

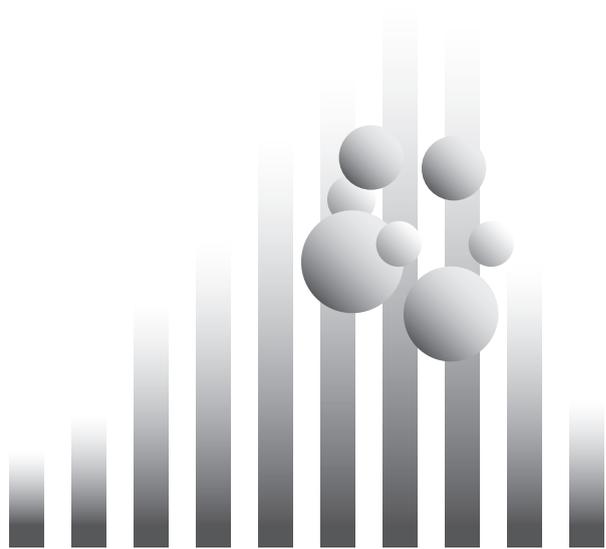


シリーズ 情報科学における確率モデル **12**
Series on Stochastic Models in Informatics and Data Science

コンピュータ理論の基礎 章末問題解答

【作成者】 日野 雅喜
江村 剛志

コロナ社



1章 解答

【1】

確率変数 X の分布関数を $F(x) = P(X \leq x)$ とし, F は連続で逆関数 F^{-1} を持つとする. 確率変数 $U = F(X)$ を定義する.

(1) 確率変数 U は区間 $[0, 1]$ に値をとることを示せ.

(2) $P(U \leq u) = u, 0 < u < 1$ を示せ.

(1) U の実現値 $u = F(x)$ が値をとる範囲は, 分布関数の値域に等しいため, 確率変数 U は区間 $[0, 1]$ に値をとる. ■

(2) 定義に従って計算する. $u \in (0, 1)$ について,

$$\begin{aligned} P(U \leq u) &= P(F(X) \leq u) \\ &= P(X \leq F^{-1}(u)) \\ &= F(F^{-1}(u)) \\ &= u. \end{aligned}$$

2つ目の等号では, 分布関数の性質より F は非減少なので, F^{-1} もまた非減少であることを用いた. ■

【2】

パラメータ $\alpha > 0, \beta > 0$ のガンマ分布 (gamma distribution) の密度関数は以下である.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right), \quad x > 0.$$

ここに, $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数である.

(1) 平均 $E(X) = \alpha\beta$, 分散 $\text{Var}(X) = \alpha\beta^2$ を導出せよ.

(2) 平均 $E(X) = 1$, 分散 $\text{Var}(X) = \theta$ となるガンマ分布の密度関数を書け.

(1) まず平均を導出する.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^\infty x f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+1)\beta^{\alpha+1}} x^{(\alpha+1)-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx \\ &= \alpha\beta \end{aligned}$$

が成り立つ. 上から3番目の等号でガンマ関数の性質 $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ を用いた.

次に, $E(X^2)$ を計算すると,

$$\begin{aligned} E(X^2) &= \int_0^\infty x^2 f(x) dx \\ &= \int_0^\infty x^2 \cdot \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^\alpha} x^{\alpha-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx \\ &= \frac{\Gamma(\alpha+2)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \beta^2 \int_0^\infty \frac{1}{\Gamma(\alpha+2)\beta^{\alpha+2}} x^{(\alpha+2)-1} \exp\left(-\frac{x}{\beta}\right) dx \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 \end{aligned}$$

となる. 分散は $\text{Var}(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ を用いて以下のように導出される.

$$\begin{aligned} \text{Var}(X) &= E(X^2) - \{E(X)\}^2 \\ &= \alpha(\alpha+1)\beta^2 - (\alpha\beta)^2 \\ &= \alpha\beta^2. \end{aligned}$$

(2) 条件より, 以下の2式が成り立つ.

$$E(X) = \alpha\beta = 1,$$

$$\text{Var}(X) = \alpha\beta^2 = \theta.$$

2つ目の式に1つ目の式の結果を代入して, $\beta = \theta$. $\alpha\beta = 1$ より $\beta \neq 0$ なので, $\alpha\beta = 1$ の両辺を β で割ることができて, $\alpha = 1/\beta = 1/\theta$. したがって, パラメータ $1/\theta, \theta$ のガンマ分布の密度関数が求める答えとなる.

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(1/\theta)\theta^{1/\theta}} x^{1/\theta-1} \exp\left(-\frac{x}{\theta}\right), \quad x > 0.$$

【コラム1】

平均1で分散がパラメータとなるガンマ分布は, フレイルティの分布としてよく生存時間解析で用いられる. 平均の1を中心として, フレイルティ x の値が大きい個人ほど死亡リスクが高く, 逆に x の値が小さい個人ほど死亡リスクが低い (江村・古川, 2024). つまり, θ の値が大きいほど, より不均一な個人から成る集団ということになる.

【3】

非負確率変数 X を $X = Z^2, Z \sim N(0, 1)$ で定義する.

- (1) X の分布関数が $F(x) = P(X \leq x) = 2\Phi(\sqrt{x}) - 1, x \geq 0$ となることを示せ.
 (2) X の密度関数が次式になることを示せ.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right), \quad x \geq 0.$$

- (3) 上記の密度関数がガンマ分布で表せることを示せ.

(1) 定義より, 確率変数 X, Z の実現値 x, z のとりうる範囲は $x \geq 0, -\infty < z < \infty$ となることに注意する. 分布関数は以下のように計算される.

$$\begin{aligned} F(x) &= P(X \leq x) \\ &= P(Z^2 \leq x) \\ &= P(-\sqrt{x} \leq Z \leq \sqrt{x}) \\ &= P(Z \leq \sqrt{x}) - P(Z \leq -\sqrt{x}) \\ &= \Phi(\sqrt{x}) - \{1 - \Phi(\sqrt{x})\} \quad [\because \text{分布の対称性より } \Phi(-x) = 1 - \Phi(x)] \\ &= 2\Phi(\sqrt{x}) - 1. \end{aligned}$$

ちなみに, $F(x)$ は以下の分布関数の性質も満たしている.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} F(x) = 2 \lim_{x \rightarrow \infty} \Phi(\sqrt{x}) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1,$$

$$\lim_{x \downarrow 0} F(x) = 2\Phi(0) - 1 = 2 \cdot \frac{1}{2} - 1 = 0.$$

(2) (1) の結果より, 密度関数は分布関数を微分して求められるので, 以下のように計算できる.

$$f(x) = \frac{dF(x)}{dx} = 2 \frac{d\Phi(\sqrt{x})}{dx} = 2\varphi(\sqrt{x}) \cdot \frac{\sqrt{x}}{dx} = 2 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{\sqrt{x^2}}{2}\right) \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right).$$

[別解] $Z \sim N(0, 1)$ であるため, Z の密度関数は以下で与えられる.

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right).$$

密度関数は分布関数を微分して得られる. 関数の添え字に注意して, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \frac{dF_X(x)}{dx} \\ &= \frac{d}{dx} P(Z \leq \sqrt{x}) - \frac{d}{dx} P(Z \leq -\sqrt{x}) \\ &= \frac{d}{dx} F_Z(\sqrt{x}) - \frac{d}{dx} F_Z(-\sqrt{x}) \\ &= f_Z(\sqrt{x}) \frac{1}{2\sqrt{x}} - f_Z(-\sqrt{x}) \left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi x}} \exp\left(-\frac{x}{2}\right). \end{aligned}$$

(3) 上記の密度関数を以下のように式変形する.

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi} \cdot 2^{1/2}} x^{-1/2} \exp\left(-\frac{x}{2}\right) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1/2) \cdot 2^{1/2}} x^{1/2-1} \exp\left(-\frac{x}{2}\right). \quad [\because \sqrt{\pi} = \Gamma(1/2)] \end{aligned}$$

これは, パラメータ $\alpha = 1/2, \beta = 2$ のガンマ分布の密度関数に等しい.

【4】

$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ と $X \sim \text{Logist}(\mu, \sigma)$ の場合, 平均とメディアンがいずれも μ であることを示せ.

○ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ の平均が μ となることの証明

正規分布について, $u = (x - \mu)/\sigma$ と変数変換すると, $x = \sigma u + \mu, dx = \sigma du$ が成り立つ. 積分範囲は同じなので,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \\ &= \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{u^2}{2}\right) du \end{aligned}$$

第1項の被積分関数は奇関数であるため原点对称の積分範囲で積分すると0になる. また, 第2項の被積分関数は標準正規分布の確率密度関数であるため全積分が1になる (\because 確率密度関数の性質). したがって, $E(X) = \mu$.

