方程式となる.

例 1 2 直線の関係 2 直線 g_1, g_2 の方程式をそれぞれ

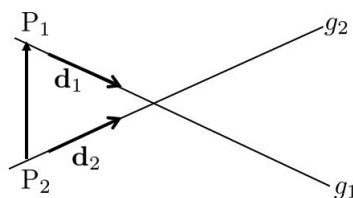
$$\frac{x - x_1}{L_1} = \frac{y - y_1}{M_1} = \frac{z - z_1}{N_1} \quad (\text{D.17a})$$

$$\frac{x - x_2}{L_2} = \frac{y - y_2}{M_2} = \frac{z - z_2}{N_2} \quad (\text{D.17b})$$

とする.



付録図 D.6 平行な 2 直線



付録図 D.7 交わる 2 直線

(a) g_1 と g_2 が平行であるか一致するための条件 (付録図 D.6) は, 行列

$$\begin{bmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{bmatrix}$$

の階数が 1 となることと同値となる.

(b) g_1 と g_2 が一致するための条件は, 行列

$$\begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{bmatrix}$$

の階数が 1 となることと同値となる.

(c) g_1 と g_2 が 1 点で交わるための条件 (付録図 D.7) は, 行列

$$\begin{bmatrix} L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{bmatrix}$$

の階数が 2 であって,

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{D.18})$$

となることである.

(d) g_1 と g_2 がねじれの位置になる, すなわち平行でもなく交わりもしないための条件は, 行列式 (D.18) が 0 でないこと, すなわち

$$\begin{vmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 & z_1 - z_2 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} \neq 0 \quad (\text{D.19})$$

となる.

D.1.4 平面上の直線

定点の位置ベクトルを \mathbf{k} とする. 点 K を通り, ベクトル \mathbf{v} に平行な直線上の点 R は適当な実数 t を用いて

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} + t\mathbf{v} \quad (\text{D.20})$$

と表される. ベクトルの成分で表すと, $\mathbf{r} = (x, y)$, $\mathbf{k} = (x_1, y_1)$, $\mathbf{v} = (m, n)$ として

$$\begin{cases} x = x_1 + mt \\ y = y_1 + nt \end{cases} \quad (\text{D.21})$$

という媒介変数表示が得られる. 変数 t を媒介変数 (パラメータ) という.

媒介変数を消去すれば, 見慣れた直線の方程式

$$nx - my - nx_1 + my_1 = 0 \quad (\text{D.22})$$

が得られる. これは, \mathbf{v} に垂直なベクトル $\mathbf{u} = (n, -m)$ を式 (D.20) の両辺にスカラー積することにより直ちに得られる.

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = \mathbf{u} \cdot \mathbf{k} \quad (\text{D.23})$$

ここで, $|\mathbf{u}| = 1$ とすれば, 右辺 $\mathbf{u} \cdot \mathbf{k}$ は原点から直線に下した垂線の長さ, すなわち原点から直線までの距離を表わす.

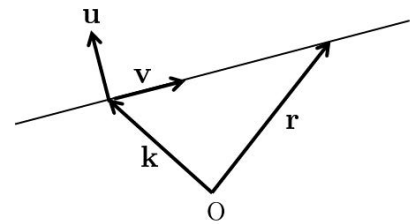
式 (D.20) の両辺にベクトル積を施しても t を消去することができる.

$$\mathbf{u} \times \mathbf{r} = \mathbf{u} \times \mathbf{k} \quad (\text{D.24})$$

これらのベクトルは x, y 成分だけをもつのでこのベクトル積は z 成分のみをもつ. したがって,

$$my - nx = my_1 - nx_1 \quad (\text{D.25})$$

となり, 式 (D.22) と同値となる.



付録図 D.8 直線のベクトル表示

D.1.5 平面上の点と直線の距離

直線の方程式を

$$ax + by + c = 0 \quad (D.26)$$

とする. 点 $\mathbf{p} = (x_0, y_0)$ から, この直線までの距離 l は次のようにして求まる. 点 \mathbf{p} と直線上の任意の点 \mathbf{r} を結ぶ線分の, 直線に垂直な成分の絶対値が求める距離となる. 式 (D.26) から, $\begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix}$ は直線に垂直なベクトルなので,

$$\mathbf{u} = \begin{Bmatrix} a \\ b \end{Bmatrix} \quad (D.27)$$

とすれば, 求める距離は

$$l = \frac{|\mathbf{u} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{r})|}{|\mathbf{u}|} \quad (D.28)$$

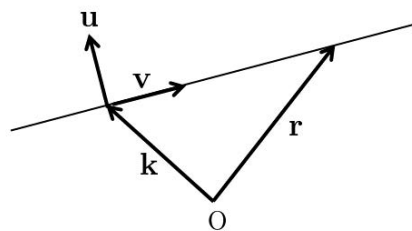
となる. \mathbf{r} は直線上の点であるので

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} = [a \ b] \cdot \begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = ax + by = -c \quad (D.29)$$

となる. \mathbf{p} も成分で書けば

$$l = \frac{|ax_0 + by_0 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad (D.30)$$

と表される.



付録図 D.9 点と直線の位置関係

D.2 曲線と曲率

D.2.1 曲線のフレネ・セレの公式

空間曲線に対して媒介変数を用いてこれを表すことを考えよう. 媒介変数を t として 3 次元空間中の曲線を

$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) \quad (D.31)$$

で定義する. ただし, $x(t), y(t), z(t)$ は十分な回数微分可能であるとする.

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}, \frac{dy(t)}{dt}, \frac{dz(t)}{dt} \right) \quad (D.32)$$

は, 点 $\mathbf{r}(t)$ において曲線に接する接ベクトルになる. ここで, 接ベクトルの大きさが常に 1 になるように式 (D.31) の媒介変数 t を変数変換する. 時間の進み方を歪めて常に速度の大きさが 1 になるようにする.

