

<第1章>

1.1

(a) 自由物体は図 A1.1 となり、左端が壁から受ける反力は上向きで大きさは P 、反モーメントは反時計回りで大きさは Pl となる。

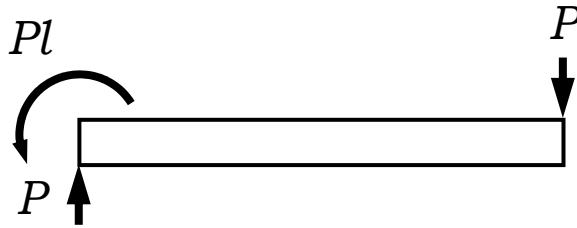


図 A1.1 (a)の自由物体図

(b) 力のモーメントのつりあいから、左端が壁から受ける反モーメントは時計回りで大きさは M となり、自由物体図は図 A1.2 となる。

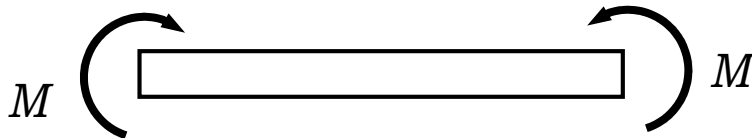


図 A1.2 (b)の自由物体図

(c) 図 A1.3 のように、分布荷重を分布の図心にはたらく集中荷重 $wl/2$ に置き換えて、つり合いを考え、荷重を元に戻すと図 A1.4 の自由物体図を得る。左端が壁から受ける反力は上向きで大きさは $wl/2$ 、反モーメントは反時計回りで大きさは $3wl^2/8$ になる。

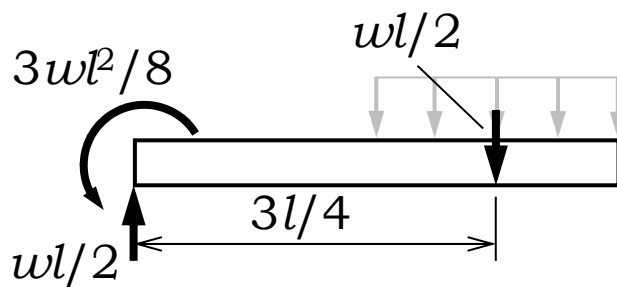


図 A1.3 (c)の分布荷重を等価な集中荷重で置き換えた自由物体図

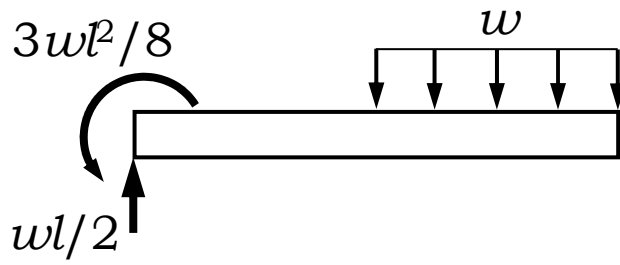


図 A1.4 (c)の自由物体図

(d) 左右対称であるから、床から受ける反力は左端と右端ともに上向きで大きさは $P/2$ であり、自由物体図は図 A1.5 のようになる。

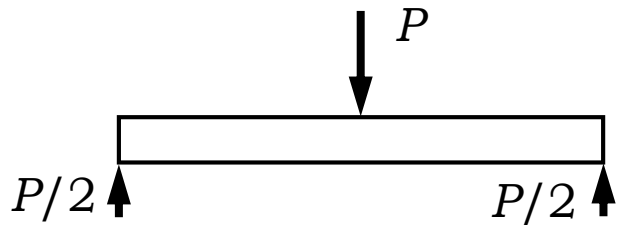


図 A1.5 (d)の自由物体図

(e) 右端まわりの力のモーメントのつり合いを考えることで、左端が床から受ける反力は上向きで大きさが M/l であることがわかる。右端が床から受ける反力は左端の反力 M/l とつり合うため、大きさが同じ M/l で向きが反対（下向き）になる。以上より、自由物体図は図 A1.6 のようになる。

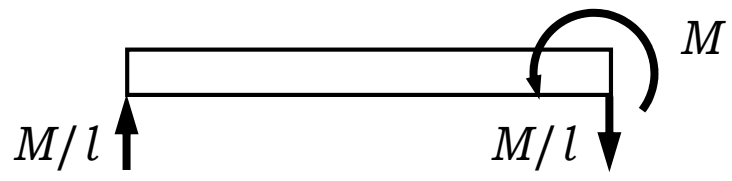


図 A1.6 (e)の自由物体図

(f) 等分布荷重を分布の図心にはたらく集中荷重に置き換えた図 A1.7 でつり合いを考え、左端が床から受ける反力は上向きで大きさは $wl/8$ 、右端が床から受ける反力は上向きで大きさは $3wl/8$ であることがわかる。集中荷重を分布荷重に戻すと図 A1.8 の自由物体図が得られる。

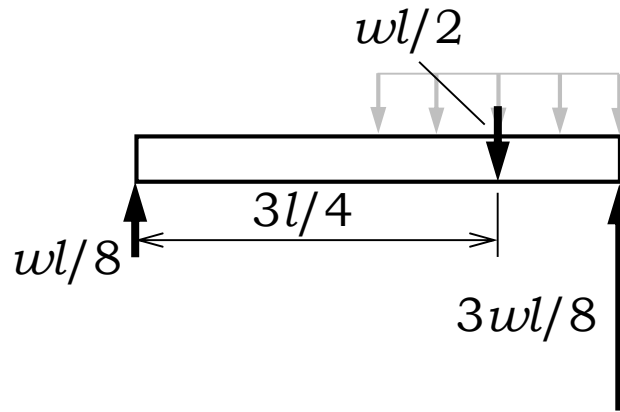


図 A1.7 (f)の分布荷重を等価な集中荷重で置き換えた自由物体図

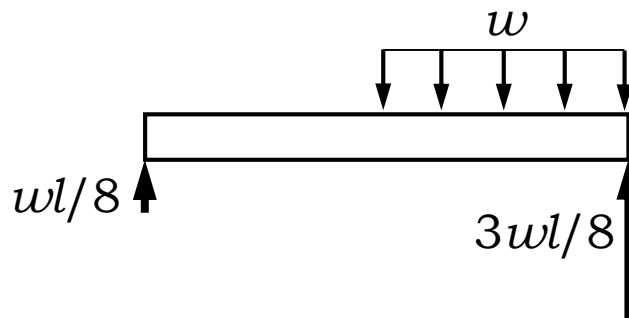


図 A1.8 (f)の自由物体図

<第2章>

2.1

棒の長さを l 、直径を d 、軸力を P 、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とすると、応力 σ 、ひずみ ε 、伸び λ 、直径の変化 Δd は、式(A2.1)~(A2.4)のようになる。

$$\sigma = \frac{4P}{\pi d^2} \quad (\text{A2.1})$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{4P}{\pi E d^2} \quad (\text{A2.2})$$

$$\lambda = \varepsilon l = \frac{4Pl}{\pi E d^2} \quad (\text{A2.3})$$

$$\Delta d = -\nu \varepsilon d = -\frac{4\nu P}{\pi E d} \quad (\text{A2.4})$$

単位を揃え、 $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (MPa)、 $P = 1.20 \times 10^2 \text{ N}$ 、 $l = 900 \text{ mm}$ 、 $d = 8.00 \text{ mm}$ として、式(A2.1)~(A2.4)にそれぞれ代入すると式(A2.5)~(A2.8)を得る。

$$\sigma = \frac{4 \times 12.0 \times 10^3}{3.1416 \times 8.00^2} = 239 \text{ MPa} \quad (\text{A2.5})$$

$$\varepsilon = \frac{4 \times 12.0 \times 10^3}{3.1416 \times 210 \times 10^3 \times 8.00^2} = 1.14 \times 10^{-3} \quad (\text{A2.6})$$

$$\lambda = \frac{4 \times 12.0 \times 10^3 \times 900}{3.1416 \times 210 \times 10^3 \times 8.00^2} = 1.02 \text{ mm} \quad (\text{A2.7})$$

$$\Delta d = -\frac{4 \times 0.300 \times 12.0 \times 10^3}{3.1416 \times 210 \times 10^3 \times 8.00} = -2.73 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (\text{A2.8})$$

直径の変化は $-2.73 \mu\text{m}$ と表せる。

2.2

この棒で仮想切断面上にはたらく内力は位置によらず P に等しい。棒の全長を l 、断面正方形の 1 辺の長さを a 、軸力を P 、ヤング率を E 、ポアソン比を ν とすると、応力 σ 、ひずみ ε 、伸び λ 、断面正方形の辺の長さの変化 Δa は式(A2.9)~(A2.12)のようになる。

$$\sigma = \frac{P}{a^2} \quad (\text{A2.9})$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} = \frac{P}{Ea^2} \quad (\text{A2.10})$$

$$\lambda = \varepsilon l = \frac{Pl}{Ea^2} \quad (\text{A2.11})$$

$$\Delta a = -\nu \varepsilon a = -\frac{\nu P}{Ea} \quad (\text{A2.12})$$

単位を揃え、 $E = 74.0 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (MPa)、 $P = 10.0 \times 10^3 \text{ N}$ 、 $l = 800 \text{ mm}$ 、 $a = 13.0 \text{ mm}$ とし、式(A2.9)~(A2.12)にそれぞれ代入すると、式(A2.13)~(A2.16)を得る。

$$\sigma = \frac{10.0 \times 10^3}{13.0^2} = 59.2 \text{ MPa} \quad (\text{A2.13})$$

$$\varepsilon = \frac{10.0 \times 10^3}{74.0 \times 10^3 \times 13.0^2} = 8.00 \times 10^{-4} \quad (\text{A2.14})$$

$$\lambda = \frac{10.0 \times 10^3 \times 800}{74.0 \times 10^3 \times 13.0^2} = 0.640 \text{ mm} \quad (\text{A2.15})$$

$$\Delta a = -\frac{0.330 \times 10.0 \times 10^3}{74.0 \times 10^3 \times 13.0} = -3.43 \times 10^{-3} \text{ mm} \quad (\text{A2.16})$$

伸びは $640 \mu\text{m}$ 、辺の長さの変化は $-3.43 \mu\text{m}$ と表せる。

2.3

この棒で仮想切断面上にはたらく内力は切断位置によらず P に等しい。棒の長さを l 、直径を d 、軸力を P 、応力を σ 、ひずみを ε 、伸びを λ 、直径の変化を Δd とすると、ヤング率 E 、ポアソン比 ν は式

(A2.17)～(A2.18)となる。

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon} = \frac{4P}{\pi d^2} \times \frac{l}{\lambda} = \frac{4Pl}{\pi d^2 \lambda} \quad (\text{A2.17})$$

$$\nu = -\frac{\Delta d}{d} \times \frac{1}{\varepsilon} = -\frac{\Delta d}{d} \times \frac{l}{\lambda} = -\frac{\Delta dl}{d\lambda} \quad (\text{A2.18})$$