○ $X \sim \text{Logist}(\mu, \sigma)$ の平均が μ となることの証明

ロジスティック分布の確率密度関数は次のように定義される.

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \cdot \frac{e^{-(x-\mu)/\sigma}}{(1 + e^{-(x-\mu)/\sigma})^2}.$$

$u = (x - \mu)/\sigma$ と変数変換すると, $x = \sigma u + \mu, dx = \sigma du$ が成り立つ. 積分範囲は同じなので,

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (\sigma u + \mu) \cdot \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} du = \sigma \int_{-\infty}^{\infty} u \cdot \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} du + \mu \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} du$$

ここで, 第1項の被積分関数を $g(u)$ とおくと,

$$g(-u) = -u \cdot \frac{e^u}{(1 + e^u)^2} = -u \cdot \frac{e^{-2u} e^u}{e^{-2u} (1 + e^u)^2} = -u \cdot \frac{e^{-u}}{(1 + e^{-u})^2} = -g(u)$$

が成り立つので、 $g(u)$ は奇関数である。したがって、原点对称の積分範囲で積分すると 0 になる。また、第 2 項の被積分関数は $\text{Logist}(0, 1)$ の確率密度関数であるため全積分が 1 になる (\cdot : 確率密度関数の性質)。したがって、 $E(X) = \mu$ 。 ■

正規分布もロジスティック分布も連続型分布なので、メディアン m は $F(X \leq m) = 1/2$ を満たす数として定義される。また、 F が逆関数をもつので、 $m = F^{-1}(1/2)$ が成り立つ。

○ $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ のメディアンが μ となることの証明

標準正規分布の分布関数 Φ を用いて $F(x) = \Phi((x - \mu)/\sigma)$ と表されるので、

$$\begin{aligned} P(X \leq m) &= \frac{1}{2} \\ \Phi\left(\frac{m - \mu}{\sigma}\right) &= \frac{1}{2} \\ \frac{m - \mu}{\sigma} &= 0 \\ m &= \mu. \end{aligned}$$

3 つ目の等式で、標準正規分布は y 軸について対称なので、 $\Phi(0) = 1/2$ となることを用いた。 ■

○ $X \sim \text{Logist}(\mu, \sigma)$ のメディアンが μ となることの証明

分布関数は

$$F(x) = \frac{1}{1 + \exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)}.$$

分布関数の逆関数を求めると、

$$F^{-1}(x) = \mu - \sigma \log\left(\frac{1}{x} - 1\right).$$

メディアンは $m = F^{-1}(1/2)$ と表されるので、

$$m = \mu - \sigma \log(2 - 1) = \mu. \quad \blacksquare$$

2章 解答

【1】

確率変数 X と Y の周辺分布関数を $F(x) = P(X \leq x)$, $-\infty < x < \infty$, $G(y) = P(Y \leq y)$, $-\infty < y < \infty$ とおく. 定数 a と $b > 0$ に対して, $Y = a + bX$ が成立すると仮定する.

(1) 次式を示せ.

$$G(y) = F\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

(2) 次式を示せ.

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} F(x) & \text{if } x \leq \frac{y-a}{b}, \\ F\left(\frac{y-a}{b}\right) & \text{if } x > \frac{y-a}{b}. \end{cases}$$

(3) 次式を示せ.

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \min(F(x), G(y)).$$

(4) 線形式 $Y = a + bX$ を一般化し, $Y = f(X)$ とおく. もし f が増加関数であるならば, $P(X \leq x, Y \leq y) = \min(F(x), G(y))$ となることを示せ.

(5) 減少関数 f に対し, $Y = f(X)$ とおく. このとき,

$$G(y) = 1 - F(f^{-1}(y)),$$

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} F(x) - F(f^{-1}(y)) & \text{if } F(f^{-1}(y)) \leq F(x), \\ 0 & \text{if } F(f^{-1}(y)) > F(x). \end{cases}$$

を示せ. さらに,

$$H(x, y) = \max(F(x) + G(y) - 1, 0),$$

を示せ.

(6) 定数 a に対して, $Y = a$ とおく. また, 指示関数 $I(A)$ は 0 (A が偽のとき) または 1 (A が真のとき) をとるとする. このとき, $G(y) = I(y \leq a)$, $-\infty < y < \infty$ を示せ. さらに, $P(X \leq x, Y \leq y) = F(x)G(y)$ を示せ.

(1) 定義に従って計算する. $b > 0$ に注意して,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(a + bX \leq y) = P\left(X \leq \frac{y-a}{b}\right) = F\left(\frac{y-a}{b}\right).$$

(2) 同時分布を計算すると,

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x, a + bX \leq y) = P(X \leq x, X \leq (y-a)/b)$$

が成り立つ. 場合分けを行い計算する.

(i) $x \leq (y-a)/b$ のとき

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x) = F(x).$$

(ii) $x > (y-a)/b$ のとき

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq (y-a)/b) = F((y-a)/b).$$

(i) と (ii) より題意は示された.

(3) (1) および (2) の結果より,

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \begin{cases} F(x) & \text{if } x \leq (y-a)/b, \\ G(y) & \text{if } x > (y-a)/b. \end{cases}$$

が成り立つ. ここで, F は非減少なので, $x \leq (y-a)/b$ のとき, $F(x) \leq F((y-a)/b) = G(y)$. 同様に, $x > (y-a)/b$ のとき, $F(x) > F((y-a)/b) = G(y)$. したがって,

$$P(X \leq x, Y \leq y) = \min(F(x), G(y))$$

が成り立つ.

(4) f は増加関数なので,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(f(X) \leq y) = P(X \leq f^{-1}(y)) = F(f^{-1}(y))$$

が成り立つ. 同時分布を計算すると,

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \leq x, X \leq f^{-1}(y)) \\ &= \begin{cases} F(x) & \text{if } x \leq f^{-1}(y) \\ F(f^{-1}(y)) & \text{if } x > f^{-1}(y) \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(x) & \text{if } x \leq f^{-1}(y), \\ G(y) & \text{if } x > f^{-1}(y). \end{cases} \end{aligned}$$

となる.(3)と同様に F の引数の大小と F の値の大小が一致するため, $P(X \leq x, Y \leq y) = \min(F(x), G(y))$ が成り立つ.

(5) 定義に従って計算する. (4)とは異なり, f が減少関数であることに注意して,

$$G(y) = P(Y \leq y) = P(f(X) \leq y) = P(X \geq f^{-1}(y)) = 1 - F(f^{-1}(y))$$

が成り立つ. 同時分布を計算する.

$$\begin{aligned} P(X \leq x, Y \leq y) &= P(X \leq x, X \geq f^{-1}(y)) \\ &= \begin{cases} P(f^{-1}(y) \leq X \leq x) & \text{if } f^{-1}(y) \leq x \\ 0 & \text{if } f^{-1}(y) > x \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(x) - F(f^{-1}(y)) & \text{if } F(f^{-1}(y)) \leq F(x) \\ 0 & \text{if } F(f^{-1}(y)) > F(x) \end{cases} \\ &= \begin{cases} F(x) + G(y) - 1 & \text{if } 0 \leq F(x) + G(y) - 1, \\ 0 & \text{if } 0 > F(x) + G(y) - 1. \end{cases} \\ &= \max(F(x) + G(y) - 1, 0) \end{aligned}$$

(6) 定義に従って計算して, $G(y) = P(Y \leq y) = P(a \leq y) = I(a \leq y)$. また, Y は定数なので, X と Y は独立であり,

$$P(X \leq x, Y \leq y) = P(X \leq x)P(a \leq y) = F(x)I(a \leq y) = F(x)G(y)$$

が成り立つ. ■

【2】

次の2つのコピュラに対し, 定義 2.2 の条件 2 が成立することを示せ.

$$M(u, v) = \min(u, v), \quad W(u, v) = \max(u + v - 1, 0).$$

ヒント: 場合分けによる計算を行う

$0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ のとき, コピュラ C によって定義される長方形 $(u_1, u_2] \times (v_1, v_2]$ 上の確率を C -体積 (C -volume) と呼び, 以下が成り立つのであった.

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \geq 0.$$

○ $M(u, v)$ について, 定義 2.2 の条件 2 が成立することの証明

M -体積が非負であることを示す. M -体積は以下で表される.

$$M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) = \min(u_2, v_2) - \min(u_2, v_1) - \min(u_1, v_2) + \min(u_1, v_1).$$

したがって, u_1, u_2, v_1, v_2 の大小関係に注意して, 図 1 のように 6 通りの場合分けを行う.

