演習の解答と解説

【第 2 章　演習問題】

演習 2.1　四則演算後の有効数字

二つの直方体の体積 V_1, V_2 とそれらの和は，単位を除くと，

$V_1 = 23.2 \times 30.4 \times 204.1 = 143947.648$

$V_2 = 12.1 \times 14.8 \times 103.8 = \quad 18588.504$

$V_1 + V_2 = 162536.152$

となる。V_1，V_2 の有効桁数はいずれも 3 で，V_1 では 1000 の位まで，V_2 では 100 の位までが有効数字である。従って，$V_1 + V_2$ は 1000 の位までを有効数字として，

$162536.152 \ \rightarrow\ 163000 = 1.63 \times 10^5$

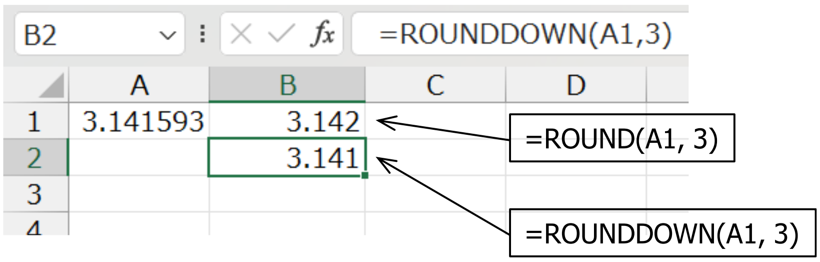
とする。計算途中では丸めを行うべきでない（2.4.2 項）ので，V_1，V_2 のそれぞれの数値は丸めないことに注意する。単位を戻すと，体積の和は 1.63×10^5 mm^3。

演習 2.2　 Excel による数値の丸め

Excel の関数検索機能を使うと，四捨五入は ROUND(数値，桁数)という関数で実行できることがわかる。「桁数」に正の整数を指定した場合，小数点以下の指定した桁数になるように四捨五入される。切り捨てには幾つかの関数があるが，例えば FLOOR(数値，基準値)という関数では，結果が「基準値」の倍数になるように切り捨てられる。

ROUND(PI(), 4)　→　3.1416

FLOOR(PI(), 0.0001) → 3.1415



演習 2.3 四捨五入によるかたより

Excel シートの例えばセル A1 と B1 に，それぞれ

=RANDBETWEEN(0, 1000)/10

=ROUND(A1, 0)

と入力し，これら二つのセルを 100 行目まで連続コピーする。セル A101（もしくは他の適当なセル）とその横のセルに，それぞれ

=AVERAGE(A1:A100)　　　(1)

=AVERAGE(B1:B100)　　　(2)

を入力し，乱数を更新しながらこれらの大小を比較する。多くの場合に(2)が大きめの値となることが確認できるであろう。すなわち，丸め前の数値の桁数によっては，四捨五入は中立的な丸めにはならないことがわかる。(2)の結果を(1)と同じ桁数になるように四捨五入で丸めても，この結果は変わらない。

【第 3 章　演習問題】

演習 3.1　標本標準偏差の計算

下図のようにエクセルシート上に入力する。ただし，B1 セルにおける"A$9"のような，記号"$"を用いたセル参照は，B1 セルを下に連続コピーした際に，列番号 9 を固定することを指定する絶対参照を表す。標本標準偏差は，(1), (2)いずれの方法でも，0.8271（約 0.83）となる。標本標準偏差の計算には，関数 STDEV.S( )か STDEV( )を用いる。STDEV.P( )は使用しない。

	A	B	
1	5.6	=(A1-A$9)^2	
2	6.6	=(A2-A$9)^2	
3	7.1	=(A3-A$9)^2	
4	6.7	=(A4-A$9)^2	
5	6.9	=(A5-A$9)^2	
6	6.4	=(A6-A$9)^2	
7	8.0	=(A7-A$9)^2	
8	5.4	=(A8-A$9)^2	
9	=AVERAGE(A1:A8)	=SUM(B1:B8)	← 二乗和
10	↑	=B9/(8-1)	← 標本分散
11		=SQRT(B10)	← 標本標準偏差 (1)
12	標本平均		
13		=STDEV.S(A1:A8)	← 標本標準偏差 (2)