$\mathbf{v}(t)/|\mathbf{v}(t)|$ は, $\mathbf{v}(t)$ と同じ向きで大きさが 1 のベクトルなので, 新しい媒介変数 s のもとでの速度ベクトル ($\mathbf{t}(s)$ と書く) がこれと同じようにすることを考える. したがって,

$$\mathbf{t}(s) = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \left/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \right. \quad (D.33)$$

が成り立つように $\mathbf{t}(s)$ と s を定義する. 新旧の媒介変数の間の関係式を $t = t(s)$ とすると, 合成関数の微分より

$$\frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{d}{ds}\mathbf{r}(t(s)) = \frac{dt}{ds} \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (\text{D.34})$$

となる. これと式 (D.33) から

$$\frac{dt}{ds} = 1 \left/ \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \right. \quad \text{あるいは} \quad \frac{ds}{dt} = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| \quad (\text{D.35})$$

と書ける. これを記号的に $ds = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt$ とも書き. ds を線素. $\mathbf{t}(s)$ を接単位ベクトルという. $ds/dt = |d\mathbf{r}/dt|$ の両辺を積分すれば, 媒介変数 t と s の関係が具体的に得られる. s を弧長パラメータと呼ぶ. 曲線 $\mathbf{r}(t)$ の $a \leq t \leq t_0$ における弧長を

$$\int_a^{t_0} \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| dt = \int_a^{t_0} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt \quad (\text{D.36})$$

で定義する.

例題 D-1

2点 $(1, 0, 0)$ と $(1, 0, 2\pi)$ を結ぶ螺旋線

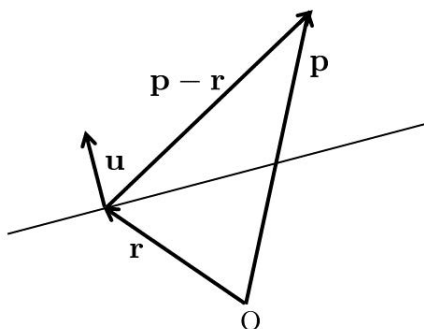
$$\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (\cos t, \sin t, t) \quad (\text{D.37})$$

の長さを求めなさい.

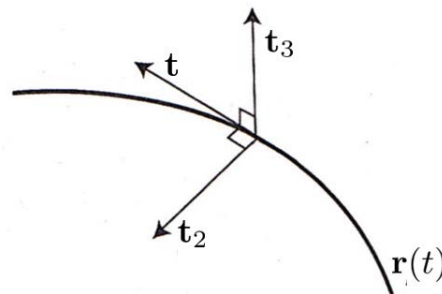
解答

$t = 0$ から 2π までの弧長は

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{2} dt = 2\sqrt{2}\pi \quad (\text{D.38})$$



付録図 D.10 つるまき線の媒介変数表示



付録図 D.11 単位接ベクトル \mathbf{t} と正規直交ベクトル

このように定義した接単位ベクトル $\mathbf{t}(s)$ に対して, $\mathbf{t}(s), \mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s)$ が正規直交基底となるように $\mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s)$ を指定できる.

これらは3次元ベクトル空間の基底ですからこれらの微分も $\mathbf{t}(s), \mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s)$ の1次結合で表される. よって, $\mathbf{t}(s)$ を $\mathbf{t}_1(s)$ と書き,

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(s) & f_{12}(s) & f_{13}(s) \\ f_{21}(s) & f_{22}(s) & f_{23}(s) \\ f_{31}(s) & f_{32}(s) & f_{33}(s) \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{pmatrix} \quad (\text{D.39})$$

を満たす関数 $f_{ij}(s)$ が存在します. $\mathbf{t}(s), \mathbf{t}_2(s), \mathbf{t}_3(s)$ は正規直交基底なので

$$(\mathbf{t}_i(s), \mathbf{t}_j(s)) = \delta_{i,j}, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (\text{D.40})$$

を満たす. 式 (D.40) の両辺を微分すると

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_i(s), \mathbf{t}_j(s))' &= (\mathbf{t}'_i(s), \mathbf{t}_j(s)) + (\mathbf{t}_i(s), \mathbf{t}'_j(s)) = 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{t}'_i(s), \mathbf{t}_j(s)) &= \begin{cases} 0 & (i = j \text{ のとき}) \\ -(\mathbf{t}_i(s), \mathbf{t}'_j(s)) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

これを使うと式 (D.30) は簡単になる.

$$\begin{aligned} (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{t}'_1(s)) &= 0 \\ \Rightarrow (\mathbf{t}_1, f_{11}\mathbf{t}_1 + f_{22}\mathbf{t}_2 + f_{23}\mathbf{t}_3) &= f_{11} = 0 \\ (\mathbf{t}_1(s), \mathbf{t}'_2(s)) &= -(\mathbf{t}'_1(s), \mathbf{t}_2(s)) \\ \Rightarrow (\mathbf{t}_1, f_{21}\mathbf{t}_1 + f_{22}\mathbf{t}_2 + f_{23}\mathbf{t}_3) &= -(f_{11}\mathbf{t}_1 + f_{12}\mathbf{t}_2 + f_{13}\mathbf{t}_3, \mathbf{t}_2) \\ \Rightarrow f_{21} &= -f_{12} \end{aligned}$$

こうして, 式 (D.30) は

$$\frac{d}{ds} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & f_{12}(s) & f_{13}(s) \\ -f_{12}(s) & 0 & f_{23}(s) \\ -f_{13}(s) & -f_{23}(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{pmatrix} \quad (\text{D.41})$$

となる.