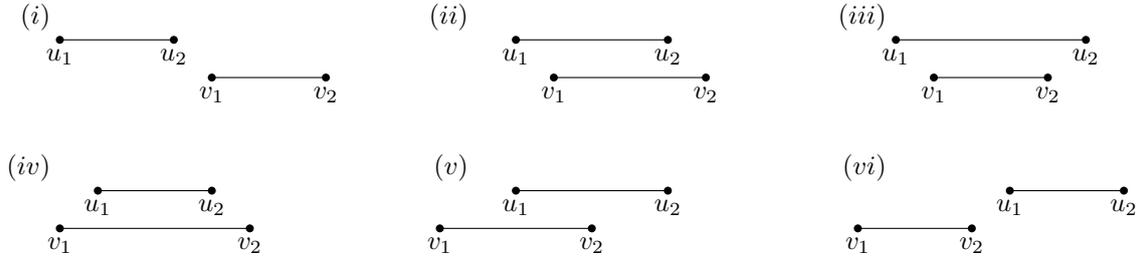


図 1: u_1, u_2, v_1, v_2 の大小関係

(i) $u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2$ のとき

$$\begin{aligned} M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) &= u_2 - u_2 - u_1 + u_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

(ii) $u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2$ のとき

$$\begin{aligned} M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) &= u_2 - v_1 - u_1 + u_1 \\ &= u_2 - v_1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(iii) $u_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq u_2$ のとき

$$\begin{aligned} M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) &= v_2 - v_1 - u_1 + u_1 \\ &= v_2 - v_1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(iv) $v_1 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_2$ のとき

$$\begin{aligned} M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) &= u_2 - v_1 - u_1 + v_1 \\ &= u_2 - u_1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(v) $v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2$ のとき

$$\begin{aligned} M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) &= v_2 - v_1 - u_1 + v_1 \\ &= v_2 - u_1 \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

(vi) $v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2$ のとき

$$\begin{aligned} M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) &= v_2 - v_1 - v_2 + v_1 \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上より, M -体積の式をまとめて書くと,

$$M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_1 \leq u_2 \leq v_1 \leq v_2 & - (i) \\ u_2 - v_1 & \text{if } u_1 \leq v_1 \leq u_2 \leq v_2 & - (ii) \\ v_2 - v_1 & \text{if } u_1 \leq v_1 \leq v_2 \leq u_2 & - (iii) \\ u_2 - u_1 & \text{if } v_1 \leq u_1 \leq u_2 \leq v_2 & - (iv) \\ v_2 - u_1 & \text{if } v_1 \leq u_1 \leq v_2 \leq u_2 & - (v) \\ 0 & \text{if } v_1 \leq v_2 \leq u_1 \leq u_2 & - (vi) \end{cases}$$

となる. よって, $M(u_2, v_2) - M(u_2, v_1) - M(u_1, v_2) + M(u_1, v_1) \geq 0$ が成り立つ. したがって $M(u, v) = \min(u, v)$ について, 定義 2.2 の条件 2 が成立する. ■

○ $W(u, v)$ について, 定義 2.2 の条件 2 が成立することの証明

次に, W -体積が非負であることを示す. W -体積は以下で表される.

$$W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) = \max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) \\ - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0)$$

例えば第一項を見ると,

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) = \begin{cases} u_2 + v_2 - 1 & \text{if } u_2 + v_2 - 1 \geq 0 \Leftrightarrow u_2 + v_2 \geq 1 \\ 0 & \text{if } u_2 + v_2 - 1 < 0 \Leftrightarrow u_2 + v_2 < 1 \end{cases}$$

であるため, $u_2 + v_2$ と 1 の大小関係を考えればよいことがわかる. 他の項についても同様に, $u_1 + v_1, u_1 + v_2, u_2 + v_1, u_2 + v_2$ と 1 の大小関係を考え, 場合分けを行えばよい. $0 \leq u_1 \leq u_2 \leq 1, 0 \leq v_1 \leq v_2 \leq 1$ のときについて考えているので,

$$u_1 + v_1 \leq u_1 + v_2 \leq u_2 + v_1 \leq u_2 + v_2 \\ u_1 + v_1 \leq u_2 + v_1 \leq u_1 + v_2 \leq u_2 + v_2$$

のいずれかの大小関係が成立している. 以下, $u_1 + v_1 \leq u_1 + v_2 \leq u_2 + v_1 \leq u_2 + v_2$ のときについて考えるが, 残りの一方についても同様の議論が成り立つ. $u_1 + v_1, u_1 + v_2, u_2 + v_1, u_2 + v_2$ と 1 の大小関係を考える, すなわち, 以下の不等式でどの \square に 1 が入るかの場合分けを行う.

$$\square \leq u_1 + v_1 \leq \square \leq u_1 + v_2 \leq \square \leq u_2 + v_1 \leq \square \leq u_2 + v_2 \leq \square$$

(i) 右から 1 番目の \square に 1 が入るとき $\Leftrightarrow u_2 + v_2 \leq 1$ のとき

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) = 0$$

(ii) 右から 2 番目の \square に 1 が入るとき $\Leftrightarrow u_2 + v_1 \leq 1 \leq u_2 + v_2$ のとき

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ = (u_2 + v_2 - 1) - 0 - 0 + 0 \\ \geq 0$$

(iii) 右から 3 番目の \square に 1 が入るとき $\Leftrightarrow u_1 + v_2 \leq 1 \leq u_2 + v_1$ のとき

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ = (u_2 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) - 0 + 0 \\ = v_2 - v_1 \\ \geq 0$$

(iv) 右から 4 番目の \square に 1 が入るとき $\Leftrightarrow u_1 + v_1 \leq 1 \leq u_1 + v_2$ のとき

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ = (u_2 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) - (u_1 + v_2 - 1) + 0 \\ = 1 - (u_1 + v_1) \\ \geq 0$$

(v) 右から 5 番目の \square に 1 が入るとき $\Leftrightarrow 1 \leq u_1 + v_1$ のとき

$$\max(u_2 + v_2 - 1, 0) - \max(u_2 + v_1 - 1, 0) - \max(u_1 + v_2 - 1, 0) + \max(u_1 + v_1 - 1, 0) \\ = (u_2 + v_2 - 1) - (u_1 + v_2 - 1) - (u_2 + v_1 - 1) + (u_1 + v_1 - 1) \\ = 0$$

以上より, W -体積の式をまとめて書くと,

$$W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) = \begin{cases} 0 & \text{if } u_2 + v_2 \leq 1 & \text{--- (i)} \\ u_2 + v_2 - 1 & \text{if } u_1 + v_2 \leq 1 \leq u_2 + v_2 & \text{--- (ii)} \\ u_2 - u_1 & \text{if } u_2 + v_1 \leq 1 \leq u_1 + v_2 & \text{--- (iii)} \\ 1 - (u_1 + v_1) & \text{if } u_1 + v_1 \leq 1 \leq u_2 + v_1 & \text{--- (iv)} \\ 0 & \text{if } 1 \leq u_1 + v_1 & \text{--- (v)} \end{cases}$$

となる. よって, $W(u_2, v_2) - W(u_2, v_1) - W(u_1, v_2) + W(u_1, v_1) \geq 0$ が成り立つ. したがって $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ について, 定義 2.2 の条件 2 が成立する. ■

【3】

次の 2 つのコピュラに対し, 定義 2.2 の条件 2 が成立することをそれぞれ示せ.

$$C_1(u, v) = \frac{uv}{u + v - uv}, \quad C_2(u, v) = \frac{uv}{(u^2 + v^2 - u^2v^2)^{1/2}}.$$

ヒント: 2 階導関数を用いる

(1) 定理 2.3 を用いて条件 2 が成立することを示す.

$$C_1^{[1,0]}(u, v) = \frac{v(u + v - uv) - uv(1 - v)}{(u + v - uv)^2} = \frac{v^2}{(u + v - uv)^2}$$

$$C_1^{[1,1]}(u, v) = \frac{2v(u + v - uv)^2 - 2v^2(u + v - uv)(1 - u)}{(u + v - uv)^4} = \frac{2uv\{u + v(1 - u)\}}{(u + v - uv)^4} \geq 0$$

最後の不等式は $0 \leq u, v \leq 1$ より成り立つ. また, 逆に逐次積分を行えば,

$$C(u, v) = \int_0^u \int_0^v C_1^{[1,1]}(s, t) dt ds$$

が成り立つため, C_1 に対して, 定義 2.2 の条件 2 が成立する.

同様にして,

$$C_2^{[1,0]}(u, v) = \frac{v(u^2 + v^2 - u^2v^2)^{1/2} - uv(u^2 + v^2 - u^2v^2)^{-1/2}(u - uv^2)}{u^2 + v^2 - u^2v^2} = \frac{v^3}{(u^2 + v^2 - u^2v^2)^{3/2}}$$

$$C_2^{[1,1]}(u, v) = \frac{3v^2(u^2 + v^2 - u^2v^2)^{3/2} - 3v^3(u^2 + v^2 - u^2v^2)^{1/2}v(1 - u^2)}{(u^2 + v^2 - u^2v^2)^3} = \frac{3u^2v^2}{\{u^2 + v^2(1 - u^2)\}^{5/2}} \geq 0$$

が成り立ち, また, 逆に逐次積分を行えば,

$$C(u, v) = \int_0^u \int_0^v C_2^{[1,1]}(s, t) dt ds$$

が成り立つため, C_2 に対して, 定義 2.2 の条件 2 が成立する. ■

【4】

任意のコピュラ C に対して, $\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + C(1 - u, 1 - v)$ はコピュラになることを示せ. また, $\overline{C}(u, v) = 1 - u - v + C(u, v)$ はコピュラにならないことを示せ.