演習 3.2　正規分布表の利用

(1) $x = 163$ mm を標準化（式(3.13)）した変数 z の値は，

$$z = \frac{163 - 160}{2} = 1.5$$

である。付表 1 の $k = 1.5$ に対応する上側確率 P の値から，確率は 0.0668 （約 6.7 %）。

(2) Excel の関数のヘルプ機能を利用すると，セルに

=NORM.DIST(x, 平均, 標準偏差, TRUE)

を入力することにより，x の値以下の累積確率（下側確率）が求まることがわかる。(1-下側確率)により，上側確率が求まる。

(3) 付表 2 において，$P = 0.05$ に対応する k を読むことにより，$k = 1.645$。（なお，この k は標準正規分布の確率変数 z の値であり，元の変数 x に換算すると，$x = 160 + 2 \times k = 163.29$ mm。）

【第 4 章　演習問題】

[注] 以下では，計算途中の数値を丸めて表示する一方，計算自体は丸め前の数値を使って行っているため，表示された数値を計算式に代入して得られる値と最終の計算結果が微妙に違う場合があることに注意。

演習 4.1　標準不確かさのタイプ A 評価とタイプ B 評価

(1) 10 個の測定値の平均値 m は 91.92 g，標本標準偏差 s は 0.84 g。測定値のばらつきに由来する，測定結果 m の標準不確かさ（式(4.1)参照）は，$u_A(m) = s/\sqrt{10} = 0.27$ g。

(2) 先験的確率分布として，半幅が 0.5 g の一様分布を想定すると，目盛りのずれに由来する標準不確かさは $u_B(m) = (0.5\ \mathrm{g})/\sqrt{3} = 0.29$ g。

(3) $u(m)$は，$u^2(m) = u_A{}^2(m) + u_B{}^2(m)$ により合成される（二乗の和の形で合成するのは，分散の加法性（式(3.8c)）による）。これから，$u(m) = 0.39$ g。

演習 4.2　不確かさの伝ぱ則

(1) $\partial V/\partial m = 1/d$, $\partial V/\partial d = -m/d^2$ ゆえ，式(4.11)の伝ぱ則は次になる。

$$u_c^2(V) = \left(\frac{1}{d}\right)^2 u^2(m) + \left(\frac{m}{d^2}\right)^2 u^2(d)$$

(2) 密度 d に対する先験的確率分布を，半幅 0.15 g/cm³ の一様分布と想定すると，d の標準不確かさは，$u(d) = (0.15\ \mathrm{g/cm^3})/\sqrt{3} = 0.087\ \mathrm{g/cm^3}$。

(3) $V = m/d = 4.775\ \mathrm{cm^3}$。また，伝ぱ則から $u_c(V) = 0.030\ \mathrm{g/cm^3}$。

(4) $U = 2 \cdot u_c(V) = 0.059\ \mathrm{g/cm^3}$ ゆえ，$V = 4.775\ \mathrm{cm^3} \pm 0.059\ \mathrm{g/cm^3}$。

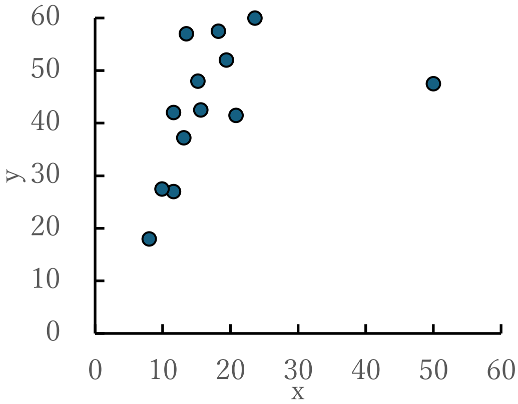
【第 5 章　演習問題】

演習 5.1　相関係数の計算

データの散布図を書くと、変数 x が増大すると y の値も大きくなることが分かる。相関係数 r を教科書 5.2　相関係数の求め方（P54）の式（5.1）～（5.4）により計算すると、r=0.569 となる。