寸法の単位は mm とすると、 $l = 100 \times 10 \text{ mm}$ 、 $d = 10.0 \text{ mm}$ 、 $\lambda = 610 \times 10^{-3} \text{ mm}$ 、 $\Delta d = -2.00 \times 10^{-3} \text{ mm}$ となる。 $P = 10.0 \times 10^3 \text{ N}$ として、式(A2.17)～(A2.18)にそれぞれ代入すると式(A2.19)～(A2.20)のように得られる。ヤング率の単位は N/mm^2 (MPa) になる。

$$E = \frac{4 \times 10.0 \times 10^3 \times 100 \times 10}{3.1416 \times 10.0^2 \times 0.610} = 209 \times 10^3 \text{ MPa} \quad (\text{A2.19})$$

$$\nu = -\frac{2.00 \times 10^{-3} \times 100 \times 10}{10.0 \times (-610 \times 10^{-3})} = 0.328 \quad (\text{A2.20})$$

ヤング率は 209 GPa と表せる。

2.4

ヤング率を E 、ポアソン比を ν とすると、せん断弾性係数 G は式(A2.21)となることが知られている (本文, 式(2.13), (9.20))。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A2.21})$$

銅板の内部に水平の仮想切断面をもうけると、つり合い関係から仮想切断面上にはたらくせん断力は軸荷重 P に等しいことがわかる。ここで、水平の仮想切断面の面積を A 、板厚を t 、せん断応力を τ 、せん断ひずみを γ 、せん断変位を λ_s とすると、せん断力を受ける面積 $A = 160 \text{ mm}^2$ 、 $t = 4.00 \text{ mm}$ 、 $P = 15.0 \times 10^3 \text{ N}$ 、 $E = 130 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (MPa) であるから、 τ 、 γ 、 λ_s はそれぞれ式(A2.22)～(A2.24)のように求まる。

$$\tau = \frac{P}{A} = \frac{15.0 \times 10^3}{160} = 93.8 \text{ MPa} \quad (\text{A2.22})$$

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{\tau}{G} = \frac{P}{GA} = \frac{2(1+\nu)P}{EA} = \frac{2 \times (1+0.340) \times 15.0 \times 10^3}{130 \times 10^3 \times 160} \\ &= 1.93 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (\text{A2.23})$$

$$\begin{aligned} \lambda_s &= \gamma t = \frac{\tau}{G} \times t = \frac{Pt}{EA} = \frac{2(1+\nu)Pt}{EA} \\ &= \frac{2 \times (1+0.340) \times 15.0 \times 10^3 \times 4.00}{130 \times 10^3 \times 160} = 7.73 \times 10^{-3} \text{ mm} \end{aligned} \quad (\text{A2.24})$$

変位 λ_s は $7.73 \text{ }\mu\text{m}$ と表せる。

<第3章>

3.1

(省略)

3.2

許容引張応力 σ_a は基準強度が複数ある場合はそれぞれに安全率を与えて得られる許容引張応力の候補の中からもっとも小さいものを選ぶ。最小引張強さ S_u と最小の耐力 S_y を基準強度とし、安全率を Z_u 、耐力に対する安全率を Z_y とすると、式(A3.1)となり、数値を代入すると許容引張応力は 133 MPa と求まる。

$$\begin{aligned}\sigma_a &= \min\left(\frac{S_u}{Z_u}, \frac{S_y}{Z_y}\right) \\ &= \min\left(\frac{400}{3.0}, \frac{245}{1.5}\right) = \min(133, 163) = 133 \text{ MPa}\end{aligned}\tag{A3.1}$$

3.3

棒の断面正方形の1辺の長さを a 、許容引張応力を σ_a とすると、許容軸力 P_a は式(A3.2)のように求められる。

$$P_a = \sigma_a a^2 = 120 \times 4^2 = 1.92 \times 10^3 \text{ N}\tag{A3.2}$$

許容軸力は 1.92 kN と表せる。

3.4

リベットの直径を d 、許容引張応力を σ_a 、許容せん断応力を τ_a とすると、許容荷重 P は式(A3.3)のように求められる。

$$\begin{aligned}P &= \tau_a \times \frac{\pi d^2}{4} = 0.577 \sigma_a \times \frac{\pi d^2}{4} \\ &= 0.577 \times 120 \times \frac{3.1416 \times 10.0^2}{4} = 5.44 \times 10^3 \text{ N}\end{aligned}\tag{A3.3}$$

$P = 5.44 \text{ kN}$ と表せる。

<第4章>

4.1

AC間では仮想切断面に生じる内力が $2P$ となり、AC部に生じる応力 σ_{AC} 、ひずみ ϵ_{AC} 、伸び λ_{AC} は式(A4.1)~(A4.3)のようになる。

$$\sigma_{AC} = \frac{4 \times (2P)}{\pi d^2} = \frac{8P}{\pi d^2}\tag{A4.1}$$

$$\varepsilon_{AC} = \frac{\sigma_{AC}}{E} = \frac{8P}{\pi E d^2} \quad (\text{A4.2})$$

$$\lambda_{AC} = \varepsilon_{AC} \times \frac{l}{3} = \frac{8Pl}{3\pi E d^2} \quad (\text{A4.3})$$

CB 間の仮想切断面上の内力は P となるため、CB 部に生じる応力 σ_{CB} 、ひずみ ε_{CB} 、伸び λ_{CB} は式 (A4.4)~(A4.6) のようになる。

$$\sigma_{CB} = \frac{4P}{\pi d^2} \quad (\text{A4.4})$$

$$\varepsilon_{CB} = \frac{\sigma_{CB}}{E} = \frac{4P}{\pi E d^2} \quad (\text{A4.5})$$

$$\lambda_{CB} = \varepsilon_{CB} \times \frac{2l}{3} = \frac{8Pl}{3\pi E d^2} \quad (\text{A4.6})$$

したがって、C の変位 λ_C は式 (A4.7) となる。

$$\lambda_C = \lambda_{AC} = \frac{8Pl}{3\pi E d^2} \quad (\text{A4.7})$$

B の変位 λ_B は C の変位に CB 間の伸びを加算したものであるため、式 (A4.8) となる。

$$\lambda_B = \lambda_C + \lambda_{CB} = \frac{8Pl}{3\pi E d^2} + \frac{8Pl}{3\pi E d^2} = \frac{16Pl}{3\pi E d^2} \quad (\text{A4.8})$$

4.2

AB 間にもうけた仮想切断面上の内力はどこも同じで P になるため、丸棒 AB に生じる応力 σ_{AB} 、ひずみ ε_{AB} 、伸び λ_{AB} を求めると式 (A4.9)~(A4.11) のようになる。

$$\sigma_{AB} = \frac{4P}{\pi (3d)^2} = \frac{4P}{9\pi d^2} \quad (\text{A4.9})$$

$$\varepsilon_{AB} = \frac{\sigma_{AB}}{E} = \frac{4P}{9\pi E d^2} \quad (\text{A4.10})$$

$$\lambda_{AB} = \varepsilon_{AB} \times 5a = \frac{20Pa}{9\pi E d^2} \quad (\text{A4.11})$$

BC 間にもうけた仮想切断面上の内力も位置によらず P であるため、丸棒 BC に生じる応力 σ_{BC} 、ひずみ ε_{BC} 、伸び λ_{BC} は式 (A4.12)~(A4.14) のようになる。

$$\sigma_{BC} = \frac{4P}{\pi (2d)^2} = \frac{P}{\pi d^2} \quad (\text{A4.12})$$

$$\varepsilon_{BC} = \frac{\sigma_{BC}}{E} = \frac{P}{\pi E d^2} \quad (\text{A4.13})$$

$$\lambda_{BC} = \varepsilon_{BC} \times 4a = \frac{4Pa}{\pi E d^2} \quad (\text{A4.14})$$

したがって、Bの変位 λ_B 、Cの変位 λ_C は式(A4.15a)および(A4.15b)のようになる。

$$\lambda_B = \lambda_{AB} = \frac{20Pa}{9\pi Ed^2} \quad (\text{A4.15a})$$

$$\lambda_C = \lambda_B + \lambda_{BC} = \frac{20Pa}{9\pi Ed^2} + \frac{4Pa}{\pi Ed^2} = \frac{56Pa}{9\pi Ed^2} \quad (\text{A4.15b})$$

4.3

連結丸棒全体の熱伸び λ_{th} は式(A4.16)となる。

$$\lambda_{th} = \alpha\Delta T \times 9\alpha = 9\alpha\Delta T\alpha \quad (\text{A4.16})$$

壁から連結棒が受ける反力を P とすると式(A4.15b)より、 P によってもたらさせる伸び（弾性伸び） λ_e は式(A4.17)となる。

$$\lambda_e = \frac{56Pa}{9\pi Ed^2} \quad (\text{A4.17})$$

両端が固定されているため、熱伸びと弾性伸びの和はゼロになる。このための条件は式(A4.18)となる。

$$\lambda_{th} + \lambda_e = 9\alpha\Delta T\alpha + \frac{56Pa}{9\pi Ed^2} = 0 \quad (\text{A4.18})$$

式(A4.18)より P は式(A4.19)のように求まる。

$$P = -\frac{81\pi\alpha E\Delta Td^2}{56} \quad (\text{A4.19})$$

式(A4.19)の P を丸棒 AB の応力 σ_{AB} を求める式(A4.9)に代入すると式(A4.20a)となる。

$$\sigma_{AB} = \frac{4}{9\pi d^2} \times \left(-\frac{81\pi\alpha E\Delta Td^2}{56} \right) = -\frac{9\alpha E\Delta T}{14} \quad (\text{A4.20a})$$

同じ P を丸棒 BC の応力 σ_{BC} を求める式(A4.13)に代入すると式(A4.20b)となる。

$$\sigma_{BC} = \frac{P}{\pi d^2} = \frac{1}{\pi d^2} \times \left(-\frac{81\pi\alpha E\Delta Td^2}{56} \right) = -\frac{81\alpha E\Delta T}{56} \quad (\text{A4.20b})$$

<第5章>

5.1

軸の直径を d とすると断面二次極モーメント I_p は式(A5.1)で求められる（本文、式(5.7)）。

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} \quad (\text{A5.1})$$

軸にはたらくトルクを T とすると軸表面のねじり応力 τ_0 は式(A5.2)で求められる（本文、式(5.9)）。

$$\tau_0 = \frac{T}{I_p} \times \frac{d}{2} = T \times \frac{32}{\pi d^4} \times \frac{d}{2} = \frac{16T}{\pi d^3} \quad (\text{A5.2})$$