(1) 定義 2.2 の条件 1 および条件 2 を満たすことを確認する. まず, 条件 1 について, C がコピュラであることに注意して計算する.

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u, 0) &= u - 1 + C(1 - u, 1) = u - 1 + 1 - u = 0, \\ \widehat{C}(0, v) &= v - 1 + C(1, 1 - v) = v - 1 + 1 - v = 0, \\ \widehat{C}(u, 1) &= u + C(1 - u, 0) = u, \\ \widehat{C}(1, v) &= v + C(0, 1 - v) = v. \end{aligned}$$

したがって、 \widehat{C} は条件 1 を満たす。次に条件 2 について、 $H = \widehat{C}(u_2, v_2) - \widehat{C}(u_2, v_1) - \widehat{C}(u_1, v_2) + \widehat{C}(u_1, v_1)$ とおくと、

$$\begin{aligned} H &= \widehat{C}(u_2, v_2) - \widehat{C}(u_2, v_1) - \widehat{C}(u_1, v_2) + \widehat{C}(u_1, v_1) \\ &= \{u_2 + v_2 - 1 + C(1 - u_2, 1 - v_2)\} - \{u_2 + v_1 - 1 + C(1 - u_2, 1 - v_1)\} \\ &\quad - \{u_1 + v_2 - 1 + C(1 - u_1, 1 - v_2)\} + \{u_1 + v_1 - 1 + C(1 - u_1, 1 - v_1)\} \\ &= C(1 - u_2, 1 - v_2) - C(1 - u_2, 1 - v_1) - C(1 - u_1, 1 - v_2) + C(1 - u_1, 1 - v_1) \end{aligned}$$

ここで、 $a_1 = 1 - u_2$, $a_2 = 1 - u_1$, $b_1 = 1 - v_2$, $b_2 = 1 - v_1$ とおくと、 $a_1 \leq a_2$, $b_1 \leq b_2$ が成り立つため、

$$\begin{aligned} H &= C(1 - u_2, 1 - v_2) - C(1 - u_2, 1 - v_1) - C(1 - u_1, 1 - v_2) + C(1 - u_1, 1 - v_1) \\ &= C(a_1, b_1) - C(a_1, b_2) - C(a_2, b_1) + C(a_2, b_2) \\ &\geq 0 \end{aligned}$$

したがって、 \widehat{C} は条件 2 を満たす。以上より、 \widehat{C} はコピュラとなる。

\overline{C} については、以下のように条件 1 を満たさないため、コピュラでない。

$$\begin{aligned} \overline{C}(u, 0) &= 1 - u + C(u, 0) = 1 - u, \\ \overline{C}(0, v) &= 1 - v + C(0, v) = 1 - v, \\ \overline{C}(u, 1) &= -u + C(u, 1) = 0, \\ \overline{C}(1, v) &= -v + C(1, v) = 0. \end{aligned}$$

一方、条件 2 は満たす。

$$\begin{aligned} &\overline{C}(u_2, v_2) - \overline{C}(u_2, v_1) - \overline{C}(u_1, v_2) + \overline{C}(u_1, v_1) \\ &= \{1 - u_2 - v_2 + C(u_2, v_2)\} - \{1 - u_2 - v_1 + C(u_2, v_1)\} \\ &\quad - \{1 - u_1 - v_2 + C(u_1, v_2)\} + \{1 - u_1 - v_1 + C(u_1, v_1)\} \\ &= C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \\ &\geq 0. \end{aligned}$$

【5】

以下の関数はコピュラである。

$$C(u, v) = uv \exp \{-(1 - u)(1 - v)\}.$$

(1) 次式をそれぞれ示せ。

$$\begin{aligned} C^{[1,0]}(u, v) &= \{v + uv(1 - v)\} \exp \{-(1 - u)(1 - v)\}, \\ C^{[1,1]}(u, v) &= \{1 + u + v - 3uv + u(1 - u)v(1 - v)\} \exp \{-(1 - u)(1 - v)\}. \end{aligned}$$

(2) 次式の値をそれぞれ求めよ。

$$C^{[1,1]}(0, 0) = 1/e, \quad C^{[1,1]}(0, 1) = 2 = C^{[1,1]}(1, 0), \quad C^{[1,1]}(1, 1) = 0.$$

(3) 生存コピュラが次式で与えられることを示せ。

$$\widehat{C}(u, v) = u + v - 1 + (1 - u)(1 - v) \exp(-uv) = uv - (1 - u)(1 - v) \{1 - \exp(-uv)\}.$$

(1) C を u で偏微分して、

$$\begin{aligned} C^{[1,0]}(u, v) &= v \exp \{-(1 - u)(1 - v)\} + uv \exp \{-(1 - u)(1 - v)\} (1 - v) \\ &= \{v + uv(1 - v)\} \exp \{-(1 - u)(1 - v)\} \end{aligned}$$

$C^{[1,0]}$ を v で偏微分して、

$$\begin{aligned} C^{[1,1]}(u, v) &= \{1 + u(1 - v) - uv\} \exp \{-(1 - u)(1 - v)\} \\ &\quad + \{v + uv(1 - v)\} \exp \{-(1 - u)(1 - v)\} (1 - u) \\ &= \{1 + u + v - 3uv + u(1 - u)v(1 - v)\} \exp \{-(1 - u)(1 - v)\} \end{aligned}$$

(2) それぞれ代入する.

$$C^{[1,1]}(0,0) = \exp(-1) = 1/e, \quad C^{[1,1]}(0,1) = 2\exp(0) = 2, \quad C^{[1,1]}(1,0) = 2, \quad C^{[1,1]}(1,1) = (3-3)\exp(0) = 0$$

(3) 生存コピュラの定義より, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} \widehat{C}(u,v) &= u + v - 1 + C(1-u, 1-v) \\ &= u + v - 1 + (1-u)(1-v) \exp[-\{1-(1-u)\}\{1-(1-v)\}] \\ &= u + v - 1 + (1-u)(1-v) \exp(-uv) \\ &= -(1-u-v+uv) + uv + (1-u)(1-v) \exp(-uv) \\ &= uv - (1-u)(1-v) \{1 - \exp(-uv)\} \end{aligned}$$

【6】

次式を示せ.

$$\begin{aligned} \int_0^u v(1-\log v) \exp(-\log s \log v) ds &= uv \exp(-\log u \log v), \\ \int_0^v (-\log st + \log s \log t) \exp(-\log s \log t) dt &= v(1-\log v) \exp(-\log s \log v). \end{aligned}$$

また, 以上の結果より, 次式を示せ.

$$uv \exp(-\log u \log v) = \int_0^u \int_0^v (-\log st + \log s \log t) \exp(-\log s \log t) dt ds.$$

(1) 以下の等式を用いて計算する.

$$a > 0, b > 0 \text{ について, } e^{-\log a \log b} = (e^{\log a})^{-\log b} = a^{-\log b}.$$

また, $0 < u, v \leq 1$ の範囲で考えて, $1 - \log v > 0$ であることに注意して,

$$\begin{aligned} \int_0^u v(1-\log v) \exp(-\log s \log v) ds &= v(1-\log v) \int_0^u s^{-\log v} ds \\ &= v(1-\log v) \left[\frac{1}{1-\log v} s^{1-\log v} \right]_0^u \\ &= vu^{1-\log v} \\ &= uv (e^{\log u})^{-\log v} \\ &= uv \exp(-\log u \log v) \end{aligned}$$

が成り立つ. 次に部分積分を用いる. t についての積分なので $\log s$ は定数である. $c = \log s$ とおくと, 以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} \int_0^v (-\log st + \log s \log t) \exp(-\log s \log t) dt &= \int_0^v (-c - \log t + c \log t) t^{-c} dt \\ &= \int_0^v \{-c - (1-c) \log t\} \left(\frac{t^{1-c}}{1-c} \right)' dt \\ &= \left[\{-c - (1-c) \log t\} \frac{t^{1-c}}{1-c} \right]_0^v + \int_0^v \frac{1-c}{t} \cdot \frac{t^{1-c}}{1-c} dt \\ &= \{-c - (1-c) \log v\} \frac{v^{1-c}}{1-c} + \left[\frac{t^{1-c}}{1-c} \right]_0^v \\ &= \{-c - (1-c) \log v + 1\} \frac{v^{1-c}}{1-c} \\ &= (1-\log v)v \cdot v^{-\log s} \\ &= v(1-\log v) \exp(-\log s \log v). \end{aligned}$$

以上の結果より,

$$\begin{aligned} uv \exp(-\log u \log v) &= \int_0^u v(1-\log v) \exp(-\log s \log v) ds \\ &= \int_0^u \int_0^v (-\log st + \log s \log t) \exp(-\log s \log t) dt ds \end{aligned}$$

が成り立つ.