このデータは、散布図をみると 20 個のデータの内、1 個のデータが外れていることが分かる。この外れ値を除いて相関係数を求めると、r=0.898　となる。

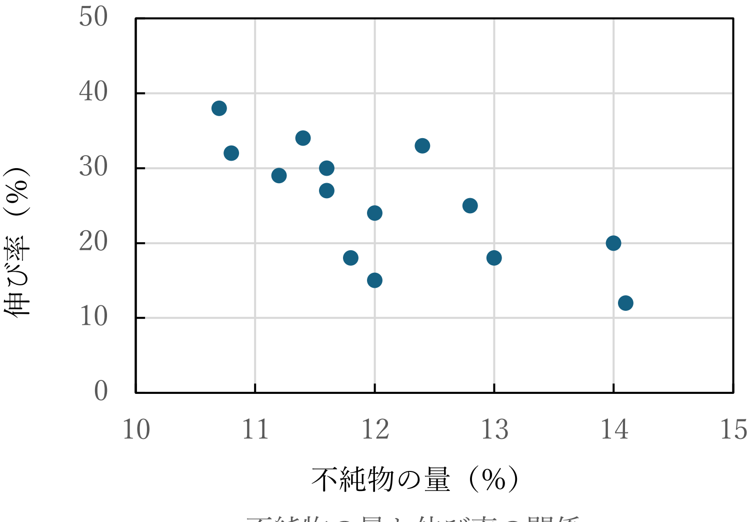
決定計数 r^2 は、それぞれ、0.324、0.806 となり、外れ値があると、相関係数、決定計数の計算結果に大きく影響することが分かる。



変数 x と変数 y の関係

演習 5.2　相関係数の計算

測定結果より、不純物の量（%）と伸び率（%）の関係の散布図を作成する。これより、原料中の不純物の量（%）が増加すると、その原料を使用した製品の伸び率（%）が減少していることが分かる。この関係の強さを考察するため、教科書 5.2　相関係数の求め方（P54）の式（5.1）～（5.4）により、相関係数 r を計算する。相関係数 r=-0.713



不純物の量と伸び率の関係

【第 6 章】 演習問題　最小 2 乗法による実験式の作成

演習 6.1

変数 x と変数 y の散布図を書くと、変数 x が増加すると変数 y の値は直線的に減少していることが分かる。よって、x を説明変数、y を目的変数として、切片を持つ直線の式 $y = b + ax$ に当てはめをする。本文の例 1（P69）の計算例と同様に計算する。第 3 章の演習 1 と類似の手順で計算すると、a と b は以下のとおりとなる。