長さの単位を mm、力の単位を N にそろえると、 $d=8.00$ mm、 $T=10.0 \times 10^3$ N·mm となり、数値

を代入すると式(A5.3)を得る。

$$\tau = \frac{16T}{\pi d^3} = \frac{16 \times 10.0 \times 10^3}{3.1416 \times 8.00^3} = 99.5 \text{ MPa} \quad (\text{A5.3})$$

ヤング率を E , ポアソン比を ν とするとせん断弾性係数 G は式(A5.4)で求められる (本文, 式(2.13), (9.20))。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (\text{A5.4})$$

軸の長さを l とすると, ねじれ角 ϕ は式(A5.5)で求められる。

$$\phi = \frac{Tl}{GI_p} = \frac{2(1+\nu)Tl}{EI_p} = \frac{64(1+\nu)Tl}{\pi E d^4} \quad (\text{A5.5})$$

単位をそろえ, $l = 200 \text{ mm}$, $E = 210 \times 10^3 \text{ N/mm}^2$ (MPa) とし, 式(A5.5)に数値を代入すると式(A5.6)を得る。

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{64(1+\nu)Tl}{\pi E d^4} = \frac{64 \times (1+0.300) \times 10.0 \times 10^3 \times 200}{3.1416 \times 210 \times 10^3 \times 8.00^4} \\ &= 6.16 \times 10^{-2} \text{ rad} \end{aligned} \quad (\text{A5.6})$$

5.2

断面二次極モーメント I_p は中心からの距離 r の二乗の面積分で定義される。外径が d_1 , 内径が d_2 の中空円筒のときは, 式(A5.7)で求められる。

$$\begin{aligned} I_p &= \int_A r^2 dA = \int_{d_2/2}^{d_1/2} r^2 (2\pi r) dr = 2\pi \int_{d_2/2}^{d_1/2} r^3 dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{d_2/2}^{d_1/2} \\ &= \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{32} \end{aligned} \quad (\text{A5.7})$$

極断面係数 Z_p は軸表面に生じる最大のねじり応力を簡便に求めるために用いられ, 断面二次極モーメントを中心からの最長距離 ($= d_1/2$) で割った式(A5.8)になる。

$$Z_p = \frac{I_p}{(d_1/2)} = \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{32} \times \frac{2}{d_1} = \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{16d_1} \quad (\text{A5.8})$$

5.3

端部 A と B で軸が壁から受けるトルクをそれぞれ T_A , T_B とすると, 軸まわりのモーメントのつり合いから式(A5.9)が得られる。

$$T_A + T_B = T \quad (\text{A5.9})$$

AC間にもうけた仮想切断面にたはらくトルクは T_A で一定になるため, 位置 C におけるねじれ角 ϕ は, 軸の断面二次極モーメントを I_p とし, 長さ $l/3$ を用いると, 式(A5.10)となる (本文, 式(5.10))。

$$\phi = \frac{T_A (l/3)}{GI_p} \quad (\text{A5.10})$$

CB 間に仮想切断面をもうけつり合いを考えると、仮想切断面上にはたらくトルクは T_B で一定であることがわかる。壁に固定された位置 B におけるねじれ角はゼロであるから、トルク T_B によって、長さが $2l/3$ の CB 間に生じるねじれ角は、式(A5.10)の ϕ と大きさが同じで向きが逆である必要があり、式(A5.11a)が成立する。

$$\frac{T_A (l/3)}{GI_p} - \frac{T_B (l-l/3)}{GI_p} = 0 \quad (\text{A5.11a})$$

式(A5.11a)を整理して式(A5.11b)を得る。

$$T_A - 2T_B = 0 \quad (\text{A5.11b})$$

式(5.9)と式(A5.11b)を連立させ行列を用いて表すと式(A5.12)が得られる。

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_A \\ T_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{A5.12})$$

式(A5.12)を解くと式(A5.13)が得られ、2つの未知のトルクが既知となる。

$$\begin{bmatrix} T_A \\ T_B \end{bmatrix} = \frac{1}{-2-1} \begin{bmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{-3} \begin{bmatrix} -2T \\ -T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2T}{3} \\ \frac{T}{3} \end{bmatrix} \quad (\text{A5.13})$$

AC 間と CB 間では断面二次極モーメントは同一、 $\pi d^4/32$ 、であるため、最大のねじり応力 τ_0 はトルクが大きい方の AC 間で発生し、式(A5.14)となる。

$$\tau_0 = \frac{T_A}{I_p} \times \frac{d}{2} = \frac{16T_A}{\pi d^3} = \frac{16}{\pi d^3} \times \frac{2T}{3} = \frac{32T}{3\pi d^3} \quad (\text{A5.14})$$

位置 C におけるねじれ角は式(A5.15)となる。

$$\phi = \frac{T_A (l/3)}{GI_p} = \frac{1}{G} \times \frac{1}{I_p} \times T_A \times \frac{l}{3} = \frac{1}{G} \times \frac{32}{\pi d^4} \times \frac{2T}{3} \times \frac{l}{3} = \frac{64Tl}{9\pi Gd^4} \quad (\text{A5.15})$$

<第6章>

6.1

左端が床から受ける反力は M_0/l 、右端で受ける反力は $-M_0/l$ であることを念頭に、位置 x にもうけた仮想切断面上のせん断力 F と M を考える。 F は一定となり、式(A6.1)が得られる。

$$F = \frac{M_0}{l} \quad (\text{A6.1})$$

式(A6.1)を x で積分すると式(A6.2a)を得る。

$$M = \int F dx = \frac{M_0}{l} x + C_1 \quad (\text{A6.2a})$$

左端は回転支持のため、 $M = 0$ であることを用いると、 $C_1 = 0$ と定まり、式(A6.2b)を得る。

$$M = \frac{M_0}{l} x \quad (\text{A6.2b})$$

式(A6.1)と(A6.2b)を図示すると図 A6.1 の SFD と BMD を得る。

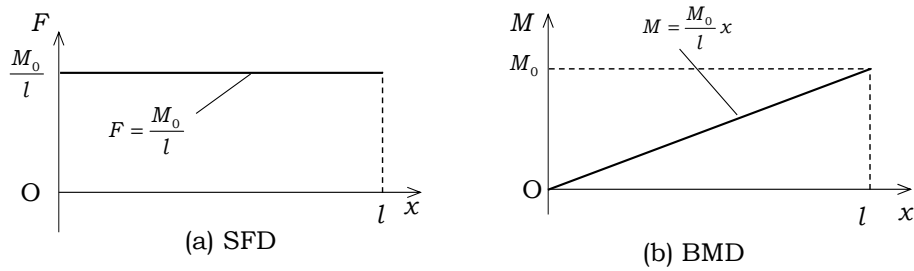


図 A6.1 SFD と BMD

6.2

位置 x に仮想切断面をもうけ、仮想切断面上でのせん断力 F と曲げモーメント M を考える。分布荷重 w は式(A6.3)で表せる。

$$w = w_0 \left(\frac{x}{l} \right) \quad (\text{A6.3})$$

式(A6.3)を x で積分すると式(A6.4a)を得る。

$$F = -\int w dx = -\frac{w_0}{2l} x^2 + C_1 \quad (\text{A6.4a})$$

左端 ($x=0$) は自由端で $F=0$ であるため、 $C_1=0$ と定まり、式(A6.4b)を得る。

$$F = -\frac{w_0}{2l} x^2 \quad (\text{A6.4b})$$

式(A6.4b)を x で積分すると式(A6.5a)を得る。

$$M = \int F dx = -\frac{w_0}{6l} x^3 + C_2 \quad (\text{A6.5a})$$

左端は自由端であり、 $M=0$ であることを用いると、 $C_2=0$ と定まり、式(A6.5b)を得る。

$$M = -\frac{w_0}{6l} x^3 \quad (\text{A6.5b})$$

式(A6.4b)と(A6.5b)を図示すると図 A6.2 の SFD と BMD を得る。

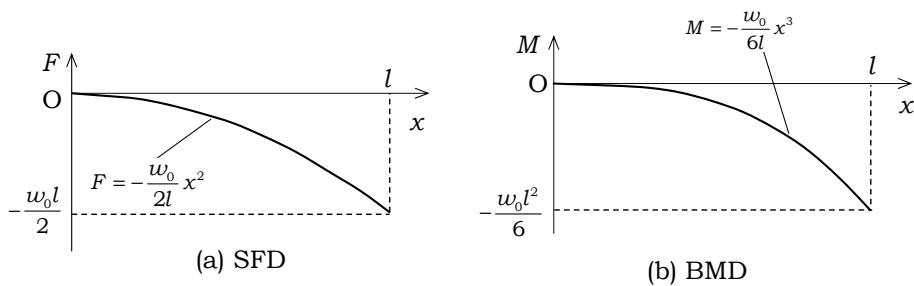


図 A6.2 SFD と BMD

6.3

位置 x に仮想切断面をもうけて、仮想切断面上でのせん断力を F 、曲げモーメントを M とする。仮想切断面が左半分の範囲にあるとき ($0 \leq x \leq l/2$) と右半分の範囲にあるとき ($l/2 \leq x \leq l$) とでは自由物体図が異なるため、 x に応じて以下の(1)と(2)に分けて考える。

(1) $0 \leq x \leq l/2$ の場合

F の分布は式(A6.6)のようになる。

$$F = -wx \tag{A6.6}$$

式(A6.6)を x で積分して式(A6.7a)を得る。

$$M = \int F dx = -\frac{w}{2} x^2 + C_1 \tag{A6.7a}$$

自由端である左端 ($x = 0$) では $M = 0$ であるため、 $C_1 = 0$ が得られ、式(A6.7b)となる。

$$M = -\frac{w}{2} x^2 \tag{A6.7b}$$

(2) $l/2 \leq x \leq l$ の場合

F はこの区間で一定となり式(A6.8)のようになる。

$$F = -\frac{wl}{2} \tag{A6.8}$$

式(A6.8)を x で積分して式(A6.9a)を得る。

$$M = -\frac{wl}{2} x + C_2 \tag{A6.9a}$$

はり全体のモーメントのつり合いから、右端の反モーメントは $-3wl^2/8$ である。右端 ($x = l$) で式(6.9a)の M が反モーメントと一致するよう積分定数を定めると、 $C_2 = wl^2/8$ と決まり、式(6.9b)が得られる。

$$M = -\frac{wl}{2} x + \frac{wl^2}{8} \tag{A6.9b}$$

以上をまとめると式(A6.10)と(A6.11)が得られる。

$$F = \begin{cases} -wx, & (0 \leq x \leq l/2) \\ -\frac{wl}{2}, & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \tag{A6.10}$$

$$M = \begin{cases} -\frac{w}{2} x^2, & (0 \leq x \leq l/2) \\ -\frac{wl}{2} x + \frac{wl^2}{8}, & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \tag{A6.11}$$