【7】

下界コピュラと上界コピュラの間である $(W + M)/2$ がコピュラとなることを示せ.

より一般に、任意の2つのコピュラ C_1, C_2 について、係数の和が1となるような一次結合 $C_\alpha = \alpha C_1 + (1-\alpha)C_2$, $\alpha \in [0, 1]$ を考えると、 C_α もまたコピュラとなることを示す.

$$\begin{aligned} C_\alpha(u, 0) &= \alpha C_1(u, 0) + (1-\alpha)C_2(u, 0) = 0 \\ C_\alpha(0, v) &= \alpha C_1(0, v) + (1-\alpha)C_2(0, v) = 0 \\ C_\alpha(u, 1) &= \alpha C_1(u, 1) + (1-\alpha)C_2(u, 1) = \alpha u + (1-\alpha)u = u \\ C_\alpha(1, v) &= \alpha C_1(1, v) + (1-\alpha)C_2(1, v) = \alpha v + (1-\alpha)v = v \end{aligned}$$

以上より、 C_α は定義 2.2 の条件 1 を満たす.

$$\begin{aligned} &C_\alpha(u_2, v_2) - C_\alpha(u_2, v_1) - C_\alpha(u_1, v_2) + C_\alpha(u_1, v_1) \\ &= \alpha C_1(u_2, v_2) + (1-\alpha)C_2(u_2, v_2) - \{\alpha C_1(u_2, v_1) + (1-\alpha)C_2(u_2, v_1)\} \\ &\quad - \{\alpha C_1(u_1, v_2) + (1-\alpha)C_2(u_1, v_2)\} + \alpha C_1(u_1, v_1) + (1-\alpha)C_2(u_1, v_1) \\ &= \alpha \{C_1(u_2, v_2) - C_1(u_2, v_1) - C_1(u_1, v_2) + C_1(u_1, v_1)\} \\ &\quad + (1-\alpha) \{C_2(u_2, v_2) - C_2(u_2, v_1) - C_2(u_1, v_2) + C_2(u_1, v_1)\} \\ &\geq 0 \quad [\because \alpha \in [0, 1] \text{なので, } \alpha \geq 0, (1-\alpha) \geq 0] \end{aligned}$$

以上より、 C_α は定義 2.2 の条件 2 を満たすため C_α はコピュラである. ここで $C_1 = W, C_2 = M, \alpha = 1/2$ とおくと、題意が示される. ■

3章 解答

【1】

パラメータ $\theta > 0$ とコピュラ $C(u, v)$ に関する次の方程式

$$(\theta - 1) \{C(u, v)\}^2 - \{1 + (u + v)(\theta - 1)\} C(u, v) + \theta uv = 0, \quad 0 \leq u, v \leq 1.$$

を $C(u, v)$ について解くことを考える.

- (1) $\theta = 1$ のとき、解は独立コピュラ $C(u, v) = uv$ であることを示せ.
 (2) $\theta \neq 1$ のとき、解は次式であることを示せ.

$$C_\theta(u, v) = \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) \pm \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)}.$$

- (3) (2) の解がコピュラの条件を満足するか確かめる. 次式をそれぞれ示せ.

$$C_\theta(u, 0) = \frac{1 + (\theta - 1)u \pm \{1 + (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)}, \quad C_\theta(u, 1) = \frac{\theta + (\theta - 1)u \pm \{\theta - (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)}.$$

- (4) コピュラになるための条件 $C(u, 0) = 0, C(u, 1) = u$ が $C_\theta(u, 0)$ と $C_\theta(u, 1)$ それぞれについて、成立するか否か判定せよ.

- (1) 与えられた方程式に $\theta = 1$ を代入すると、 $-C(u, v) + uv = 0$ となるため、解は $C(u, v) = uv$ である. ■

- (2) $\theta \neq 1$ のとき、2次方程式の解の公式より、

$$C_\theta(u, v) = \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) \pm \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)}, \quad \text{--- ①}$$

が成り立つ.

(3) 式 ① に $v = 0$ を代入して,

$$C_{\theta}(u, 0) = \frac{1 + (\theta - 1)u \pm \sqrt{\{1 + (\theta - 1)u\}^2}}{2(\theta - 1)}$$

が成り立つ. 以下、根号の中身の正負について考える.

(i) $0 < \theta < 1$ のとき

$$\begin{aligned} -1 < \theta - 1 < 0 \\ -u < (\theta - 1)u < 0 \\ 0 \leq 1 - u < 1 + (\theta - 1)u \end{aligned}$$

が成り立つため、根号の中身は正である.

(ii) $\theta > 1$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < \theta - 1 \\ 1 < 1 + (\theta - 1)u \end{aligned}$$

が成り立つため、根号の中身は正である. (i),(ii) より,

$$C_{\theta}(u, 0) = \frac{1 + (\theta - 1)u \pm \{1 + (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)}$$

である.

同様に、① 式に $v = 1$ を代入して,

$$\begin{aligned} C_{\theta}(u, 1) &= \frac{\theta + (\theta - 1)u \pm \sqrt{\{1 + (u + 1)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)u}}{2(\theta - 1)} \\ &= \frac{\theta + (\theta - 1)u \pm \sqrt{\{\theta + (\theta - 1)u\}^2 - 4\theta(\theta - 1)u}}{2(\theta - 1)} \\ &= \frac{\theta + (\theta - 1)u \pm \sqrt{\{\theta - (\theta - 1)u\}^2}}{2(\theta - 1)} \quad [\because (a + b)^2 - 4ab = (a - b)^2] \end{aligned}$$

が成り立つ. 以下、根号の中身の正負について考える.

(i) $0 < \theta < 1$ のとき

$$\begin{aligned} 0 < -(\theta - 1)u \\ 0 < \theta < \theta - (\theta - 1)u \end{aligned}$$

が成り立つため、根号の中身は正である.

(ii) $\theta > 1$ のとき

$$\begin{aligned} u \leq 1 \\ (\theta - 1)u \leq (\theta - 1) \\ -(\theta - 1) \leq -(\theta - 1)u \\ 1 \leq \theta - (\theta - 1)u \end{aligned}$$

が成り立つため、根号の中身は正である. (i),(ii) より,

$$C_{\theta}(u, 1) = \frac{\theta + (\theta - 1)u \pm \{\theta - (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)}$$

である.

(4) 表記を簡単にするため、以下のように文字でおく.

$$C_{\theta}^{+}(u, v) = \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) + \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)},$$

$$C_{\theta}^{-}(u, v) = \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) - \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)}.$$

(3) の結果を用いて,

$$C_{\theta}^{+}(u, 0) = \frac{1 + (\theta - 1)u + \{1 + (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)} = \frac{1}{\theta - 1} + u \neq 0,$$

$$C_{\theta}^{+}(u, 1) = \frac{\theta + (\theta - 1)u + \{\theta - (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)} = \frac{\theta}{\theta - 1} \neq u,$$

であるため、 C_{θ}^{+} について条件 $C(u, 0) = 0, C(u, 1) = u$ が成立しない. 一方,

$$C_{\theta}^{-}(u, 0) = \frac{1 + (\theta - 1)u - \{1 + (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)} = 0,$$

$$C_{\theta}^{-}(u, 1) = \frac{\theta + (\theta - 1)u - \{\theta - (\theta - 1)u\}}{2(\theta - 1)} = u,$$

であるため、 C_{θ}^{-} について条件 $C(u, 0) = 0, C(u, 1) = u$ が成立する. ■

【2】

次式で与えられるブラケットコピュラが包括的であることを示す.

$$C_{\theta}(u, v) = \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) - \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)}, \quad \theta > 0.$$

- (1) $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}(u, v) = \min(u, v)$ を示せ.
(2) $\lim_{\theta \downarrow 0} C_{\theta}(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ を示せ.
(3) $\lim_{\theta \rightarrow 1} C_{\theta}(u, v) = uv$ を示せ.