接単位ベクトル $\mathbf{t}(s)$ は大きさが 1 であるので

$$0 = (|\mathbf{t}|^2)' = (\mathbf{t}, \mathbf{t})' = 2(\mathbf{t}, \mathbf{t}') \quad (\text{D.42})$$

$\mathbf{t}'(s)$ は, $\mathbf{t}(s)$ と直交し, 曲線の法線方向を向く. そこで,

$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{|\mathbf{t}'(s)|} \quad (\text{D.43})$$

としてこれを**主法線単位ベクトル**という. $|\mathbf{t}'(s)|$ を $\kappa(s)$ として曲線の**曲率**とし,

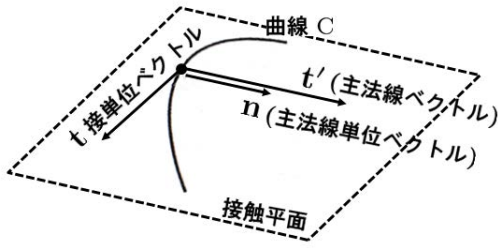
$$\mathbf{n}(s) = \frac{\mathbf{t}'(s)}{\kappa(s)} \quad (\text{D.44})$$

と書く.

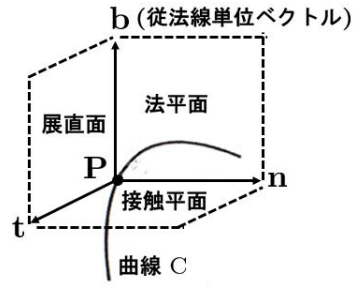
次に, **従法線単位ベクトル** $\mathbf{b}(s)$ を

$$\mathbf{b}(s) = \mathbf{t}(s) \times \mathbf{n}(s) \quad (\text{D.45})$$

によって定義する.



付録図 D.12 単位主法線ベクトル \mathbf{n}



付録図 D.13 単位従法線ベクトル \mathbf{b}

定理: フレネ・セレの公式

曲線の接単位ベクトル $\mathbf{t}(s)$, 主法線単位ベクトル $\mathbf{n}(s)$, 従法線単位ベクトル $\mathbf{b}(s)$ は正規直交基底をなし, 次式を満たす.

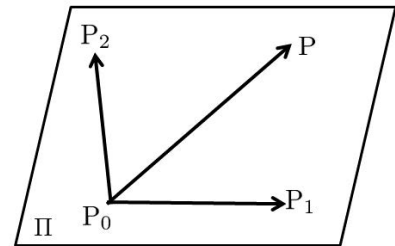
$$\frac{d}{ds} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa(s) & 0 \\ -\kappa(s) & 0 & \tau(s) \\ 0 & -\tau(s) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{t}_1(s) \\ \mathbf{t}_2(s) \\ \mathbf{t}_3(s) \end{Bmatrix} \quad (\text{D.46})$$

D.3 平面の方程式

D.3.1 ベクトル方程式による媒介変数表示

空間に平面 P_i が与えられてる (付録図 D.14). Π 上にあって同一直線上にない 3 点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$, $P_1(x_1, y_1, z_1)$, $P_2(x_2, y_2, z_2)$ をとる. 2 つのベクトル $\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\overrightarrow{P_0P_2}$ は 1 次独立である. 点 P が平面 Π 上にあるには, ベクトル $\overrightarrow{P_0P}$ が 2 つのベクトル $\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\overrightarrow{P_0P_2}$ の一次結合で表されること, すなわち,

$$\overrightarrow{P_0P} = s\overrightarrow{P_0P_1} + t\overrightarrow{P_0P_2} \quad (\text{D.47})$$



付録図 D.14 平面の方程式

となる. 直交座標系の基底 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ に関する $\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\overrightarrow{P_0P_2}$ の成分 (方向余弦) をそれぞれ (L_1M_1, N_1) , (L_2M_2, N_2) とすると, 式 (B.14) より平面 P_1 の方程式は

$$\begin{cases} x - x_0 = sL_1 + tL_2 \\ y - y_0 = sM_1 + tM_2 \\ z - z_0 = sN_1 + tN_2 \end{cases} \quad (\text{D.48})$$

となる. これを平面 P_1 の媒介変数表示という. ここで, 3 つのベクトルベクトル $\overrightarrow{P_0P}$, $\overrightarrow{P_0P_1}$ と $\overrightarrow{P_0P_2}$ は一次従属の関係になるので,

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ L_1 & M_1 & N_1 \\ L_2 & M_2 & N_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{D.49})$$

が成立する. これは平面の方程式の一つの表現となる.

D.3.2 法線ベクトルとの内積

1点 $P_0(x_0, y_0, z_0)$ を通り、ベクトル $\mathbf{n} = (a, b, c)$ に垂直な平面 Π 上に任意の点 $P(x, y, z)$ をとります (付録図 D.14). ベクトル $\overrightarrow{P_0P}$ は \mathbf{n} に垂直であり、

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_0P} = 0$$

となるので、

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

を代入すれば、

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0 \quad (\text{D.50})$$

が得られます. これも平面 Π の方程式となります. 方程式 (D.49) と (D.50) は、平面が x, y, z の1次方程式

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{D.51})$$

で表されることを示す. 逆に、方程式 (B.51) を満たす x, y, z の1組の値を (x_0, y_0, z_0) とすれば式 (B.51) は式 (B.50) の形に書き直せる.

D.3.3 2直線を含む平面

直線の方法を \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 , 定点を \mathbf{k}_1 と \mathbf{k}_2 とする. 2本の直線を

$$\mathbf{r} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{v}_1 t \quad (\text{D.52})$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{k}_2 + \mathbf{v}_2 t$$

と表わす. t と u は独立な媒介変数である.

これらの直線が交わる時、交点を \mathbf{k} とすると

$$\mathbf{k}_1 = \mathbf{k}_2 = \mathbf{k} \quad (\text{D.53})$$

となる. 平面上の点 \mathbf{r} は、交点から \mathbf{v}_1 方向に $\mathbf{v}_1 t$, \mathbf{v}_2 方向に $\mathbf{v}_2 u$ 離れた点であるのでこれらをベクトル的に加えて、

$$\mathbf{r} = \mathbf{k} + \mathbf{v}_1 t + \mathbf{v}_2 u \quad (\text{D.54})$$

と表わす. 媒介変数を消去するには、 \mathbf{v}_1 にも \mathbf{v}_2 にも垂直なベクトル $\mathbf{h} = \mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2$ を両辺にスカラー積すればよい. したがって、

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (\text{D.55})$$

これが、点 \mathbf{k} を通り \mathbf{h} に垂直な平面を表わす. ベクトルの成分を

$$\mathbf{r} = (x, y, z) \quad (\text{D.56})$$

$$\mathbf{h} = (a, b, c)$$

とし、定数を

$$\mathbf{k} \times \mathbf{h} = -d \quad (\text{D.57})$$

と書けば、平面の方程式は

$$ax + by + cz + d = 0 \quad (\text{D.58})$$

と表される.