式(A6.10)と(A6.11)を図示すると図 A6.3 を得る。

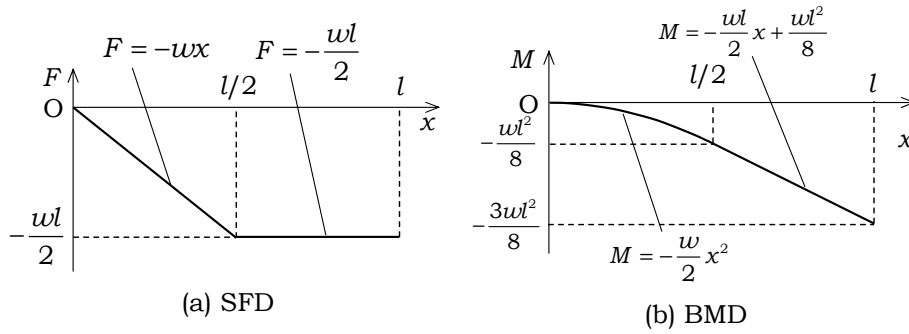


図 A6.3 SFDとBMD

6.4

位置 x に仮想切断面をもうけ、仮想切断面上のせん断力を F 、曲げモーメントを M とする。はり全体のつり合いから、左端が床から受ける反力は $3wl/8$ 、右端が受ける反力は $-wl/8$ と求まる（演習問題 1.1(f)参照）。仮想切断面が左半分にあるとき ($0 \leq x \leq l/2$) と右半分にあるとき ($l/2 \leq x \leq l$) とでは仮想切断面後の自由物体図が異なるため、 x に応じて以下の(1)と(2)に分けて考える。

(1) $0 \leq x \leq l/2$ の場合

F の分布は式(A6.12)となる。

$$F = -wx + \frac{3wl}{8} \quad (\text{A6.12})$$

式(A6.12)を x で積分すると式(A6.13a)を得る。

$$M = \int F dx = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{3wl}{8}x + C_1 \quad (\text{A6.13a})$$

左端は回転支持であるため、式(A6.13a)に $x = 0$ を代入して $M = 0$ とすると、 $C_1 = 0$ が得られて式(A6.13b)を得る。

$$M = -\frac{w}{2}x^2 + \frac{3wl}{8}x \quad (\text{A6.13b})$$

(2) $l/2 \leq x \leq l$ の場合

この区間には分布荷重がはたらかないため、せん断力は x によらず一定になり、式(A6.14)となる。この F は右端が受ける反力と一致する。

$$F = -\frac{wl}{8} \quad (\text{A6.14})$$

式(A6.14)を x で積分して式(A6.15a)を得る。

$$M = \int F dx = -\frac{wl}{8}x + C_2 \quad (\text{A6.15a})$$

右端は回転支持であるため、式(A6.15a)に $x = l$ を代入して $M = 0$ となるよう、 $C_2 = wl^2/8$ と定め、式(A6.15b)を得る。

$$M = -\frac{wl}{8}x + \frac{wl^2}{8} \quad (\text{A6.15b})$$

以上をまとめて式(A6.16)と(A6.17)を得る。

$$F = \begin{cases} -wx + \frac{3wl}{8}, & (0 \leq x \leq l/2) \\ -\frac{wl}{8}, & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (\text{A6.16})$$

$$M = \begin{cases} -\frac{w}{2}x^2 + \frac{3wl}{8}x, & (0 \leq x \leq l/2) \\ -\frac{wl}{8}x + \frac{wl^2}{8}, & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (\text{A6.17})$$

式(A6.16)と(A6.17)を図示して図 A6.4 の SFD と BMD を得る。

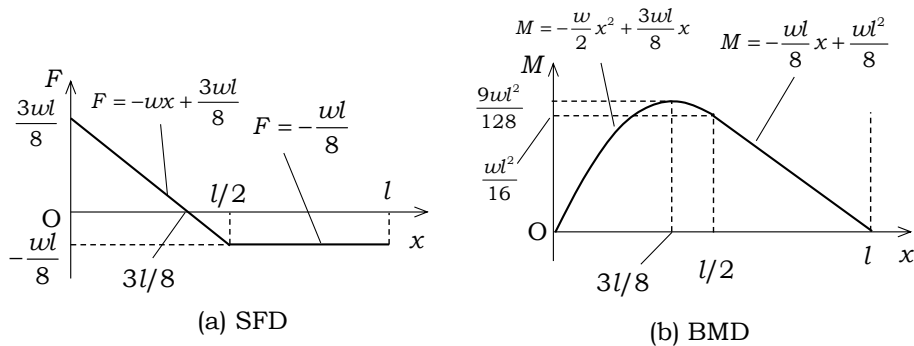


図 A6.4 SFD と BMD

<第7章>

7.1

(a)

断面二次極モーメント I_p を考える。 z 軸まわりの断面二次モーメントを I_z 、 y 軸まわりの断面二次モーメントを I_y とすると対称性から、 $I_z = I_y$ であり、式(A7.1)が成立する。

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_A (y^2 + z^2) dA = I_y + I_z = 2I_z \quad (\text{A7.1})$$

また、 r^2 を直接面積分すると式(A7.2)となる。

$$I_p = \int_A r^2 dA = \int_{d_2/2}^{d_1/2} r^2 (2\pi r) dr = 2\pi \left[\frac{r^4}{4} \right]_{d_2/2}^{d_1/2} = \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{32} \quad (\text{A7.2})$$

式(A7.1)と(A7.2)を比較すると式(A7.3)を得る。

$$I_z = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{64} \quad (\text{A7.3})$$

最大の曲げ応力は中心からの距離が $d_1/2$ の位置に生じるため、断面係数 Z は式(A7.4)で得られる。

$$Z = \frac{I_z}{d_1/2} = \frac{\pi(d_1^4 - d_2^4)}{32d_1} \quad (\text{A7.4})$$

(b)

三角形の頂点を通る z 軸に平行な z_1 軸をとり、 z_1 軸まわりの断面二次モーメント I_{z_1} を求めると式 (A7.5) のようになる。

$$I_{z_1} = \int_A y^2 dA = \int_0^h y^2 b \left(\frac{y}{h} \right) dy = \frac{b}{h} \int_0^h y^3 dy = \frac{b}{h} \left[\frac{y^4}{4} \right]_0^h = \frac{bh^3}{4} \quad (\text{A7.5})$$

三角形の図心を通る z 軸を考えると、 z 軸と z_1 軸の距離は $2h/3$ 、三角形の面積 A は $bh/2$ であるため、平行軸の定理から式 (A7.6) が得られる。

$$I_z = I_{z_1} - \left(\frac{2h}{3} \right)^2 A = \frac{bh^3}{4} - \left(\frac{2h}{3} \right)^2 \frac{bh}{2} = \frac{bh^3}{4} - \frac{2bh^3}{9} = \frac{bh^3}{36} \quad (\text{A7.6})$$

断面係数は頂点に対する Z_1 と底辺に対する Z_2 が式 (A7.7) のように得られる。

$$Z_1 = \frac{I_z}{2h/3} = \frac{bh^3}{36} \frac{3}{2h} = \frac{bh^2}{24}, \quad Z_2 = \frac{I_z}{h/3} = \frac{bh^2}{12} \quad (\text{A7.7})$$

7.2

左端を A、右端を B、集中荷重を受ける位置を C とし、はり AB に対する自由物体図を描くと図 A7.1 のようになる。ここで、全長を $l = 420 \text{ mm}$ 、AC 間の距離 $a = 280 \text{ mm}$ 、はり断面の高さ $h = 30.0 \text{ mm}$ 、幅 $b = 8.00 \text{ mm}$ 、集中荷重 $P = 720 \text{ N}$ としている。また、A が受ける反力を R_A 、B が受ける反力を R_B とし、それぞれせん断力の正方向に向けて描いている。

まず、B まわりのモーメントのつり合いから式 (A7.8) となる。

$$-R_A l + P(l - a) = 0 \quad (\text{A7.8a})$$

これより、 R_A が式 (A7.8b) のように求まる。

$$R_A = \frac{l - a}{l} P = \frac{420 - 280}{420} \times 720 = 240 \text{ N} \quad (\text{A7.8b})$$

また、 y 方向の力のつり合いから、式 (A7.9a) が得られる。

$$-R_A + P + R_B = 0 \quad (\text{A7.9a})$$

整理すると式 (A7.9b) を得る。

$$R_B = R_A - P = 240 - 720 = -480 \text{ N} \quad (\text{A7.9b})$$

反力が既知となったところで、左端を原点として水平右向きに x 軸をとり、SFD と BMD を描くと図 A7.2 のようになる。最大の曲げモーメント M_{\max} は位置 C に生じ、 $67.2 \text{ kN}\cdot\text{mm}$ になる。

最大の曲げ応力 σ_b は、曲げモーメントが最大の位置に生じ、断面二次モーメント I や断面係数 Z を用いて、式 (A7.10a) となる。

$$\sigma_b = \frac{M_{\max}}{I} \times \frac{h}{2} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{6M_{\max}}{bh^2} \quad (\text{A7.10a})$$

数値を代入して式(A7.10b)を得る。

$$\sigma_b = \frac{6M_{\max}}{bh^2} = \frac{6 \times 67.2 \times 10^3}{30.0 \times 8.00^2} = 210 \text{ MPa} \quad (\text{A7.10b})$$

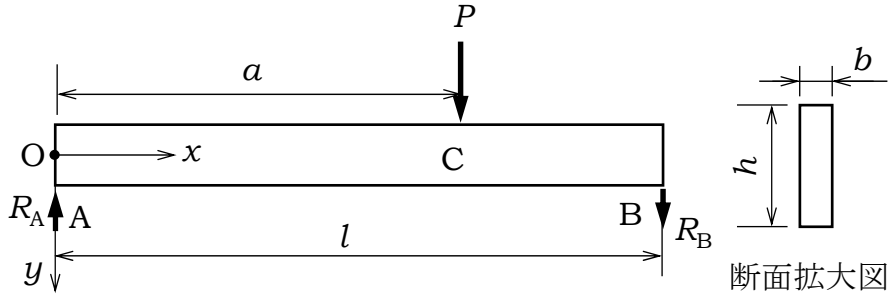


図 A7.1 集中荷重を受ける両端単純支持はりの自由物体図

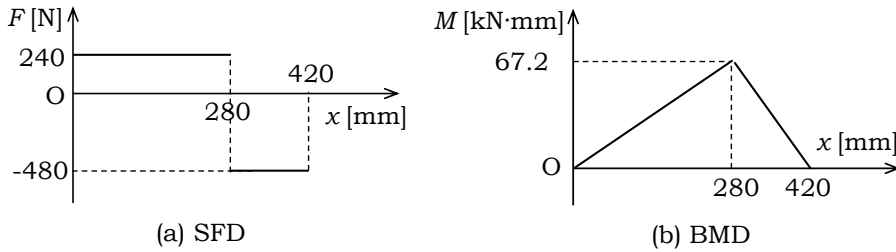


図 A7.2 集中荷重を受ける両端単純支持はりの SFD と BMD

7.3

左端を自由端 A, 右端を固定端 B として, はり AB に対する自由物体図を描くと図 A7.3 のようになる。ここで, 全長を $l = 600 \text{ mm}$, 等分布荷重を $w = 1.20 \text{ N/mm}$ としている。また, 固定端における反力を R_B , 反モーメントを M_B とし, それぞれせん断力と曲げモーメントの正方向に矢印を向けて描いている。