$$a = -3.606 \quad b = 32.131$$

演習 6.2　指数関数で表される実験式の求め方

（1）B=（　$\log b$　）、Y=（　$\log(y + C)$　）、X=（　$\log x$　）となる。

（2）与えられた式は、定数を左辺に移行し、両辺の対数をとり直線の式で表す。

$$y = bx^a - c$$

$$log(y + C) = logb + alogx$$

$$\therefore Y = A + BX = 2.498 - 0.724X$$

$logb = 2.498$　（対数は常用対数）

$$\therefore a = 314.775 \quad b = -0.724$$

$$\therefore 314.775x^{-0.724} - 5$$

回帰式で求めた推定値（上式の x に表 6.5 の x の値を代入した y の値）と実測値（表 6.5 の y の値）を比較して、あてはめの妥当性を確認する。

演習 6.3 指数関数で表される実験式の求め方

（1）$PV^r=C$ であるから、両辺の対数をとると次式となる。

$$logP + rlogV = logC$$

ここで、$logV=X$、$logP=Y$ とおけば、

$$Y = A + BX$$

と書ける。この式で $A=logC$、$B=-r$ である。

$X = logV$	$Y = logP$	X^2	XY
-0.0857	2.6344	0.0073	-0.226
0.0204	2.5028	0.0004	0.051
0.0741	2.4301	0.0055	0.180
0.1626	2.2918	0.0264	0.373
0.2887	2.1218	0.0833	0.613
0.5023	1.8428	0.2523	0.926
$\sum X = 0.9623$	$\sum Y = 13.8239$	$\sum X^2 = 0.3753$	$\sum XY = 1.9161$

$$S_{XX} = 0.2210$$

$$S_{XY} = -0.3010$$

回帰係数 B を計算する

$$B = \frac{S_{XY}}{S_{XX}} = \frac{-0.3010}{0.2210} = -1.3620$$

切片 A を求める。

$$\bar{X} = 0.1604 \quad \bar{Y} = 2.3040$$

$$A = \bar{Y} - B\bar{X} = 2.3040 - (-1.3620 \times 0.1604) = 2.5225$$

回帰式を求める。

$$Y = 2.5225 - 1.3671X$$

ここで $A=logC$、 $B=-r$ としたので、求める式は以下のようになる。

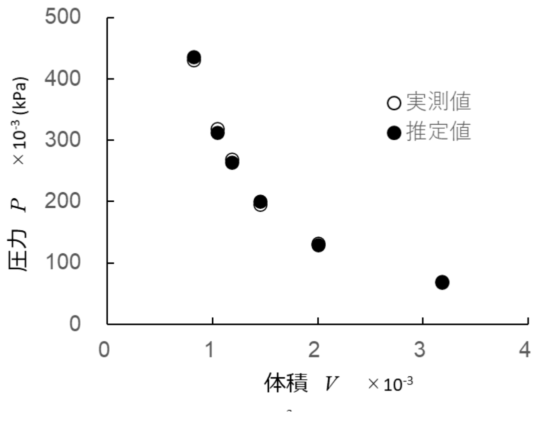
$$PV^{1.3620} = 333.0428$$

回帰式で求めた推定値と実測値を比較して、あてはめの妥当性を確認する。

ここでは残差の元データに対する割合を確認する。

実測値と実験式の推定値

x	y	推定値	残差	残差の割合 %
0.821	430.959	451.817	-4.718	-1.09
1.048	318.290	320.710	5.849	1.84
1.186	269.243	269.578	5.247	1.95
1.454	195.811	202.516	-4.215	-2.15
1.944	132.379	134.701	-2.299	-1.74
3.179	69.637	67.528	0.711	1.02



体積と圧力の関係の実測値と推定値

（２）求めた推定式に体積 V=2000 (m^3)を代入して圧力 P を求める。

P=129.568 $\times 10^{-3}$ (kPa)

演習 6.4　任意の実験式の推定

表 6.1 の実験式の例を使用し、変数変換を試みる。変数変換後のデータで散布図を作り、もっとも直線に回帰する変数変換を選択する。その後、演習 1 と同様の手順で傾き $\beta(b)$と切片 $\alpha(a)$を求める。

α=1.87、β=－1.66

【第 7 章】　演習問題　検定と推定

演習 7.1

$$D = 100\,mm \quad \sigma = 3\,mm \quad n = 10 \quad \overline{D} = 97.8\,mm$$

$$u_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = \frac{97.8 - 100}{\sqrt{\frac{3^2}{10}}} = -2.319$$

$$\alpha = 0.05 \qquad |u_0| \geq 1.96$$

$$\alpha = 0.01 \qquad |u_0| \leq 2.576$$

∴　有意水準 5%で有意が認められるので、工程管理上異常があると考えられる。

演習 7.2

第 1 ステップとして、成型機 A で作った製品と、成型機 B で作った製品とで引張強度のばらつきに違いがないかどうかを検定する。両者のばらつきはともに未知であるので、「2 つの母集団の母分散に関する検定」を使用する。