D.3.4 3点を通る平面

3点を $\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \mathbf{k}_3$ とする. 平面に垂直なベクトルは

$$\mathbf{h} = (\mathbf{k}_2 - \mathbf{k}_1) \times (\mathbf{k}_3 - \mathbf{k}_1) \quad (\text{D.59})$$

に平行である. したがって, 平面の方程式は

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k}_1) \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (\text{D.60})$$

と表される. \mathbf{k}_1 を平面上の任意の点で置き換えてもよい.

D.3.5 1点と平面の距離

点 \mathbf{q} と平面

$$(\mathbf{r} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{h} = 0 \quad (\text{D.61})$$

との距離 L は, 平面上の1点, 例えば \mathbf{k} と \mathbf{q} を結ぶベクトル平面の法線 \mathbf{h} の方向に射影した長さに等しくなる. したがって,

$$L = \frac{|(\mathbf{q} - \mathbf{k}) \cdot \mathbf{h}|}{|\mathbf{h}|} \quad (\text{D.62})$$

のように書ける. ベクトルを成分で表し

$$\mathbf{q} = (x_1, y_1, z_1) \quad (\text{D.63})$$

として, 式 (D.56), (D.57), (D.58) を参照すると

$$L = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}} \quad (\text{D.64})$$

のように表せる.

D.4 曲面論

D.4.1 曲面の方程式

曲面は空間曲線が変形しながら空間を移動した軌跡と考えられる. 変形可能な曲線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ が時間 t の経過とともに移動したとすると, この曲線の移動に伴ってできる曲面上の点は, 時刻 t と曲線上の位置を表す u と v によって表わすことができ, 一般に.

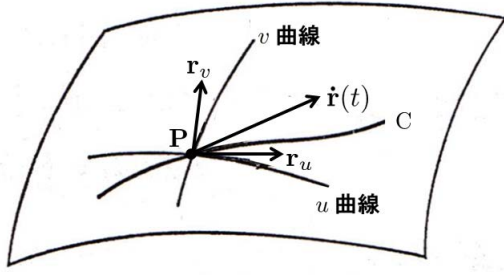
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) \quad (\text{D.65})$$

と表される. 点 P の位置ベクトル \mathbf{r} が上式のように2変数 u, v の関数であるとき, (u, v) が uv 平面の領域にわたって値を次式のように変えると, 点 P は一般に曲面を描く. このとき,

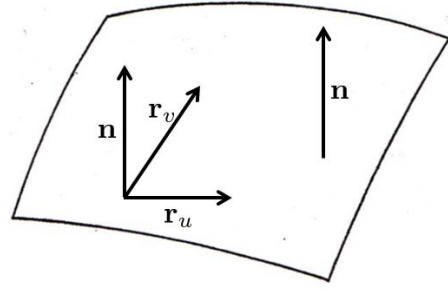
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v) = x(u, v)\mathbf{i} + y(u, v)\mathbf{j} + z(u, v)\mathbf{k} \quad (\text{D.66})$$

を曲面 S の媒介変数表示という.

(D.66) 式において, v を固定して u だけを変化させると, \mathbf{r} は曲面 S 上で一つの曲線をえがくこの曲線を u 曲線という, v 曲線も同様に定義される. u 曲線と v 曲線を合わせて座標曲線という.



付録図 D.15 曲面の媒介変数 (u, v) 表示



付録図 D.16 曲面の接平面と単位法線ベクトル \mathbf{n}

$\mathbf{r}(u, v)$ に対応する点を P とすれば, (u, v) を点 P の曲面 S 上での**曲線座標**という. $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ はそれぞれ u 曲線, v 曲線への接線ベクトルである. なお, 曲面 S 上で

$$\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v \neq \mathbf{0}$$

とする. すなわち, $\mathbf{r}_u, \mathbf{r}_v$ は曲面上の任意の点で 1 次独立である.

曲面 S 上の点 P の曲線座標が, 変数 t の関数

$$u = u(t), \quad v = v(t) \tag{D.67}$$

であるとき, 点 P は曲面 S 上の曲線 C をえがく.

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(u(t), v(t)) \tag{D.68}$$

をえがく. その接線ベクトル

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{du}{dt} \mathbf{r}_u + \frac{dv}{dt} \mathbf{r}_v \tag{D.69}$$

であり, \mathbf{r}_u と \mathbf{r}_v の 1 次結合である. 曲面上の点を通り, \mathbf{r}_u と \mathbf{r}_v によって張られる平面を**接平面**という. ベクトル

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v}{|\mathbf{r}_u \times \mathbf{r}_v|} \tag{D.70}$$

を曲線座標 (u, v) に対する**単位法線ベクトル**という.