位置 x で仮想切断してできる左側部分の y 方向のつり合いから, せん断力 F は式(A7.11)となる。

$$F = -wx \quad (\text{A7.11})$$

式(A7.11)を x について積分すると曲げモーメント M が式(A7.12a)のように得られる。

$$M = -\frac{w}{2}x^2 + C \quad (\text{A7.12a})$$

ここで, C は積分定数であるが, 自由端で曲げモーメントがゼロになることを利用すると, $C = 0$ と定まり, 式(A7.12b)となる。

$$M = -\frac{w}{2}x^2 \quad (\text{A7.12b})$$

式(A7.11)と(A7.12b)に $x = l$ を代入すると固定端 B における反力, 反モーメントが式(A7.13a), (A7.13b)のように求まる。

$$R_B = -wl = -1.20 \times 600 = -720 \text{ N} \quad (\text{A7.13a})$$

$$M_B = -\frac{wl^2}{2} = -\frac{1.20 \times 600^2}{2} = -216 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{mm} \quad (\text{A7.13b})$$

以上からこの片持ちばりに対する SFD と BMD は図 A7.4 のようになり、曲げ絶対値が最大の曲げモーメント M_{\max} は固定端 B に生じ、その絶対値は 216 kN·mm となる。

直径が d の円形断面の断面二次モーメント I と断面係数 Z は式(A7.14)のようになる（本文、式(7.12)）。

$$I = \frac{\pi d^4}{64}, \quad Z = \frac{I}{d/2} = \frac{\pi d^3}{32} \quad (\text{A7.14})$$

絶対値が最大の曲げ応力 σ_b （上端は正、下端は負で絶対値は同じであるが、ここでは上端の正值を取り上げる）は固定端に生じ、式(A7.15a)となる。

$$\sigma_b = \frac{M_{\max}}{I} \times \frac{d}{2} = \frac{M_{\max}}{Z} = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} \quad (\text{A7.15a})$$

数値を代入して式(A7.15b)を得る。

$$\sigma_b = \frac{32M_{\max}}{\pi d^3} = \frac{32 \times 216 \times 10^3}{3.1416 \times 18.0^3} = 377 \text{ MPa} \quad (\text{A7.15b})$$

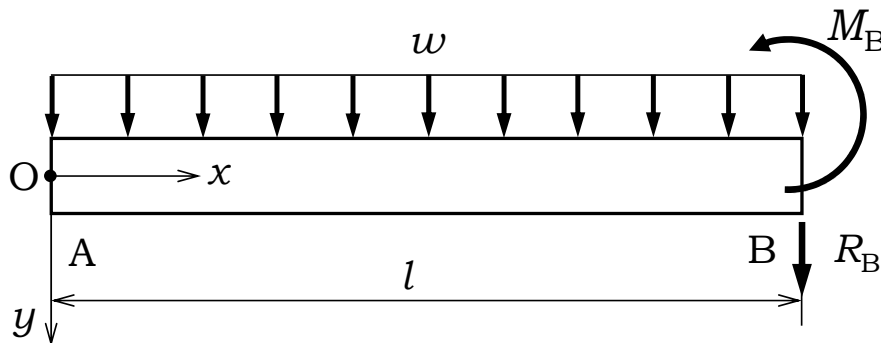


図 A7.3 等分布荷重を受ける片持ちばりの自由物体図

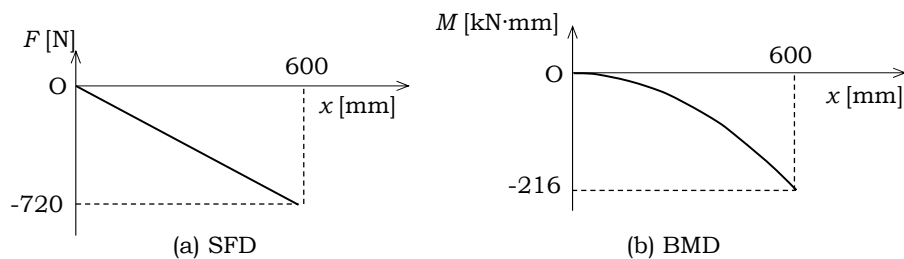


図 A7.4 等分布荷重を受ける片持ちばりの SFD と BMD

<第8章>

8.1

曲げモーメント M の分布は式(A8.1)となる (演習問題 6.1)。

$$M = \frac{M_0}{l} x \quad (\text{A8.1})$$

式(A8.1)より, はりのたわみ曲線の微分方程式は式(A8.2)のようになる。

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = -\frac{M_0}{EI} x \quad (\text{A8.2})$$

式(A8.2)を x で積分すると式(A8.3)を得る。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = -\frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^2}{2} + C_1 \right) \quad (\text{A8.3a})$$

積分定数 C_1 はこのままにして, 式(A8.3a)を x で積分すると式(A8.4a)を得る。

$$v = -\frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x + C_2 \right) \quad (\text{A8.4a})$$

ここで, 左端 ($x=0$) が回転支持で $v=0$ であることを用いると, 式(A8.4a)の積分定数 C_2 がゼロであることがわかり, 式(A8.4a)はあらためて式(A8.4b)のようになる。

$$v = -\frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^3}{6} + C_1 x \right) \quad (\text{A8.4b})$$

さらに右端 ($x=l$) が回転支持であることから, $v=0$ であることを用いると, $C_1 = -l^2/6$ であることがわかり, 式(A8.4b)はあらためて式(A8.4c)となる。

$$v = -\frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^3}{6} - \frac{l^2}{6} x \right) = -\frac{M_0}{6EI} (x^3 - l^2 x) \quad (\text{A8.4c})$$

また, 式(A8.3)はあらためて式(A8.3b)となる。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = -\frac{M_0}{EI} \left(\frac{x^2}{2} - \frac{l^2}{6} \right) = -\frac{M_0}{6EI} (3x^2 - l^2) \quad (\text{A8.3b})$$

8.2

曲げモーメント M の分布は式(A8.5)と表される (演習問題 6.2)。

$$M = -\frac{w_0}{6l} x^3 \quad (\text{A8.5})$$

これより, たわみ曲線の微分方程式は式(A8.6)となる。

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{w_0}{6EI} x^3 \quad (\text{A8.6})$$

式(A8.6)を x で積分すると式(A8.7a)を得る。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{w_0}{6EI} \left(\frac{x^4}{4} + C_1 \right) \quad (\text{A8.7a})$$

ここで、固定端 ($x=l$) でたわみ角 θ がゼロであることを用いると、積分定数は $C_1 = -l^4/4$ であることがわかり、式(A8.7a)はあらためて式(A8.7b)となる。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{w_0}{6EI} \left(\frac{x^4}{4} - \frac{l^4}{4} \right) = \frac{w_0}{24EI} (x^4 - l^4) \quad (\text{A8.7b})$$

式(A8.7b)を x で積分すると式(A8.8a)を得る。

$$v = \frac{w_0}{24EI} \left(\frac{x^5}{5} - l^4 x + C_2 \right) \quad (\text{A8.8a})$$

ここで、固定端 ($x=l$) でたわみがゼロであることを用いると、 $C_2 = 4l^5/5$ と求まり、式(A8.8a)が得られる。

$$v = \frac{w_0}{24EI} \left(\frac{x^5}{5} - l^4 x + \frac{4}{5} l^5 \right) = \frac{w_0}{120EI} (x^5 - 5l^4 x + 4l^5) \quad (\text{A8.8b})$$

8.3

曲げモーメント M の分布は式(A8.9)となる (演習問題 6.3)。

$$M = \begin{cases} -\frac{w}{2} x^2, & (0 \leq x \leq l/2) \\ -\frac{wl}{2} x + \frac{wl^2}{8}, & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (\text{A8.9})$$

式(A8.9)より、 $l/2$ を境界に以下の(1)と(2)の区間に分けて考える。

(1) $0 \leq x \leq l/2$

式(A8.9)より、たわみ曲線の微分方程式は式(A8.10)となる。

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{w}{2EI} x^2 \quad (\text{A8.10})$$

式(A8.10)を x で積分すると式(A8.11a)を得る。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} + C_1 \right) \quad (\text{A8.11a})$$

積分定数 C_1 はそのままにしておき、式(A8.11a)を再度 x で積分すると積分定数 C_2 を含む式(A8.12a)を得る。

$$v = \frac{w}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} + C_1 x + C_2 \right) \quad (\text{A8.12a})$$

(b) $l/2 \leq x \leq l$

式(A8.9)より、たわみ曲線の微分方程式は式(A8.13)となる。

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M}{EI} = \frac{w}{2EI} \left(lx - \frac{l^2}{4} \right) \quad (\text{A8.13})$$

式(A8.13)を x で積分すると式(A8.14a)を得る。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{l^2}{4}x + C_3 \right) \quad (\text{A8.14a})$$

ここで、固定端 ($x = l$) でたわみ角がゼロとなる条件を用いて、 $C_3 = -\beta/4$ であることがわかり、式(A8.14a)はあらためて式(A8.14b)となる。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{dv}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{l}{2}x^2 - \frac{l^2}{4}x - \frac{l^3}{4} \right) \\ &= \frac{w}{8EI} (2lx^2 - l^2x - l^3) \end{aligned} \quad (\text{A8.14b})$$

式(A8.14b)を x で積分すると式(A8.15a)を得る。

$$v = \frac{w}{2EI} \left(\frac{l}{6}x^3 - \frac{l^2}{8}x^2 - \frac{l^3}{4}x + C_4 \right) \quad (\text{A8.15a})$$

ここで、固定端 ($x = l$) でたわみがゼロとなる条件を用いて、 $C_4 = 5l^4/24$ であることがわかり、式(A8.15a)はあらためて式(A8.15b)となる。

$$v = \frac{w}{2EI} \left(\frac{l}{6}x^3 - \frac{l^2}{8}x^2 - \frac{l^3}{4}x + \frac{5}{24}l^4 \right) = \frac{w}{48EI} (4lx^3 - 3l^2x^2 - 6l^3x + 5l^4) \quad (\text{A8.15b})$$