(1) 式変形すると,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}(u, v) &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2(\theta - 1)} + \frac{u + v}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\theta - 1} + u + v \right)^2 - 4uv \frac{1}{1 - \frac{1}{\theta}}} \right\} \\ &= \frac{u + v}{2} - \frac{\sqrt{(u - v)^2}}{2}. \end{aligned}$$

以下、 u, v の大小関係で場合分けすると,

(i) $u \geq v$ のとき

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}(u, v) = \frac{u + v}{2} - \frac{\sqrt{(u - v)^2}}{2} = \frac{u + v}{2} - \frac{(u - v)}{2} = v.$$

(ii) $u \leq v$ のとき

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}(u, v) = \frac{u + v}{2} - \frac{\sqrt{(u - v)^2}}{2} = \frac{u + v}{2} - \frac{-(u - v)}{2} = u.$$

(i), (ii) より、 $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_{\theta}(u, v) = \min(u, v)$ が成り立つ. ■

(2) 式変形せずに極限をとると,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \downarrow 0} C_{\theta}(u, v) &= \lim_{\theta \downarrow 0} \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) - \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)} \\ &= \frac{1 - u - v - \sqrt{\{1 - u - v\}^2}}{-2} \\ &= \frac{u + v - 1 + \sqrt{\{u + v - 1\}^2}}{2}. \quad [\cdot (a - b)^2 = (b - a)^2] \end{aligned}$$

以下, $u + v - 1$ の正負で場合分けすると,

(iii) $u + v - 1 \geq 0$ のとき

$$\lim_{\theta \downarrow 0} C_\theta(u, v) = \frac{u + v - 1 + \sqrt{\{u + v - 1\}^2}}{2} = \frac{u + v - 1 + (u + v - 1)}{2} = u + v - 1.$$

(iv) $u + v - 1 \leq 0$ のとき

$$\lim_{\theta \downarrow 0} C_\theta(u, v) = \frac{u + v - 1 + \sqrt{\{u + v - 1\}^2}}{2} = \frac{u + v - 1 - (u + v - 1)}{2} = 0.$$

(iii), (iv) より, $\lim_{\theta \downarrow 0} C_\theta(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ が成り立つ. ■

(3) 分母と分子に $1 + (u + v)(\theta - 1) + \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}$ ($\neq 0$) をかけて,

$$\begin{aligned} \lim_{\theta \rightarrow 1} C_\theta(u, v) &= \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{1 + (u + v)(\theta - 1) - \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}}{2(\theta - 1)} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{4\theta(\theta - 1)uv}{2(\theta - 1) \left[1 + (u + v)(\theta - 1) + \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv} \right]} \\ &= \lim_{\theta \rightarrow 1} \frac{2\theta uv}{1 + (u + v)(\theta - 1) + \sqrt{\{1 + (u + v)(\theta - 1)\}^2 - 4\theta(\theta - 1)uv}} \\ &= \frac{2uv}{1 + (u + v)(1 - 1) + \sqrt{\{1 + (u + v)(1 - 1)\}^2 - 4\theta(1 - 1)uv}} \\ &= uv. \end{aligned}$$

【コラム 2】

ブラケットコピュラの式はやや複雑であるが, それが包括的であることから, 応用上用いられてきた. 例えば, 生存時間変数間の相関構造をモデル化するために, クレイトンコピュラやグンベルコピュラとともに用いられた (江村・大庭, 2024).

【3】

上のブラケットコピュラ $C_\theta(u, v)$ を考える.

(1) 次式を示せ.

$$C_\theta^{[1,0]}(u, v) = \frac{\theta v + (1 - \theta)C_\theta(u, v)}{1 + (\theta - 1)\{u + v - 2C_\theta(u, v)\}}.$$

(2) $C_\theta^{[1,0]}(u, v) = 1/2$ を v について解くと, 次のようになることを示せ.

$$v = \frac{1}{\theta + 1} + \frac{\theta - 1}{\theta + 1}u.$$

(3) 確率変数 (U, V) が $P(U \leq u, V \leq v) = C_\theta(u, v)$ を満足するとする. $U = u$ を所与としたときの V の条件付きメディアンを求めよ.

(1) ブラケットコピュラは次の方程式を満たす.

$$(\theta - 1)\{C_\theta(u, v)\}^2 - \{1 + (u + v)(\theta - 1)\}C_\theta(u, v) + \theta uv = 0.$$

両辺を u で微分して,

$$\begin{aligned}
 2(\theta - 1)C_\theta(u, v)C_\theta^{[1,0]}(u, v) &= (\theta - 1)C_\theta(u, v) + \{1 + (u + v)(\theta - 1)\}C_\theta^{[1,0]}(u, v) - \theta v \\
 \theta v - (\theta - 1)C_\theta(u, v) &= \{1 + (u + v)(\theta - 1) - 2(\theta - 1)C_\theta(u, v)\}C_\theta^{[1,0]}(u, v) \quad \text{--- ②} \\
 C_\theta^{[1,0]}(u, v) &= \frac{\theta v - (\theta - 1)C_\theta(u, v)}{1 + (u + v)(\theta - 1) - 2(\theta - 1)C_\theta(u, v)} \\
 C_\theta^{[1,0]}(u, v) &= \frac{\theta v + (1 - \theta)C_\theta(u, v)}{1 + (\theta - 1)\{u + v - 2C_\theta(u, v)\}}.
 \end{aligned}$$

(2) 式②に $C_\theta^{[1,0]}(u, v) = 1/2$ を代入して,

$$\begin{aligned}
 2\theta v - 2(\theta - 1)C_\theta(u, v) &= 1 + (u + v)(\theta - 1) - 2(\theta - 1)C_\theta(u, v) \\
 2\theta v &= 1 + u(\theta - 1) + v(\theta - 1) \\
 (1 + \theta)v &= 1 + (\theta - 1)u \\
 v &= \frac{1}{\theta + 1} + \frac{\theta - 1}{\theta + 1}u.
 \end{aligned}$$

(3) $U = u$ を所与とした V の条件付き分布は,

$$\begin{aligned}
 P(V \leq v | U = u) &= \frac{P(V \leq v, U = u)}{P(U = u)} \\
 &= \frac{\frac{\partial}{\partial u}P(V \leq v, U \leq u)}{\frac{\partial}{\partial u}P(U \leq u)} \\
 &= \frac{\frac{\partial C_\theta(u, v)}{\partial u}}{\frac{\partial}{\partial u}P(U \leq u)} \quad [\because U \text{ は一様分布なので, } P(U \leq u) = u] \\
 &= C_\theta^{[1,0]}(u, v),
 \end{aligned}$$

である (参照: 2.3 節). $U = u$ を所与とした V の条件付きメディアンを u の関数という意味で $m(u)$ とおく. $m(u)$ は $P(V \leq m(u) | U = u) = 1/2$ を満たすため, (2) の結果を用いて,

$$\begin{aligned}
 C_\theta^{[1,0]}(u, m(u)) &= \frac{1}{2} \\
 m(u) &= \frac{1}{\theta + 1} + \frac{\theta - 1}{\theta + 1}u.
 \end{aligned}$$

【4】

2×2 表におけるオッズ比が R のとき, ユールの連関係数 Q は次式で定義される:

$$Q = \frac{R - 1}{R + 1}.$$

- (1) $-1 < Q < 1$ を示せ.
- (2) ブラケットコンピュータにおける Q を求めよ.
- (3) クレイトンコンピュータにおける Q を求めよ.

(1) オッズ比は $p, q \in (0, 1)$ を用いて, $R = p(1 - q) / \{q(1 - p)\}$ で定義されるため, $R \in (0, \infty)$ である. Q を R で微分すると,

$$\frac{dQ}{dR} = \frac{2}{(R + 1)^2} > 0$$

なので, Q は R について単調増加である.

$$Q = 1 - \frac{2}{R + 1}$$

であるため, 極限を考えると $\lim_{R \downarrow 0} Q = -1, \lim_{R \rightarrow \infty} Q = 1$ となり, $-1 < Q < 1$ が成り立つ. 図2を見ると, $-1 < Q < 1$ であることが視覚的に確認できる.