式 (D.70) で与えられる曲面 S 上の曲線 C の弧の長さを考えよう. 式 (D.69) より

$$\begin{aligned} |\dot{\mathbf{r}}(t)|^2 &= \dot{\mathbf{r}}(t) \cdot \dot{\mathbf{r}}(t) \\ &= \left(\frac{du}{dt}\right)^2 \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u + 2 \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v + \left(\frac{dv}{dt}\right)^2 \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \end{aligned} \tag{D.71}$$

したがって, 曲線 $\mathbf{r}(t)$ の, 点 $t = t_0$ から点 $t = t_1$ ($t_0 < t_1$) までの弧の長さ s は,

$$s = \int_{t_0}^{t_1} |\dot{\mathbf{r}}(t)| dt = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{E\dot{u}^2 + 2F\dot{u}\dot{v} + G\dot{v}^2} dt \tag{D.72}$$

で与えられる. ここに,

$$E = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v, \quad G = \mathbf{r}_v \cdot \mathbf{r}_v \tag{D.73}$$

である. これらを曲面の**第 1 基本量**という. また

$$ds^2 = E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \tag{D.74}$$

を S の **第 1 基本微分形式** という。これを次のようにして求めることもできる。

$$\begin{aligned} ds^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_u, \quad F = \mathbf{r}_u \cdot \mathbf{r}_v \\ &= E(du)^2 + 2Fdu dv + G(dv)^2 \end{aligned} \tag{D.75}$$

例 1 **平面** \mathbf{r}_0 を通る単位ベクトル \mathbf{l}_1 と \mathbf{l}_2 の 2 直線 $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{l}_1$, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + v\mathbf{l}_2$ で定まる平面は次式となる。

$$\mathbf{r}(u, v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{l}_1 + v\mathbf{l}_2 \tag{D.76}$$

媒介変数 u, v は $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$ のつくる平面上の斜向座標系の座標値を表す。単位法線ベクトル $v\mathbf{n}$ は, $\mathbf{r}_u = \mathbf{l}_1$, $\mathbf{r}_v = \mathbf{l}_2$ より, $v\mathbf{n} = \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2$ となる。 $v\mathbf{n}$ と $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ との内積をつくれば以下の平面の方程式が得られる。

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = (u\mathbf{l}_1 + v\mathbf{l}_2) \cdot (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2)$$

これより,

$$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \mathbf{n} = 0 \tag{D.78}$$

を得る。

例 2 **円柱面** z 軸を中心軸, a を半径とする円柱面は

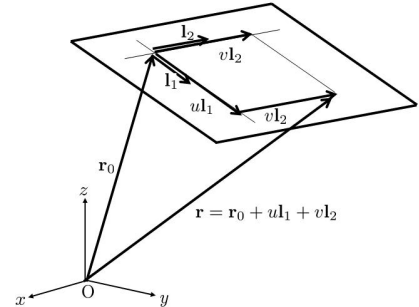
$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, z) = \begin{Bmatrix} a \cos \theta \\ a \sin \theta \\ z \end{Bmatrix} \tag{D.79}$$

となる。 z 曲線 ($\theta = \text{一定}$) は円の直線エレメントを, θ 曲線 ($z = \text{一定}$) は円エレメントを表す。

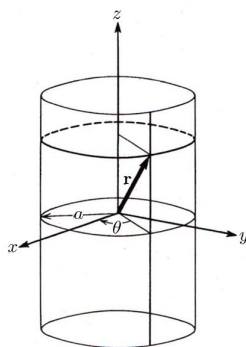
例 3 **球面** 原点 O に中心をもつ半径 a の球は

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(\theta, \varphi) = \begin{Bmatrix} a \sin \theta \cos \varphi \\ a \sin \theta \sin \varphi \\ a \cos \theta \end{Bmatrix} \tag{D.80}$$

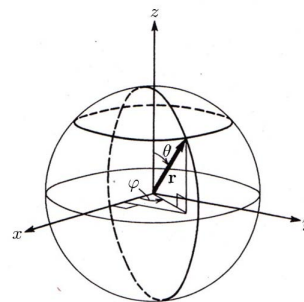
となる。 φ 曲線 ($\theta = \text{一定}$) は球の緯線を, θ 曲線 ($\varphi = \text{一定}$) は経線を表す。



付録図 D.17 平面 (D.77)



付録図 D.18 円柱面



付録図 D.19 球面

付録 E 円錐曲線

直円錐(頂点と底面の中心を結ぶ直線が底面に垂直な円錐)を平面(切断平面: cutting plane)で切断することにより, その切り口の切断面(cross section)に円錐曲線(conics)として, 楕円, 放物線, 双曲線が現れる. 楕円(ellipse), 双曲線(hyperbola), 放物線(parabola)のギリシャ語の語源は, それぞれ, “不足”, “過剰”, “相等”を意味しているとのことである. 切断平面が直円錐の鉛直軸に垂直な場合, 切断面は円になる. 楕円は, 切断平面が直円錐の鉛直軸と傾くときに現れる. 切断面が直円錐の母線に平行となると放物線が現れる.

E.1 円錐曲線の作図

E.1.1 楕円

付録図 E.1 は, 切断平面 Π と直円錐とが交差している様子を示す. 切断平面 Π は直円錐を構成するすべての図形要素を切断するようにおかれる. さらに, いくつかの水平の切断平面を設定することにより, 本書第 4 章で述べた 1 次副投影による副平面図の作図によって, 切断平面 Π に楕円を作図することが可能になる. 付録図 E.1 に示されるように, 直円錐に内接する 2 つの球の中心 O と O' を副投影図 1 に作図することにより 2 つの焦点 (foci) F' と F が求められる. 2 つの準線 (directrix) l と l' は, 切断平面 Π と直円錐を切断する水平面との 2 つの交点 L と L' によって求められる. 楕円上の点 (例えば楕円上の点 P) における接線は, 2 つの焦点 F' と F と楕円上の点を結んで得られる 2 直線から作られる角度を 2 等分する直線から求められます.

楕円は, 本書 2.3 節の図 2.32 に示したように, 楕円上の動点 P が 2 つの定点 (焦点) F' と F からの距離と定直線 (準線 l と l') からの距離が一定の比率 (離心率: 本書 2.3 節の式 (2.9)) を保って描かれる軌跡として定義される.