帰無仮説を立てる

$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad H_1: \sigma_A^2$

不偏分散と分散比の計算

$S_A = \sum(x_i - \bar{x}_A)^2$ =114.900

$S_B = \sum(x_i - \bar{x}_B)^2$ =94.889

$V_A = \frac{S_A}{\phi_A} = \frac{114.900}{9} = 12.767 \quad V_B = \frac{S_B}{\phi_B} = \frac{94.889}{8} = 11.861$

$$F_o = \frac{V_B}{V_A} = 1.076$$

$F\left(\phi_{B,}\,\phi_{A,}\frac{\alpha}{2}\right) = F(9,8;0.025) = 3.39$　両側検定の場合

$F_o < 3.39$

これより、危険率 5%で有意ではないので、両成型機によって製造した製品の強度の分散に違いがあるとはいえない。

この結果を踏まえて、第 2 ステップとして、成型機 A で作った製品と成型機 B で作った製品の強度の平均値に違いがないかどうかを検定する。第 1 ステップでばらつきには

違いがないという結論を得たことから、「2 つの母平均の差に関する検定」の「①$\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ は（等分散）」の方法で検定する。

帰無仮説を立てる

$$H_0\colon \mu_A = \mu_B$$

不偏分散と分散比の計算

$$\bar{x}_A = 79.9 \quad \bar{x}_B = 83.889$$

$$V = \frac{S_A + S_B}{n_A + n_B - 2} = \frac{114.900 + 94.889}{17} = 12.341$$

$$t_0 = \frac{\bar{x}_A - \bar{x}_{\boldsymbol{B}}}{\sqrt{V\left(\frac{1}{n_A} + \frac{1}{n_B}\right)}} = \frac{79.9 - 83.889}{\sqrt{12.341\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{9}\right)}} = -2.471$$

$$t(\phi_A + \phi_B,\ \alpha\,) = t(17, 0.05) = 2.110$$

$$|t_0| \geq 2.110$$

結果として平均値に差があると判定する。

演習 7.3

（1） 帰無仮説 $H_0\colon \mu = \mu_0 = 434MPa$

$$\bar{y} = 439.07$$

$$|u| = \frac{\bar{y} - \mu_0}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} = 0.775 \quad \text{有意水準 5\%} \quad (\alpha = 0.05)$$

∴ 帰無仮説H_0は採択となり、変更前と平均値には差がないと言える。

（2）母平均の信頼率 95%の信頼限界を求めよ。

(1) で工程がよく管理されているということを踏まえると、大きさ 10 の標本をサンプリングした母集団では、$\sigma^2 = 20.68$ を仮定することができる。

よって、母平均に関する推定では、信頼率 95%の信頼区間は下記の通り計算できる。

$$\pm 1.960\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \pm 1.960\sqrt{\frac{20.68^2}{10}} = \pm 12.8367$$

＊標準偏差が与えられていない場合、標本 10 個のデータの分散を求め、σ^2 が未知の場合の計算をする。

分散 V=408.384

$$\pm t(\phi, \alpha)\sqrt{\frac{V}{n}} = \pm 2.262\sqrt{\frac{408.384}{10}} = \pm 14.455$$

演習 7.4

帰無仮説を立てる

$$H_0: \sigma_A^2 = \sigma_B^2 \quad H_1: \sigma_A^2$$

不偏分散と分散比の計算

$S_A = \sum(x_i - \bar{x}_A)^2$ =8.729

$S_B = \sum(x_i - \bar{x}_B)^2$ =20.66

$$V_A = \frac{S_A}{\phi_A} = \frac{8.729}{7} = 1.247 \quad V_B = \frac{S_B}{\phi_B} = \frac{20.66}{8} = 2.583$$

$$F_o = \frac{V_B}{V_A} = 2.071$$

$F\left(\phi_{B,}\, \phi_{A,} \frac{\alpha}{2}\right) = F(8,7; 0.025) = 4.53$ 両側検定の場合