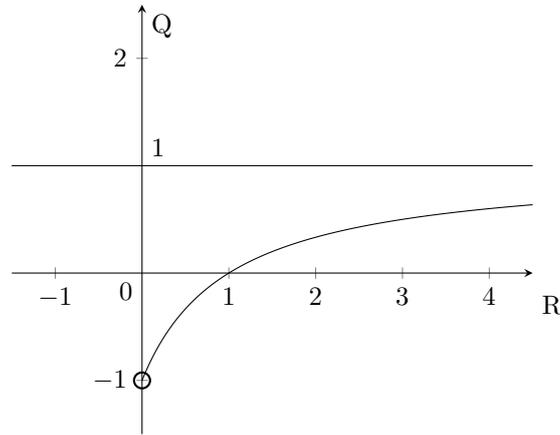


図 2: $Q = \frac{R-1}{R+1}$, $R > 0$ のグラフ

(2) ブラケットコピュラについて、オッズ比は $R = \theta$, $\theta \neq 1$ と定数で与えられ、

$$Q = \frac{\theta - 1}{\theta + 1}, \quad \theta > 0, \theta \neq 1.$$

(2) クレイトンコピュラについて、オッズ比（クロス比）は $R = \theta + 1$, $\theta > 0$ と定数で与えられ、

$$Q = \frac{\theta}{\theta + 2}, \quad \theta > 0.$$

4章 解答

【1】

2つのパラメータ $\alpha, \beta (0 \leq \alpha, \beta \leq 1)$ で定義される次のマーシャル・オルキンコピュラを考える。

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = \begin{cases} u^{1-\alpha}v & \text{if } u^\alpha \geq v^\beta \\ uv^{1-\beta} & \text{if } u^\alpha < v^\beta \end{cases}$$

このコピュラのケンドール順位相関を計算する。(1) ~ (3) をそれぞれ示せ。

(1)

$$C_{\alpha, \beta}^{[1,0]}(u, v)C_{\alpha, \beta}^{[0,1]}(u, v) = \begin{cases} (1-\alpha)u^{1-2\alpha}v & \text{if } u^\alpha \geq v^\beta \\ (1-\beta)uv^{1-2\beta} & \text{if } u^\alpha < v^\beta \end{cases}$$

(2)

$$\int_0^1 \int_0^1 C_{\alpha, \beta}^{[1,0]}(u, v)C_{\alpha, \beta}^{[0,1]}(u, v) dudv = \frac{1}{4} - \frac{\alpha\beta}{4(\alpha + \beta - \alpha\beta)}$$

(3)

$$\tau_{\alpha, \beta} = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}$$

(1) $u^\alpha \geq v^\beta$ のとき

$$C_{\alpha, \beta}^{[1,0]}(u, v)C_{\alpha, \beta}^{[0,1]}(u, v) = (1-\alpha)u^{-\alpha}v \cdot u^{1-\alpha} = (1-\alpha)u^{1-2\alpha}v.$$

$u^\alpha < v^\beta$ のとき

$$C_{\alpha, \beta}^{[1,0]}(u, v)C_{\alpha, \beta}^{[0,1]}(u, v) = v^{1-\beta}(1-\beta)uv^{-\beta} = (1-\beta)uv^{1-2\beta}.$$

(2) (1) の結果より, 領域 $A = \{(u, v) \mid u^\alpha \geq v^\beta, 0 \leq u, v \leq 1\}$, $B = \{(u, v) \mid u^\alpha < v^\beta, 0 \leq u, v \leq 1\}$ を考えて,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 C_{\alpha, \beta}^{[1,0]}(u, v) C_{\alpha, \beta}^{[0,1]}(u, v) dudv &= \iint_A (1 - \alpha) u^{1-2\alpha} v dudv + \iint_B (1 - \beta) uv^{1-2\beta} dudv \\ &= \int_0^1 du \int_0^{u^{\frac{\alpha}{\beta}}} \{(1 - \alpha) u^{1-2\alpha} v\} dv \\ &\quad + \int_0^1 du \int_{u^{\frac{\alpha}{\beta}}}^1 \{(1 - \beta) uv^{1-2\beta}\} dv \\ &= \frac{1 - \alpha}{2} \int_0^1 u^{1-2\alpha + \frac{2\alpha}{\beta}} du + \frac{1}{2} \int_0^1 u \left(1 - u^{\frac{2\alpha}{\beta} - 2\alpha}\right) du \\ &= \frac{1 - \alpha}{2} \left[\frac{u^{2-2\alpha + \frac{2\alpha}{\beta}}}{2 \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \right]_0^1 + \frac{1}{2} \left[\frac{u^2}{2} - \frac{u^{2-2\alpha + \frac{2\alpha}{\beta}}}{2 \left(1 - \alpha + \frac{\alpha}{\beta}\right)} \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{4} - \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}. \end{aligned}$$

(3) 定理 4.2 および (2) の結果より,

$$\tau_{\alpha, \beta} = 1 - 4 \int_0^1 \int_0^1 C_{\alpha, \beta}^{[1,0]}(u, v) C_{\alpha, \beta}^{[0,1]}(u, v) dudv = \frac{\alpha\beta}{\alpha + \beta - \alpha\beta}.$$

【2】

スピアマン順位相関係数の一致確率 $P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0)$ について (1) ~ (3) を示せ.

(1) 常に $Y = X$ となる場合,

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) = P(X_2 < X_1, X_3 < X_1) + P(X_1 < X_2, X_1 < X_3) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} = \frac{2}{3}.$$

ヒント：3つの数 X_1, X_2, X_3 の並べ方は全部で6通りであることに注意する

(2) 常に $Y = -X$ となる場合,

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) = P(X_2 < X_1 < X_3) + P(X_3 < X_1 < X_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}.$$

(3) $F(x) = P(X \leq x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} P(X_2 < X_1, X_3 < X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x)\}^2 dF(x) = \frac{1}{3}, \\ P(X_1 < X_2, X_1 < X_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - F(x)\}^2 dF(x) = \frac{1}{3}, \\ P(X_2 < X_1 < X_3) &= P(X_3 < X_1 < X_2) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \{1 - F(x)\} dF(x) = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

(1) 常に $Y = X$ となる場合, $P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) = P((X_1 - X_2)(X_1 - X_3) > 0)$. X_1, X_2, X_3 の大小関係について考えると, 以下の表の6通りである. それぞれの事象が同様に確からしいため, $(X_1 - X_2)(X_1 - X_3)$ の符号が正となる場合を考えて,

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) = P((X_1 - X_2)(X_1 - X_3) > 0) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

大小関係	$X_1 - X_2$ の符号	$X_1 - X_3$ の符号	$(X_1 - X_2)(X_1 - X_3)$ の符号
$X_1 < X_2 < X_3$	-	-	+
$X_1 < X_3 < X_2$	-	-	+
$X_2 < X_1 < X_3$	+	-	-
$X_2 < X_3 < X_1$	+	+	+
$X_3 < X_1 < X_2$	-	+	-
$X_3 < X_2 < X_1$	+	+	+

(2) 常に $Y = -X$ となる場合,

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) = P((X_1 - X_2)(-X_1 + X_3) > 0) = P((X_1 - X_2)(X_1 - X_3) < 0).$$

X_1, X_2, X_3 の大小関係について考えると, (1) と同様に 6 通りであり, それぞれの事象は同様に確からしい. $(X_1 - X_2)(X_1 - X_3)$ の符号が負となる場合を考えて,

$$\begin{aligned} P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) &= P((X_1 - X_2)(X_1 - X_3) < 0) \\ &= P(X_2 < X_1 < X_3) + P(X_3 < X_1 < X_2) \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

(3) X_1, X_2, X_3 が互いに独立な場合を考えていることに注意する.

$$\begin{aligned} P(X_2 < X_1, X_3 < X_1) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_2 < x, X_3 < x \mid X_1 = x)P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_2 < x)P(X_3 < x)P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x)\}^2 dF(x) \\ &= \left[\frac{1}{3} \{F(x)\}^3 \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

同様に,

$$\begin{aligned} P(X_1 < X_2, X_1 < X_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x < X_2, x < X_3 \mid X_1 = x)P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(x < X_2)P(x < X_3)P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - P(X_2 < x)\} \{1 - P(X_3 < x)\} P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{1 - F(x)\}^2 dF(x) \\ &= \left[-\frac{1}{3} \{1 - F(x)\}^3 \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_2 < X_1 < X_3) &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_2 < x < X_3 \mid X_1 = x)P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} P(X_2 < x) \{1 - P(X_3 < x)\} P(X_1 = x) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} F(x) \{1 - F(x)\} dF(x) \\ &= \left[\frac{1}{2} \{F(x)\}^2 - \frac{1}{3} \{F(x)\}^3 \right]_{-\infty}^{\infty} \\ &= \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

対称性より,

$$P(X_3 < X_1 < X_2) = P(X_2 < X_1 < X_3) = \frac{1}{6}.$$

【3】

連続型の確率変数 (X, Y) がコピュラ C を用いて $P(X \leq x, Y \leq y) = C(F(x), G(y))$ と表せるとする. (X, Y) と同じ分布を持つ三つの独立な組を $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), (X_3, Y_3)$ とおく. (1) ~ (3) をそれぞれ示せ.