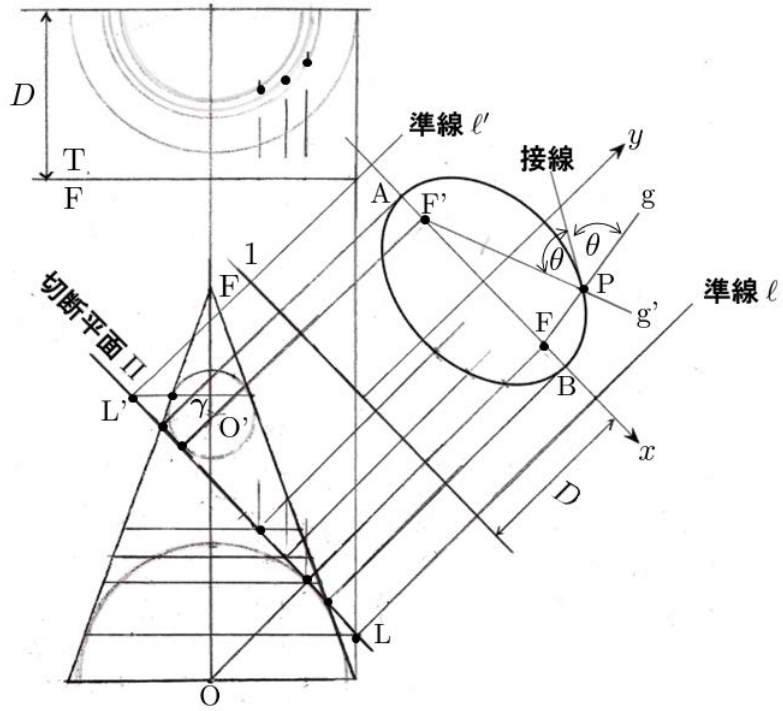
他の楕円の定義では, 本書 2.3 節 p.32 の「**役立つポイント 2: 楕円の作図**」の図 2 で説明したように, 平面上の動点が 2 つの定点 (焦点) からの距離の和を一定として描かれる軌跡が楕円となる. この定義は, 役立つポイント 2 では「2 つのピンと糸と鉛筆を用いた楕円の作図法として説明されている.

E.1.2 双曲線

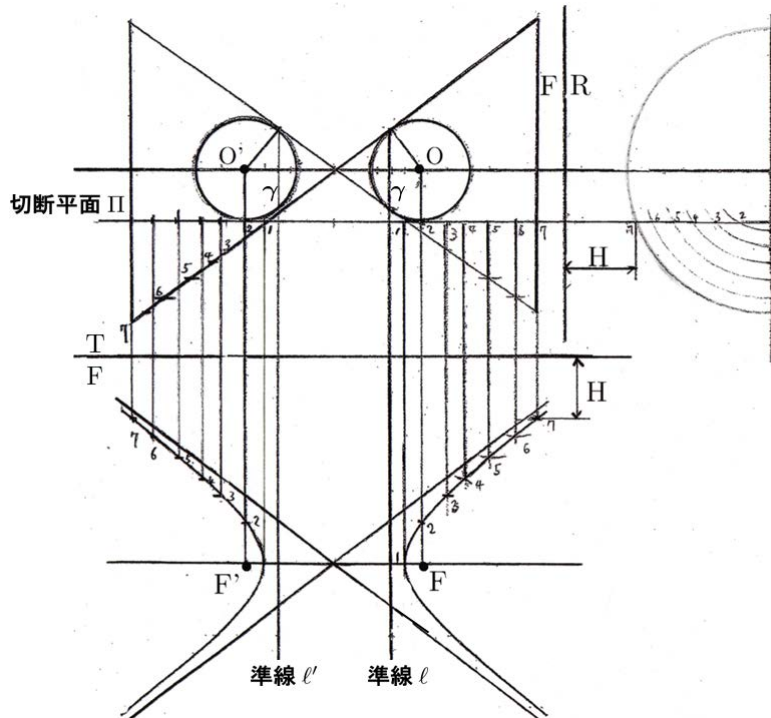
付録図 E.2 は直円錐と切断平面 Π が交差する様子を示す. 切断平面 Π は 2 つの直円錐の軸に平行におかれる. 直円錐の内部に内接する 2 つの球がおかれ, これらの内接球の中心 O と O' を正面図に投影することにより双曲線の 2 つの焦点 F' と F が求まる. , 内接球と直円錐の接触円である円 γ を含む平面と P_i との交線が準線となる.

準線 l と l' は, 切断平面 Π と 2 つの内接球と直円錐の接点を作る円を通る平面との交線から求まる. 漸近線は, 円錐の母線の投影図になる.

双曲線は, 平面にある曲線上の動点が 2 つの焦点との距離の差を一定としてその軌跡を描く場合に現れる. . この基本原理に基づいて, 本書 2.3 節 p.33 の図 2.34 の双曲線は描かれる.



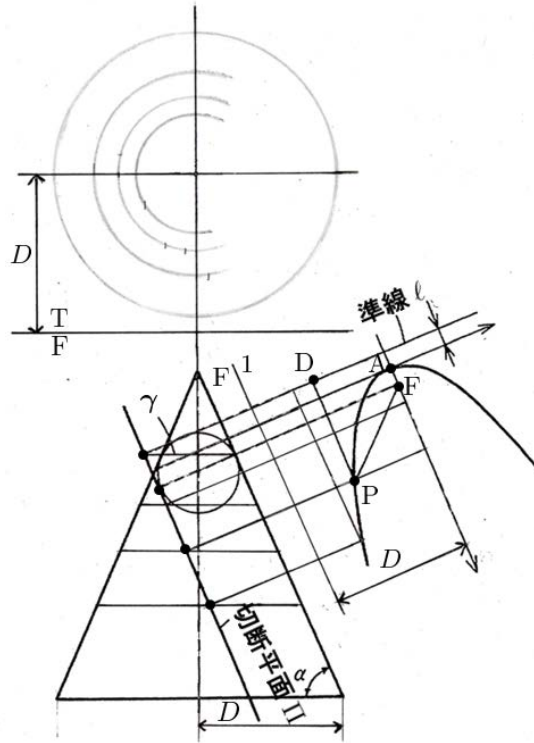
付録図 E.1 楕円の作図 (副投影)