（ $F\left(\phi_{B,}\, \phi_{A,}\, \alpha\right) = F(8,7; 0.05) = 7.65$ 片側検定の場 ）

$F_o < 4.53$

∴ 危険率 5%で有意ではない。両者の強度の分散に違いがあるとはいえない。

【第 8 章】 演習問題 実験計画法による実験結果の解析

演習 8.1

$V_{A\times B}$（ 1.375 ）、交互作用の分散比 $V_{A\times B}/V_e$（ 4.104 ）

演習 8.2

（1） 実験（a）からは、工作機械間の加工精度のばらつきが、実験（b）からは、加工精度で分けたグループ間の差を考察できる情報が得られる。

（2） 実験（a）は変量模型、実験（b）は母数模型

演習 8.3

【解答例】

表 8.15 の実験データの分散分析を行った結果、以下のとおりである（分散分析のみ）。

分散分析表（ANOVA）

要因	S	φ	V	Fo	F(0.05)	F(0.01)
熱処理条件 A	84.8	3	28.27	31.41**	3.24	5.29
誤差 e	14.4	16	0.90			
合計 T	99.2	19				

熱処理条件の効果は危険率 1%で有意となり、熱処理条件によって材料強度に違いがある

といえる。熱処理条件として A_1 から A_2、A_3、A_4 を取り上げた範囲において、熱処理条件が材料強度に影響していることが明らかとなった。分散分析では、要因効果の有無は分かるが、変化の傾向を確認するために要因効果図を書く。

演習 8.4

【解答例】分散分析のみ

分散分析表（ANOVA）

要因	S	φ	V	Fo
A 材料の種類	357100	3	119033.3	200.23**
B 熱処理温度	74850	3	24950.0	41.972**
e 誤差	5350	9	594.4	
合計 T	437300	15		

F 分布表より、$F(3,9, 0.05)$が 3.86 で、$F(3,9, 0.01)$が 6.99 である。A 材料の種類、B 熱処理温度のいずれの要因効果も危険率 1 %で有意となり、この実験で取り上げた材料の種類と熱処理温度は引張強さに大きく影響することが分かる。

【第 9 章】　演習問題　直交表を利用した実験計画と解析

演習 9.1

実験で取り上げた因子の水準は 2 なので、各因子の自由度は 1 になる。交互作用 A×B と C×D の自由度も合わせると、全体で必要な自由度は 6 であり、直交配列表 L_8 の列数は 7 列なので割り付けられそうに思う。因子 A と因子 B を 1 列、2 列に割り付けると、その交互作用 A×B は 3 列を使うことになるので、4 列以降に因子 C、因子 D を割り付ける。このとき交互作用 C×D は低次（1 列、2 列、3 列）のいずれかを使うことになるが（付表 6.2)、そこには既に使用しているので割り付けができない。したがって、この計画では直交配列表 L_8 は使用できない。

演習 9.2

【解答例】分散分析のみ

分散分析表（ANOVA）

要因	S	φ	V	Fo
A	427.781	1	427.781	0.627
B	105.851	1	105.851	0.155
C	116.281	1	116.281	0.170
D	442.531	1	442.531	0.648
A×B	0.0113	1	0.0113	0.000

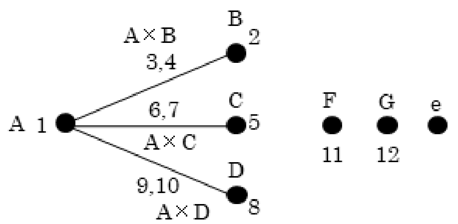
A×C	197.011	1	197.011	0.289
e 誤差	682.651	1	682.651	
合計	1972.119	7		

今回の因子の分散 V の値は誤差分散 V_e より小さいので、いずれの因子も効果は認められない。これは、実験で取り上げた要因効果より実験データのばらつきが大きいことを意味している。