(1)と(2)の境界、 $x = l/2$ 、でたわみ角は連続であるため、式(A8.11a)と式(A8.14b)は $x = l/2$ で同一のたわみ角を与える必要がある。まず、式(A8.11a)で $x = l/2$ とおいて得られるたわみ角は式(A8.16a)となる。

$$\theta_{x=l/2} = \frac{w}{2EI} \left\{ \frac{1}{3} \left(\frac{l}{2} \right)^3 + C_1 \right\} = \frac{w}{48EI} (l^3 + 24C_1) \quad (\text{A8.16a})$$

つぎに、式(A8.14b)で $x = l/2$ とおくと式(A8.16b)を得る。

$$\theta_{x=l/2} = \frac{w}{8EI} \left\{ 2l \left(\frac{l}{2} \right)^2 - l^2 \left(\frac{l}{2} \right) - l^3 \right\} = -\frac{wl^3}{8EI} \quad (\text{A8.16b})$$

式(A8.16a)と(A8.16b)のたわみ角が同一になる条件から、 $C_1 = -7\beta/24$ と求まり、式(A8.11a)はあらためて式(A8.11b)となる。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \frac{w}{2EI} \left(\frac{x^3}{3} - \frac{7}{24}l^3 \right) = \frac{w}{48EI} (8x^3 - 7l^3) \quad (\text{A8.11a})$$

同様にたわみが $x = l/2$ で連続となるよう未定の積分定数を決める。境界におけるたわみは、式(A8.12a)から式(A8.17a)となる。

$$v_{x=l/2} = \frac{w}{2EI} \left\{ \frac{1}{12} \left(\frac{l}{2} \right)^4 - \frac{7l^3}{24} \left(\frac{l}{2} \right) + C_2 \right\} = \frac{w}{384EI} (-27l^4 + 192C_2) \quad (\text{A8.17a})$$

式(A8.15b)に $x = l/2$ を代入して、式(A8.17b)を得る。

$$v_{x=l/2} = \frac{w}{48EI} \left\{ 4l \left(\frac{l}{2} \right)^3 - 3l^2 \left(\frac{l}{2} \right) - 6l^3 \left(\frac{l}{2} \right) + 5l^4 \right\} = \frac{7wl^4}{192EI} \quad (\text{A8.17b})$$

式(A8.17a)と(A8.17b)が同一のたわみを与える条件から、 $C_2 = 41l^4/192$ と求まり、式(A8.12a)はあらためて式(A8.12b)となる。

$$v = \frac{w}{2EI} \left(\frac{x^4}{12} - \frac{7l^3}{24}x + \frac{41l^4}{192} \right) = \frac{w}{384EI} (16x^4 - 56l^3x + 41l^4) \quad (\text{A8.12b})$$

以上をまとめると式(A8.18)と(A8.19)が得られる。

$$\theta = \frac{dv}{dx} = \begin{cases} \frac{w}{48EI} (8x^3 - 7l^3), & (0 \leq x \leq l/2) \\ \frac{w}{8EI} (2lx^2 - l^2x - l^3), & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (\text{A8.18})$$

$$v = \begin{cases} \frac{w}{384EI} (16x^4 - 56l^3x + 41l^4), & (0 \leq x \leq l/2) \\ \frac{w}{48EI} (4lx^3 - 3l^2x^2 - 6l^3x + 5l^4), & (l/2 \leq x \leq l) \end{cases} \quad (\text{A8.19})$$

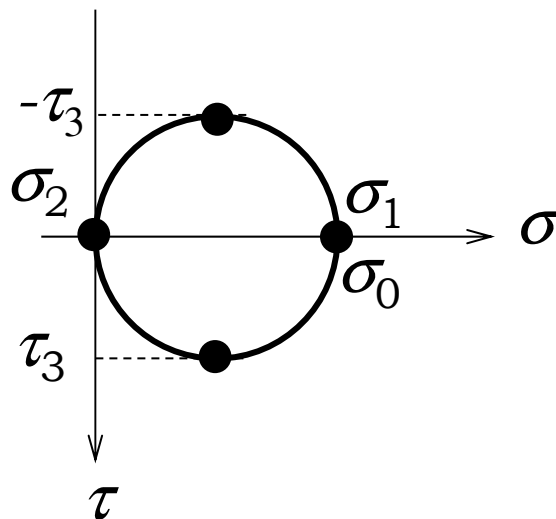
<第9章>

(1)

$\sigma_x = \sigma_0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = 0$, となる単軸応力状態に対して、モールの応力円に内接する長方形の対角線をなす2点を定めると、 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (\sigma_0, 0)$ と $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (0, 0)$ となる。これらの2点を結ぶ直線は σ 軸上にあり、内接長方形の高さはゼロになる。図示すると図A9.1が得られる。

図A9.1のモールの応力円の右端と左端から、2つの主応力 σ_1, σ_2 が、上端と下端から主せん断応力 τ_3 が式(A9.1)のように決まる。

$$\sigma_1 = \sigma_0, \sigma_2 = 0, \tau_3 = \frac{\sigma_0}{2} \quad (\text{A9.1})$$



図A9.1 モールの応力円 (単軸応力状態)

(2)

$\sigma_x = 0, \sigma_y = 0, \tau_{xy} = \tau_0$, となる純粋せん断応力状態に対して, モールの応力円に内接する長方形の対角線をなす2点を定めると, $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (0, \tau_0)$ と $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (0, -\tau_0)$ となる。この2点を結ぶ直線は τ 軸上にあり, 内接長方形の幅はゼロになる。モールの応力円を図示すると図A9.2になる。

図A9.2のモールの応力円の右端と左端から, 2つの主応力 σ_1, σ_2 が, 上端と下端から主せん断応力 τ_3 が式(A9.2)のように決まる。

$$\sigma_1 = \tau_0, \quad \sigma_2 = -\tau_0, \quad \tau_3 = \tau_0 \quad (\text{A9.2})$$

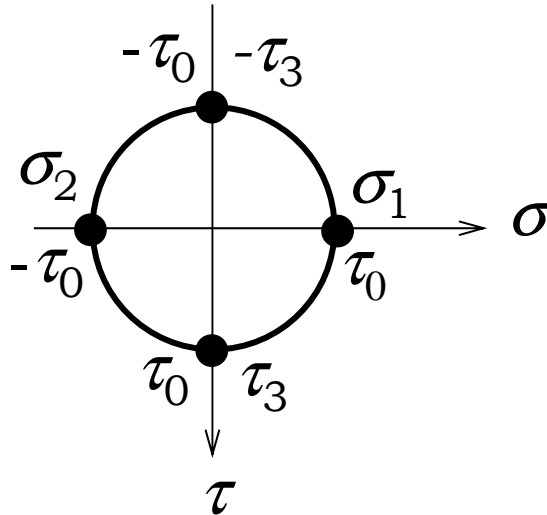


図 A9.2 モールの応力円 (純粋せん断応力状態)

(3)

$\sigma_x = \sigma_0, \sigma_y = \sigma_0, \tau_{xy} = 0$, となる等二軸応力状態に対して, モールの応力円に内接する長方形の対角線をなす2点を定めると, $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (\sigma_0, 0)$ と $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (\sigma_0, 0)$ となる。このように2点は一致し, 内接長方形の対角線の長さはゼロになる。図示すると図A9.3のように, 半径がゼロのモールの応力円が得られる。

モールの応力円の右端と左端, 上端と下端は重なっており, 2つの主応力 σ_1, σ_2 が, 上端と下端から主せん断応力 τ_3 が式(A9.3)のように決まる。

$$\sigma_1 = \sigma_0, \quad \sigma_2 = \sigma_0, \quad \tau_3 = 0 \quad (\text{A9.3})$$

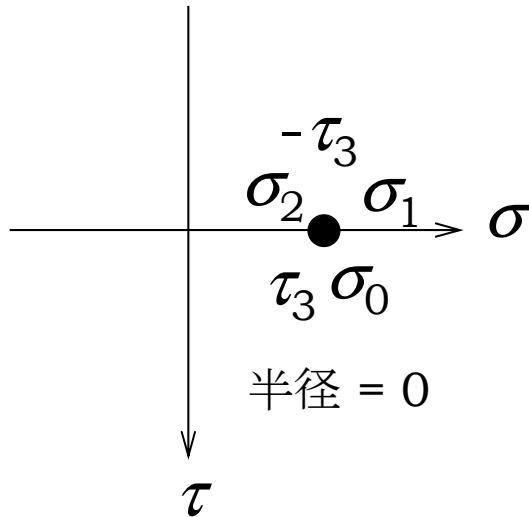


図 A9.3 モールの応力円（等二軸応力状態）

9.2

(1)

ヤング率，ポアソン比との関係から，せん断弾性係数 G は式(A9.4)のように求まる（本文，式(2.13)，(9.20)）。

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = \frac{200}{2(1+0.30)} = 76.92 = 76.9 \text{ GPa} \quad (\text{A9.4})$$

平面応力状態では， $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ となることも考え，一般化したフックの法則から式(A9.5a)～(A9.5e)を得る。

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{\sigma_x - \nu\sigma_y}{E} = \frac{200 - 0.300 \times (-50.0)}{200 \times 10^3} = 0.001075 \\ &= 1.08 \times 10^{-3} \end{aligned} \quad (\text{A9.5a})$$

$$\begin{aligned} \varepsilon_y &= \frac{\sigma_y - \nu\sigma_x}{E} = \frac{-50.0 - 0.300 \times 200}{200 \times 10^3} = -0.000550 \\ &= -5.50 \times 10^{-4} \end{aligned} \quad (\text{A9.5b})$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu(\sigma_x + \sigma_y)}{E} = \frac{-0.300 \times (200 - 50.0)}{200 \times 10^3} = -0.000225 = -2.25 \times 10^{-4} \quad (\text{A9.5c})$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} = \frac{60.0}{76.92 \times 10^3} = 0.000780 = 7.80 \times 10^{-4} \quad (\text{A9.5d})$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\tau_{zx}}{G} = 0 \quad (\text{A9.5e})$$

(2)

計算の前に、ひずみをパーセントでなく式(A9.6)のように比率に書き直す。

$$\varepsilon_x = 1.00 \times 10^{-3}, \quad \varepsilon_y = -1.50 \times 10^{-3}, \quad \gamma_{xy} = 6.00 \times 10^{-4} \quad (\text{A9.6})$$

平面応力状態では、 $\sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ である。その他の応力成分については、一般化したフックの法則から式(A9.7a)～(A9.7e)を得る。

$$\begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y) \\ &= \frac{200 \times 10^3 \times (1.00 \times 10^{-3} - 0.300 \times 1.50 \times 10^{-3})}{1 - 0.300^2} = 120.88 = 121 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A9.7a})$$

$$\begin{aligned} \sigma_y &= \frac{E}{1-\nu^2} (\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x) \\ &= \frac{200 \times 10^3 \times (-1.50 \times 10^{-3} + 0.300 \times 1.00 \times 10^{-3})}{1 - 0.300^2} = -263.74 \\ &= -264 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A9.7b})$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = \frac{E\gamma_{xy}}{2(1+\nu)} = \frac{200 \times 10^3 \times 6.00 \times 10^{-4}}{2(1+0.300)} = 46.154 = 46.2 \text{ MPa} \quad (\text{A9.7c})$$