付録図 E.2 双曲線の作図 (副投影)

E.1.3 放物線

放物線は、切断平面 Π が直円錐の母線と平行になると切断平面に現れる。切断平面と直円錐の交点は一連の水平面との交点から副投影図上に求まる。焦点は、直円錐と内接球接点から決まる。準線 l は、切断平面 Π 内接球と直円錐の接点を作る接触円を通る平面との交線から求まる。放物線の軸は、直円錐の軸の投影図となる。



付録図 E.3 放物線の作図 (副投影)

E.2 円錐曲線の性質

楕円，双曲線，放物線を総称して**円錐曲線**とよぶ．円錐曲線の研究の歴史は古く，古代ギリシャのアポロニウス (B.C.262年頃 - B.C. 190年頃) らの研究が始まりとされている．アポロニウスは円錐曲線に関する本を著わした．

楕円は，平面上の2定点(焦点) F と F' からの距離の和 $PF + PF'$ が一定である点 P の集合，すなわち点 P の軌跡と定義される．楕円では，線分 FF' の中点 O を原点とし， $F = (c, 0)$ ， $F' = (-c, 0)$ ， $(c > 0)$ とし， $PF + PF' = 2a$ とおいて $P = (x, y)$ の軌跡を求めると

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{E.1})$$

となる．ここで

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}, \quad c = \sqrt{a^2 - b^2} \quad (\text{E.2})$$

である． x 軸をこの楕円の**長軸**， y 軸をこの楕円の**短軸**とよぶ．楕円と x 軸， y 軸との交点をこの楕円の**頂点**とよぶ．

双曲線は，双曲線は F と F' からの距離の差 $|PF - PF'|$ が一定である点 P の軌跡と定義される．双曲線では，線分 FF' の中点 O を原点とし， $F = (c, 0)$ ， $F' = (-c, 0)$ ， $(c > 0)$ とし， $|PF - PF'| = 2a$ ($a > 0$) とおいて $P = (x, y)$ の軌跡を求めると

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (\text{E.3})$$

となる．ここで

$$b = \sqrt{c^2 - a^2}, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} \quad (\text{E.4})$$

である． x 軸を双曲線の**主軸**とよぶ．式 (E.3) を因数分解し，

$$\left(\frac{x}{a} - \frac{y}{b}\right) \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b}\right) = 1 \quad (\text{E.5})$$

と書き，

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} = \frac{1}{\frac{x}{a} + \frac{y}{b}}$$

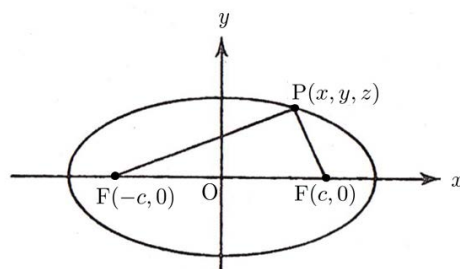
とおく．ここで x, y を正で十分大きくすると，右辺は極めて小さくなるので，双曲線は直線

$$\frac{x}{a} - \frac{y}{b} \quad (\text{E.6})$$

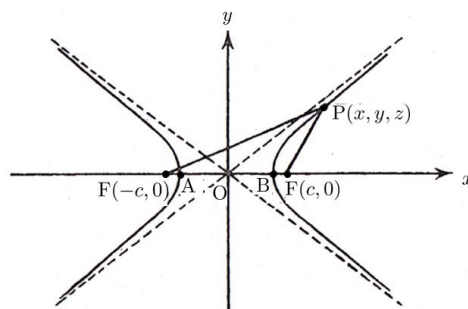
に限りなく近づく．式 (E.6) を式 (E.3) の双曲線の**漸近線**とよぶ．第3象限においても式 (E.3) の双曲線は式 (E.6) の漸近線に近づく．同様に第2，第4象限では双曲線は直線 (漸近線)

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \quad (\text{E.7})$$

に限りなく近づく．また点 $A = (a, 0)$ と $A' = (-a, 0)$ を双曲線の**頂点**とよぶ．



付録図 E.4 楕円



付録図 E.5 双曲線

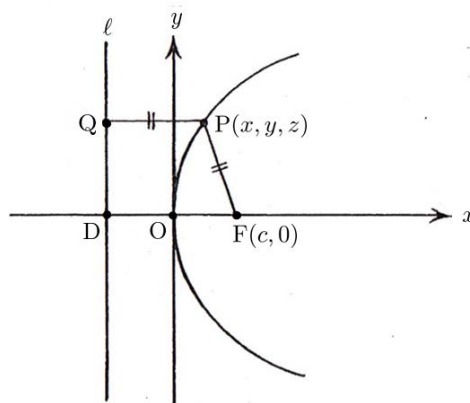
放物線は、平面上の定点 F と、 F を通らない直線 l に
対し

$$PF = PQ$$

をみたす点 P の軌跡と定義される。ただし、点 Q は点
 P から直線 l に下した垂線の足である。 l を**準線**とよぶ

F から、 l に下した垂線の足を D とし、線分 FD の中
点 O を原点とし、 $F = (c, 0)$, $l : x = -c$ とおくと放物
線の方程式は