F 分布表より、F(1,7, 0.05)が 5.59、F(1,7, 0.01)が 13.7 であり、F の値よりいずれの分散比も小さいく有意性は認めらないが、この実験は規模が小さく、因子の自由度 1 なので検定精度が低い。このように自由度が小さい直交配列表の検定では、分散比の小さい要因を誤差にプーリングして、誤差の自由を増やすことで検定の精度を上げることができる。この例では、すべての要因の分散比が 1 未満と低いので、プーリングしても有意性は認められない。

演習 9.3

3 水準系の線点図を利用して割り付ける例を示す。
直交配列表 $L_{27}(3^{13})$の代表的な線点図を使用すると下図のように割付が出来る。点は因子、線は交互作用の出る列番号である。



演習 9.4

【解答例】分散分析のみ

ANOVA

要因	S	φ	V	*r* (%)
A	24.1422	2	12.0711	79.25
B	5.3422	2	2.6711	17.54
C	0.8089	2	0.4044	2.66
D	0.1689	2	0.0844	0.55
合計	30.4622	8		100

誤差列が無いので、総変動に対する各因子の平方和の割合を計算すると、因子 C と因子 D の効果が小さいので、これらをプールして新たに誤差を計算し、その値で分散分析を行う。その結果が下記の表である。

ANOVA

要因	S	φ	V	Fo
A	24.1422	2	12.0711	49.371
B	5.3422	2	2.6711	10.925
e'	0.9778	4	0.2445	
合計	30.4622	8		

F 分布表より、F(2,4, 0.05)が 6.94、F(2,4, 0.01)が 18.0 であるので、因子 A は危険率 1%で有意、因子 B は危険率 5%で有意となる。

【第 10 章】　演習問題　回帰分析（直線性の検定）

演習 10.1

この計算例は、横軸が表面処理溶液の濃度で縦軸が表面粗さの単回帰分析をする。表 10.1 の回帰分析の結果は以下のとおりである。

回帰分析における分散分析表

要因	S	φ	V	Fo	F(0.05)
表面処理溶液濃度 A	104.957	4	26.239	45.953**	3.06
回帰 R	88.209	1	88.209	154.482**	4.54
残差 res	16.748	3	5.583	9.777**	3.29
誤差 e	8.565	15	0.571		
合計 T	113.522	19			

残差分散と回帰による分散を、誤差分散で検定する。回帰による分散が有意で、残差分散が有意でない場合には、直線回帰が成立する。この場合は、残差分散が有意であるので、表面処理溶液濃度と表面粗さ関係は直線関係（1 次式）では表せないことになるので、2 次以上の曲線回帰の解析が必要である。曲線回帰には直交多項式の解析を行う。

演習 10.2

この計算例は、横軸が積層ピッチで縦軸が表面粗さの単回帰分析をする。演習 10.1 と同様に回帰分析を行った結果は以下のとおりである。

回帰分析における分散分析表

要因	S	φ	V	Fo	F(0.05)
積層ピッチ A	46.238	3	15.413	8.804**	4.07
回帰 R	36.845	1	36.845	21.045**	5.32
残差 res	9.393	2	4.697	2.683	4.46
誤差 e	14.006	8	1.751		
合計 T	60.244	11			

残差分散と回帰による分散を、誤差分散で検定した結果、回帰による分散が有意で、残差分散が有意ではないので、積層ピッチで縦軸が表面粗さの関係は直線回帰式（1 次式）で表すことが出来る。回帰式を求めるため回帰係数を推定する

$$\hat{\beta} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})\,(y_i - \bar{y})}{\sum(x_i - \bar{x})^2} = \frac{S_{xy}}{S_{xx}} = \frac{0.235}{0.002} = 156.727$$

$$\hat{\alpha} = \bar{y} - \hat{\beta}\bar{x} = 6.934 - 156.727 \times 0.025 = 3.016$$