9.3

モールの応力円に内接する長方形の対角線をなす2点を定めると、 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (130, 60.0)$ と $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (40.0, -60.0)$ となる。対角線の長さ $2R$ は式(A9.8)のように得られる。

$$\begin{aligned} 2R &= \sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2} = \sqrt{(130 - 40.0)^2 + (2 \times 60.0)^2} = \sqrt{2.25 \times 10^4} \\ &= 150 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A9.8})$$

また、中心の σ 座標 σ_c は式(A9.9)のように求まる。

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{130 + 40.0}{2} = 85.0 \text{ MPa} \quad (\text{A9.9})$$

図示すると図 A9.4 のようなモールの応力円が得られる。

2つの主応力 σ_1, σ_2 , 主せん断応力 τ_3 は式(A9.10a)～(A9.10c)となる。

$$\sigma_1 = \sigma_c + R = 85.0 + 75.0 = 160 \text{ MPa} \quad (\text{A9.10a})$$

$$\sigma_2 = \sigma_c - R = 85.0 - 75.0 = 10.0 \text{ MPa} \quad (\text{A9.10b})$$

$$\tau_3 = R = 75.0 \text{ MPa} \quad (\text{A9.10c})$$

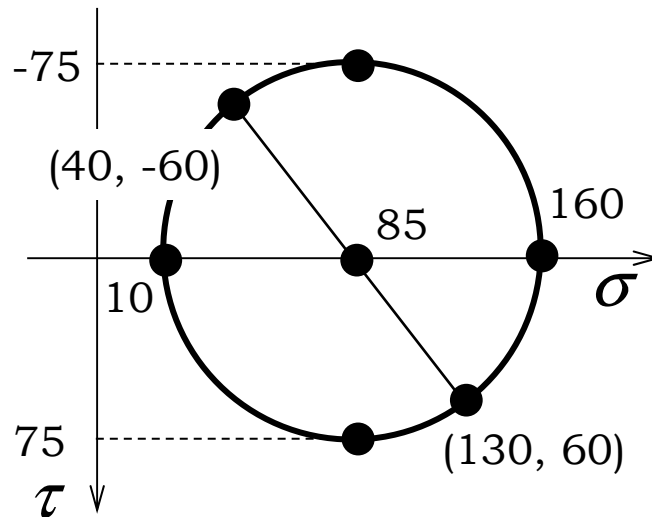


図 A9.4 モールの応力円

<第 10 章>

10.1

トルク T_0 を図 A10.1 のような等価な偶力 F に置き換えると、式(A10.1)が成立する。

$$F = \frac{1}{2} \times \left(\frac{T_0}{d/2} \right) = \frac{T_0}{d} \quad (\text{A10.1})$$

F によってもたらされる接線方向の変位を λ_t とすると、 F と λ_t が比例することから、二つの F がなす仕事 W は、(A10.2)のようになる。

$$W = 2 \times \frac{F\lambda_t}{2} = F\lambda_t = \frac{T_0}{d} \times \frac{d}{2} \times \phi_0 = \frac{T_0\phi_0}{2} \quad (\text{A10.2})$$

線形弾性範囲では、外力がなした仕事はすべてひずみエネルギー U として弾性体（軸）に蓄えられるため、式(A10.3)が成立する。

$$U = W = \frac{T_0\phi_0}{2} \quad (\text{A10.3})$$

偶力がなす仕事から求めた式(A10.3)は、ひずみエネルギー密度から求めた本文の式(10.12)と一致している。

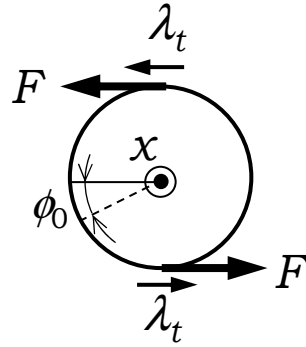


図 A10.1 ねじれ角を生じる偶力と接線方向変位

10.2

外モーメント M_0 と等価な二つの偶力を F とすると, F は中立面からの距離 $h/2$ を用いて式(A10.4)となる。

$$F = \frac{1}{2} \times \frac{M_0}{h/2} = \frac{M_0}{h} \tag{A10.4}$$

図 A10.2 のように, F が作用する点の変位 (荷重点変位) を λ_x とすると, F と λ_x が比例することから, 二つの F がなす仕事 W は式(A10.5)となる。

$$W = 2 \times \frac{F\lambda_x}{2} = F\lambda_x = \frac{M_0}{h} \times \frac{h}{2} \times \theta_0 = \frac{M_0\theta_0}{2} \tag{A10.5}$$

線形弾性範囲では外力がなした仕事はすべてひずみエネルギー U として弾性体 (はり) に蓄えられるため式(A10.6)が成立する。

$$U = W = \frac{M_0\theta_0}{2} \tag{A10.6}$$

偶力がなす仕事から求めた式(A10.6)は, ひずみエネルギー密度から求めた本文の式(10.18)と一致している。

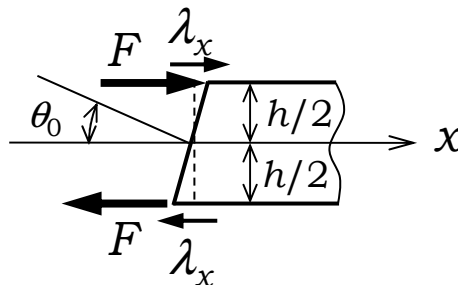


図 A10.2 たわみ角を生じる偶力と荷重点変位

<第 11 章>

11.1

自由端に P_1 を受けるとき、このはりには全長が l の片持ちばりとみなせ、たわみの方程式は式(A11.1)になる (本文, 式(8.26b))。

$$v = \frac{P_1}{6EI} (x^3 - 3l^2x + 2l^3) \quad (\text{A11.1})$$

このとき、先端のたわみ v_{11} は、式(A11.2)となる (本文, 式(8.28))。

$$v_{11} = \frac{P_1 l^3}{3EI} \quad (\text{A11.2})$$

また、位置 C のたわみ v_{21} は式(A11.1)で $x = a$ と置いて、式(A11.3)となる。

$$v_{21} = \frac{P_1}{6EI} (a^3 - 3l^2a + 2l^3) \quad (\text{A11.3})$$

位置 C に P を受けるときの位置 C のたわみは、はりの全長が $l-a$ になったときと同じになる。このため、式(A11.2)の l を $l-a$ で、 P_1 を P で置き換えて、式(A11.4)を得る。

$$v_{22} = \frac{P(l-a)^3}{3EI} \quad (\text{A11.4})$$

このときの自由端のたわみを v_{12} とすると、 P と P_1 を同時に加えた状態に対して相反定理から、式(A11.5)となる。

$$P_1 v_{12} = P v_{21} \quad (\text{A11.5})$$

式(A11.3)を代入すると、スパン途中で P を受けるときの v_{12} を求める式(A11.6)が得られる。

$$v_{12} = \frac{P}{6EI} (a^3 - 3l^2a + 2l^3) \quad (\text{A11.6})$$

11.2

このはりではスパン途中で集中荷重や分布荷重がないため、せん断力 F は位置 x によらず一定になり、つり合いを考えることで式(A11.7)が得られる。

$$F = -\frac{M_0}{l} \quad (\text{A11.7})$$

式(A11.7)を積分すると曲げモーメント M が式(A11.8a)のように求まる。

$$M = -\frac{M_0}{l} x + C \quad (\text{A11.8a})$$

左端 ($x = 0$)で、 $M = M_0$ であることを利用すると、積分定数は $C = M_0$ と定まり、 M は式(A11.8b)で与えられる。

$$M = \frac{M_0}{l} (l - x) \quad (\text{A11.8b})$$

式(A11.8b)より、このほりに蓄えられるひずみエネルギー U は式(A11.9)になる。

$$\begin{aligned} U &= \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = \frac{1}{2EI} \int_0^l \left\{ \frac{M_0}{l} (l-x) \right\}^2 dx = \frac{M_0^2}{2EI} \int_0^l (l-x)^2 dx \\ &= \frac{M_0^2}{2EI} \left[-\frac{(l-x)^3}{3} \right]_0^l = \frac{M_0^2 l}{6EI} \end{aligned} \quad (\text{A11.9})$$

カスティリアノの定理により、右端のたわみ角 θ_0 は式(A11.10)で求められる。ただし、 θ_0 は M_0 と同じ向きを正とする。

$$\theta_0 = \frac{\partial U}{\partial M_0} = \frac{M_0 l}{3EI} \quad (\text{A11.10})$$

11.3

棒 12 の内力を N_{12} 、棒 23 の内力を N_{23} 、棒 31 の内力 N_{31} とし、各節点におけるつり合いを考えることで、式(A11.11)のように求められる。

$$N_{12} = P, N_{23} = -\sqrt{2}P, N_{31} = P \quad (\text{A11.11})$$

トラス全体に蓄えられるひずみエネルギー U はそれぞれの棒に蓄えられるひずみエネルギーの和となり、式(A11.12)となる。

$$\begin{aligned} U &= \frac{N_{12}^2 l}{2EA} + \frac{N_{23}^2 \sqrt{2}l}{2EA} + \frac{N_{31}^2 l}{2EA} = \frac{P^2 l}{2EA} + \frac{2\sqrt{2}P^2 l}{2EA} + \frac{P^2 l}{2EA} = \frac{P^2 l}{2EA} (2 + 2\sqrt{2}) \\ &= \frac{P^2 l}{EA} (1 + \sqrt{2}) \end{aligned} \quad (\text{A11.12})$$

カスティリアノの定理から、変位 v は式(A11.13)のように求まる。

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{2(1 + \sqrt{2})Pl}{EA} \quad (\text{A11.13})$$

<第 12 章>

12.1

円形断面であるから座屈によって生じるたわみは柱の長手方向と直交する任意の方向に生じうるため、座屈を考える上での断面二次モーメント I は式(A12.1)となる。

$$I = \frac{\pi d^4}{64} = 210.95 = 211 \text{ mm}^4 \quad (\text{A12.1})$$

オイラーの公式 (本文, 式(12.11)) から、座屈荷重 P_c は式(A12.2)のように得られる。

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^2 E}{4l^2} \times \frac{\pi d^4}{64} = \frac{\pi^3 E d^4}{256l^2} = \frac{3.1416^3 \times 210 \times 10^3 \times 8.00^4}{256 \times 800^2} \\ &= 162.8 = 163 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{A12.2})$$

12.2

座屈によるたわみは断面の辺が小さい側に生じるため、柱の直交断面上でたわむ方向の長さを h 、 h と

直交する方向の長さを b として、断面二次モーメント I は式(A12.3)となる。

$$I = \frac{bh^3}{12} = \frac{12.0 \times 6.00^3}{12} = 216.0 = 216 \text{ mm}^4 \quad (\text{A12.3})$$