$$y^2 = 4cx \quad (\text{E.8})$$



付録図 E.6 双曲線

となる。 x 軸をこの放物線の**軸**とよぶ。 原点 O をこの放物線の**頂点**とよぶ。

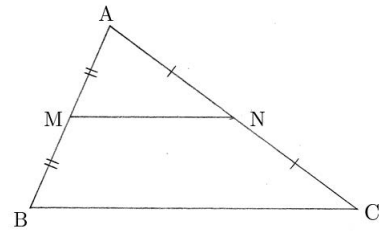
付録 F 役立つポイント集

役立つポイント 1: 中点連結定理

△ABCの辺AB, ACの中点をそれぞれ点M, Nとする。このとき,

$$MN \parallel BC \quad \text{かつ} \quad MN = \frac{1}{2}BC$$

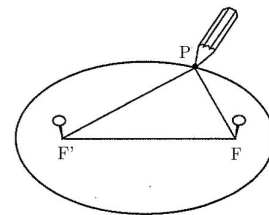
が成り立つ。



中点連結定理

役立つポイント 2: 楕円の性質

FとF'に画びょうを刺し、糸を結んで画びょうにかけ、糸をピンと張りながら鉛筆を動かすとききれいな楕円を描くことができる。



楕円の作図

役立つポイント 3: 主投影図の基本的性質

1. 視線に平行な直線と平面はそれぞれ点や直線となる。
2. 視線に垂直な平面図形の投影図は実形となる。
3. 視線に垂直な直線の投影図は実長となる。
4. 直交2直線は少なくとも一方が実長であるときには投影図においても直交する。
5. 直線の一方の投影図が点に見える場合、他方の投影図には実長が現れる。
6. 直線の一方の投影図が基準線に平行となる場合、隣接する投影図に実長が現れる。

役立つポイント 4: 直線上の点の投影

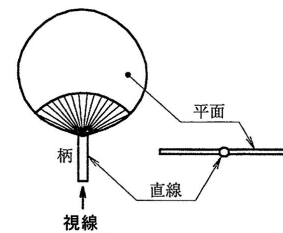
直線上の点の投影図は、どの投影図においてもその直線の投影図上にある。

役立つポイント 5: 副投影図の基本的性質

1. 平面図からの副投影図には正面図の高さの寸法が描かれる。
2. 正面図からの副投影図には平面図の奥行き寸法が描かれる。
3. 側面図からの副投影図には正面図の幅方向の寸法が描かれる。
4. 副投影には2つ隣の投影図の寸法が描かれる。

役立つポイント 6: 端視図 (EV) と実形 (TS)

うちわ(平面)の柄が点に見える方向からみると、うちわの面の端が直線に見える。平面の端視図の作図はこの例と同様であり、平面内にある直線を仮想的に考えこの直線の点視図を描く視線で投影図を描くと平面の端視図を得る。また、端視図が見える視線に垂直な視線を平面に向けると投影図には実形 (TS) が現れる。



端視図 (EV: Edge View)

役立つポイント 7: 実形図

平面の端視図 (EV) の隣接図に平面の実形図 (TS) が描かれる。

役立つポイント 8: 投影図が基準線に平行となる直線

主直線は主投影面に平行であり、主投影面に垂直な視線は主直線に対して垂直となり、その投影図は実長となる。

役立つポイント 9: 直線と主投影面とのなす角度

直線と主投影面がなす実角度は、実長の投影図と主投影面の端視図 (基準線) とのなす角に等しい。

役立つポイント 10: 直線の実長 (TL)

直線の主投影図において、1つの投影図が基準線に平行となれば、その隣接する投影図に実長が描かれる。

役立つポイント 11: 平面の端視図 (EV)

副投影図 (副立面図, 図 5.5(b)) には水平投影面の端視図 (EV) が描かれ、その端視図は平面図と副投影図の間に引かれる基準線に平行となる。

役立つポイント 12: 直線の実長 (TL) と点視図 (PV)

一つの投影図において直線が点視図となると、隣接する投影図は基準線に垂直な実長図となる。

役立つポイント 13: 交点

2直線の投影図上のみかけの交点が隣接する投影図において1つの投影線で対応付けられればその点は実際の交点である(図 5.16).

役立つポイント 14: 平面上の直線

直線が平面上にあるためには、その直線が平面図形の周辺と交わる点と直線上の点の隣接図が対応線によって1:1に対応していなければならない(図 6.7).

役立つポイント 15: 各投影面に平行な平面内の直線

同一平面内にある各投影面に平行な直線群は互いに平行となる。

役立つポイント 16: 空間での図形解析

解析・測量を伴う図学の問題を解く際には、これらををきり分けて取り組むとよい。解析では論理の積み上げが重要となる。作図では論理を作図の手順として記述することが必要となる。これを念頭におくことは、論理思考なしに作図を進めることの抑制に効果的である。

役立つポイント 17: 平面の端視図

平面の端視図を作図するには平面上の任意の直線を点にみる点視図の視線方向の副投影図を作図すればよい。

役立つポイント 18: 点視図 (Point View)

直線の実長図に対して視線を平行にとる直線は点に見え、点視図を作図できる。

役立つポイント 19: 直線と平面の交点 (副投影法)

1. 直線と平面の交点は、直線と平面に共有される。
2. 平面の端視図は平面内のすべての点を含む。
3. 平面の端視図と直線が交わる点は、直線と平面の両方に共有される交点となる。

役立つポイント 20: 直線と平面の交点 (切断平面法)

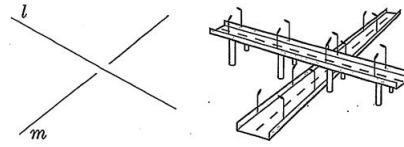
1. 直線 DE と交線 1-2 はともに切断平面 M にあるのでこれらは交点 P で相交わる。
2. 交線 1-2 は平面 ABC 上にもあり、交点 P は直線 DE と平面 ABC が共有する交点となる。

役立つポイント 21: 平行 2 直線

平行 2 直線の投影図はつねに互いに平行となる。したがって、直線 AB の点視図を作図すると、同じ副投影図に直線 CD の点視図を得る。

役立つポイント 22: ねじれ 2 直線 (Skew lines)

2 直線が l , m は平行でもなく、交わってもいないとき、この 2 直線はねじれの位置にあるという。



ねじれ 2 直線

役立つポイント 23: 垂線

直交 2 直線の投影図では、少なくとも、ひとつの直線の実長が投影図に描かれていると、投影図で両直線は直交する。

役立つポイント 24: 平面に垂直な直線

平面に垂直な直線は平面内のすべての直線の垂直となる。

役立つポイント 25: 垂線の実長

直線の実長が現れる投影図では、点から直線への垂線は、(垂線の投影図) \perp (直線の投影図) となる。