オイラーの公式から、座屈荷重 P_c は式(A12.4)のように求まる。

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{\pi^2 EI}{4l^2} = \frac{\pi^2 E}{4l^2} \times \frac{bh^3}{12} = \frac{\pi^2 Ebh^3}{48l^2} = \frac{3.1416^2 \times 196 \times 10^3 \times 12.0 \times 6.00^3}{48 \times (1.20 \times 10^3)^2} \\ &= 72.54 = 72.5 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{A12.4})$$

12.3

一辺の長さが 9.00 mm の正方形断面の断面二次モーメントは式(A12.5)となる。

$$I = \frac{a^4}{12} = \frac{9.00^4}{12} = 546.75 = 547 \text{ mm}^4 \quad (\text{A12.5})$$

座屈モードを考えると両端を回転支持したときの座屈荷重 P_c は、一端固定-一端自由の柱の長さを 1/2 倍したのと同じになることがわかり、式(A12.6)となる（本文、式(12.15)）。

$$\begin{aligned} P_c &= \frac{\pi^2 EI}{4(l/2)^2} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{3.1416^2 \times 130 \times 10^3 \times 546.75}{840^2} = 994.2 \\ &= 994 \text{ N} \end{aligned} \quad (\text{A12.6})$$

<第 13 章>

13.1

圧力容器の使用応力を断面平均応力で代表させると、最大主応力は式(A13.1)の周方向応力 σ_θ となる（本文、式(13.2)）。

$$\sigma_\theta = \frac{D_i}{2t} p \quad (\text{A13.1})$$

最低限必要な板厚 t は、が許容引張応力 σ_a に一致する場合に相当し、式(A13.2)で求められる。

$$t = \frac{D_i}{2\sigma_a} p = \frac{800 \times 2.80}{2 \times 100} = 11.2 \text{ mm} \quad (\text{A13.2})$$

13.2

モールの応力円の対角線をなす 2 点は、 $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (150, 50.0)$ と $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-50.0, -50.0)$ であるため、図 A13.1 のようになる。また、対角線の長さの 1/2（モールの応力円の半径）、 R は式(13.3)となる。

$$\begin{aligned} R &= \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2}}{2} = \frac{\sqrt{\{150 - (-50)\}^2 + (2 \times 50.0)^2}}{2} = 50\sqrt{5} \\ &= 111.80 = 112 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A13.3})$$

モールの応力円の中心の σ 座標、 σ_c は式(A13.4)となる。

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{150 + (-50.0)}{2} = 50.0 \text{ MPa} \quad (\text{A13.4})$$

主応力の一つは、 $\sigma_z = 0 \text{ MPa}$ であり、残りの二つはモールの応力円の右端と左端であり、大きさの順に、 $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とすると、式(A13.5)となる。

$$\begin{cases} \sigma_1 = 50 + 50\sqrt{5} = 161.8 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \sigma_z = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 50 - 50\sqrt{5} = -61.8 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{A13.5})$$

主せん断応力を τ_1, τ_2, τ_3 とすると、主せん断応力の 2 倍が二つの主応力の差の絶対値となるため、式(A13.6)となる。

$$\begin{cases} 2\tau_1 = |\sigma_2 - \sigma_3| = -50 + 50\sqrt{5} = 61.8 \text{ MPa} \\ 2\tau_2 = |\sigma_3 - \sigma_1| = |50 - 50\sqrt{5} - 50 - 50\sqrt{5}| = 100\sqrt{5} = 224 \text{ MPa} \\ 2\tau_3 = |\sigma_1 - \sigma_2| = |50 + 50\sqrt{5} - 0| = 50 + 50\sqrt{5} = 168 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{A13.6})$$

トレスカの相当応力 σ_T は主せん断応力の最大値の 2 倍であり、式(A13.7)となる。

$$\sigma_T = \max(|2\tau_1|, |2\tau_2|, |2\tau_3|) = \max(61.8, 224, 168) = 224 \text{ MPa} \quad (\text{A13.7})$$

ミーゼスの相当応力 σ_M は応力成分に対して式(A13.8)のように求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_M &= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(150 + 50)^2 + (-50 - 0)^2 + (0 - 150)^2 + 6(50^2 + 0^2 + 0^2)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{200^2 + 50^2 + 150^2 + 6 \times 50^2}{2}} = \frac{50}{\sqrt{2}} \sqrt{4^2 + 1^2 + 3^2 + 6 \times 1^2} \\ &= \frac{50}{\sqrt{2}} \sqrt{16 + 1 + 9 + 6} = \frac{50}{\sqrt{2}} \sqrt{32} = 50 \times 4 = 200 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A13.8})$$

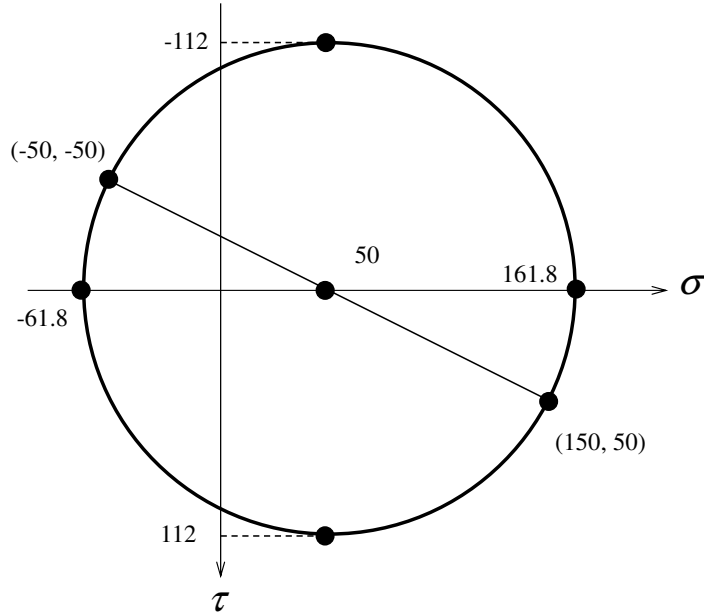


図 A13.1 モールの応力円

13.3

モールの応力円に内接する長方形の対角線をなす 2 点は, $(\sigma_x, \tau_{xy}) = (100, 75.0)$, $(\sigma_y, -\tau_{xy}) = (-50.0, -75.0)$ となる。モールの応力円の半径 R は式(A13.9)のように求まり, 中心の σ 座標 σ_c は式(A13.10)のように求まる。

$$R = \frac{\sqrt{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (2\tau_{xy})^2}}{2} = \frac{\sqrt{\{100 - (-50)\}^2 + (2 \times 75.0)^2}}{2} = 75\sqrt{2} \quad (\text{A13.10})$$

$$= 106 \text{ MPa}$$

$$\sigma_c = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} = \frac{100 + (-50.0)}{2} = 25.0 \text{ MPa} \quad (\text{A13.11})$$

モールの応力円は図 A13.2 のようになる。

主応力の一つは, $\sigma_z = 0 \text{ MPa}$ であり, 残りの二つはモールの応力円の右端と左端であり, 大きさの順に, $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ とすると, 式(A13.12)となる。

$$\begin{cases} \sigma_1 = 25 + 75\sqrt{2} = 131 \text{ MPa} \\ \sigma_2 = \sigma_z = 0 \text{ MPa} \\ \sigma_3 = 25 - 75\sqrt{2} = -81.1 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{A13.12})$$

主せん断応力を τ_1, τ_2, τ_3 とすると, 主せん断応力の 2 倍が二つの主応力の差の絶対値となるため, 式(A13.13)となる。

$$\begin{cases} 2\tau_1 = |\sigma_2 - \sigma_3| = |-25 + 75\sqrt{2}| = 81.1 \text{ MPa} \\ 2\tau_2 = |\sigma_3 - \sigma_1| = |25 - 75\sqrt{2} - 25 - 75\sqrt{2}| = 150\sqrt{2} = 212 \text{ MPa} \\ 2\tau_3 = |\sigma_1 - \sigma_2| = |25 + 75\sqrt{2} - 0| = 25 + 75\sqrt{2} = 131 \text{ MPa} \end{cases} \quad (\text{A13.13})$$

トレスカの相当応力 σ_T は主せん断応力の最大値の 2 倍であり、式(A13.14)となる。

$$\sigma_T = \max(|2\tau_1|, |2\tau_2|, |2\tau_3|) = \max(81.8, 212, 131) = 212 \text{ MPa} \quad (\text{A13.14})$$

ミーゼスの相当応力 σ_M は応力成分に対して式(A13.15)のように求められる。

$$\begin{aligned} \sigma_M &= \sqrt{\frac{(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6(\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{zx}^2)}{2}} \\ &= \sqrt{\frac{(100 + 50)^2 + (-50 - 0)^2 + (0 - 100)^2 + 6(75^2 + 0^2 + 0^2)}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{150^2 + 50^2 + 100^2 + 6 \times 75^2} = \frac{25}{\sqrt{2}} \sqrt{6^2 + 2^2 + 4^2 + 6 \times 3^2} \\ &= \frac{25}{\sqrt{2}} \sqrt{36 + 4 + 16 + 54} = \frac{25}{\sqrt{2}} \sqrt{110} = 25\sqrt{55} = 185 \text{ MPa} \end{aligned} \quad (\text{A13.15})$$

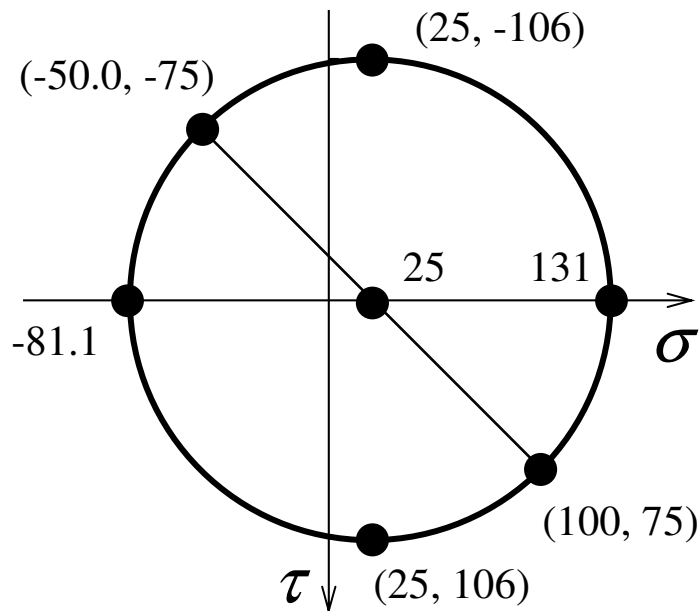


図 A13.2 モールの応力円