(1)

$$\begin{aligned} & P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0) \\ &= 2P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - 1 \\ &= 4P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) - 1. \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned} P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) &= P(F(X_1) > F(X_2), G(Y_1) > G(Y_3)) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 uvC(du, dv) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} \rho &= 3\{P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)\} \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \\ &= 12 \int_0^1 \int_0^1 uvC(du, dv) - 3. \end{aligned}$$

(1) 与えられている確率変数はいずれも連続型なので,

$$P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0) = 1 - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0).$$

また, X_1, X_2 および Y_1, Y_3 はそれぞれ互いに独立で同一分布に従うため,

$$P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) = P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_3).$$

以上より,

$$\begin{aligned} & P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0) \\ &= 2P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - 1 \\ &= 2\{P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) + P(X_1 < X_2, Y_1 < Y_3)\} - 1 \\ &= 4P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) - 1. \end{aligned}$$

(2) $i, j \in \{1, 2, 3\}$ に対して, $U_i = F(X_i), V_j = G(Y_j)$ とおく.

$$\begin{aligned} P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) &= P(F(X_1) > F(X_2), G(Y_1) > G(Y_3)) \quad [:\cdot: F, G \text{ は増加関数}] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 P(U_2 < u, V_3 < v \mid U_1 = u, V_1 = v) P(U_1 \in [u, u + du], V_1 \in [v, v + dv]) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \Pi(u, v) C(du, dv) \quad [:\cdot: U_2 \text{ と } V_3 \text{ は独立なので } P(U_2 < u, V_3 < v) = \Pi(u, v)] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) \Pi(du, dv) \quad [:\cdot: \text{定理4.3}] \\ &= \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv. \quad [:\cdot: \Pi \text{ は絶対連続なので, } \Pi(du, dv) = \Pi^{[1,1]}(u, v) dudv] \end{aligned}$$

(3) これまでの結果を用いて,

$$\begin{aligned}
\rho &= 3 \{P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) > 0) - P((X_1 - X_2)(Y_1 - Y_3) < 0)\} \quad [\because \text{定義4.3}] \\
&= 12P(X_1 > X_2, Y_1 > Y_3) - 3 \quad [\because (1) \text{の結果}] \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 C(u, v) dudv - 3 \quad [\because (2) \text{の結果}] \\
&= 12 \int_0^1 \int_0^1 uvC(du, dv) - 3.
\end{aligned}$$

【4】

次式で与えられるコピュラは一般化 FGM コピュラである (3.3 節).

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = uv \{1 + \alpha(1 - u)^\beta(1 - v)^\beta\}, \quad 0 \leq u, v \leq 1,$$

ここに, $-1 \leq \alpha \leq \{(\beta + 1)/(\beta - 1)\}^{\beta-1}$, $\beta \geq 1$ とする.

(1) 次のスピアマン順位相関の式を導出せよ.

$$\rho_{\alpha, \beta} = \frac{12\alpha}{(\beta + 1)^2(\beta + 2)^2}.$$

(2) 適当な値 β を固定し, $\rho_{\alpha, \beta}$ のグラフを描け (α を横軸, $\rho_{\alpha, \beta}$ を縦軸とする).

(3) 一般化 FGM コピュラの $\rho_{\alpha, \beta}$ の範囲は, 通常の FGM コピュラよりも広いか議論せよ.

(1) コピュラ密度を計算する. まず, u で偏微分すると

$$C_{\alpha, \beta}^{[1, 0]}(u, v) = v \{1 + \alpha(1 - u)^\beta(1 - v)^\beta\} + uv \{-\alpha\beta(1 - u)^{\beta-1}(1 - v)^\beta\}.$$

さらに, v で偏微分して

$$\begin{aligned}
C_{\alpha, \beta}^{[1, 1]}(u, v) &= 1 + \alpha(1 - u)^\beta(1 - v)^\beta + v \{-\alpha\beta(1 - u)^\beta(1 - v)^{\beta-1}\} + u \{-\alpha\beta(1 - u)^{\beta-1}(1 - v)^\beta\} \\
&\quad + uv \{\alpha\beta^2(1 - u)^{\beta-1}(1 - v)^{\beta-1}\} \\
&= 1 + \alpha(1 - u)^{\beta-1}(1 - v)^{\beta-1} \{(1 - u)(1 - v) - \beta(1 - u)v - \beta u(1 - v) + \beta^2 uv\} \\
&= 1 + \alpha(1 - u)^{\beta-1}(1 - v)^{\beta-1} \{1 - (\beta + 1)u\} \{1 - (\beta + 1)v\}.
\end{aligned}$$

したがって, 与えられたコピュラは絶対連続なので定理 4.5 より,

$$\rho_{\alpha, \beta} = 12 \int_0^1 \int_0^1 uvC_{\alpha, \beta}^{[1, 1]}(u, v) dudv - 3.$$

ここで, 上の式の二重積分について解くと,

$$\begin{aligned}
&\int_0^1 \int_0^1 uvC_{\alpha, \beta}^{[1, 1]}(u, v) dudv \\
&= \int_0^1 \int_0^1 [uv + \alpha u(1 - u)^{\beta-1}v(1 - v)^{\beta-1} \{1 - (\beta + 1)u\} \{1 - (\beta + 1)v\}] dudv \\
&= \left(\int_0^1 u du \right)^2 + \alpha \left(\int_0^1 u(1 - u)^{\beta-1} \{1 - (\beta + 1)u\} du \right)^2.
\end{aligned}$$

$x = 1 - u$ と置換すると, $u = 1 - x, dx = -du$ であり, u と x の対応は次のようになるので, $\begin{array}{l|l} u & 0 \rightarrow 1 \\ x & 1 \rightarrow 0 \end{array}$

$$\begin{aligned}
\int_0^1 u(1 - u)^{\beta-1} \{1 - (\beta + 1)u\} du &= \int_1^0 -(1 - x)x^{\beta-1} \{1 - (\beta + 1)(1 - x)\} dx \\
&= \int_0^1 \{-\beta x^{\beta-1} + (2\beta + 1)x^\beta - (\beta + 1)x^{\beta+1}\} dx \\
&= \left[-x^\beta + \frac{2\beta + 1}{\beta + 1}x^{\beta+1} - \frac{\beta + 1}{\beta + 2}x^{\beta+2} \right]_0^1 \\
&= -\frac{1}{(\beta + 1)(\beta + 2)}.
\end{aligned}$$

元の式に代入して,

$$\begin{aligned}\rho_{\alpha,\beta} &= 12 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\alpha}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2} \right\} - 3 \\ &= \frac{12\alpha}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2}.\end{aligned}$$

(2) $\beta = 2$ のとき, $\rho_{\alpha,\beta} = \rho_{\alpha,2} = \alpha/12$ であり, $-1 \leq \alpha \leq 2$ であるため, グラフは図 3 のようになる.

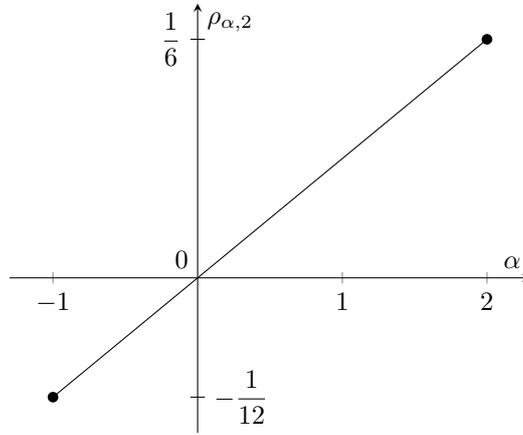


図 3: $\rho_{\alpha,2}$ のグラフ

(3) 通常の FGM コピュラのスピアマン順位相関係数の範囲は $-1/3 \leq \rho_\theta \leq 1/3$ である. 一般化 FGM コピュラのスピアマン順位相関係数の範囲について考える. α の範囲の不等式の辺々に $12/\{(\beta+1)^2(\beta+2)^2\}$ をかけて,

$$\begin{aligned}-1 \leq \alpha \leq \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\beta-1} \\ -\frac{12}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2} \leq \rho_{\alpha,\beta} \leq \frac{12}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2} \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\beta-1}.\end{aligned}$$

$$f_L(\beta) = -\frac{12}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2},$$

$$f_U(\beta) = \frac{12}{(\beta+1)^2(\beta+2)^2} \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\beta-1}$$

とおく. f_L を β で微分して増減表をかくと以下のようになる.

β	1	...
f'_L		+
f_L	$-\frac{1}{3}$	↗

また, f_U を β で微分すると,

$$f'_U = \left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right)^{\beta-1} \frac{12}{(\beta+1)^3(\beta+2)^3} \left\{ (\beta^2 + 3\beta + 2) \log\left(\frac{\beta+1}{\beta-1}\right) - 6\beta - 10 \right\}.$$

式の形が複雑なので, $f'_U(\beta) = 0$ を直接求めるのは大変そうに思える. 今, $f'_U(\beta) = 0$ の解そのものではなく, 解の有無に興味があるので, 以下のように平均値の定理を用いて考える. $\beta > 1$ であるため, f'_U の符号は $(\beta^2 + 3\beta + 2) \log((\beta+1)/(\beta-1)) - 6\beta - 10$ の符号と一致する. $g(\beta) = (\beta^2 + 3\beta + 2) \log((\beta+1)/(\beta-1)) - 6\beta - 10$ とおく. $\beta > 1$ で定義されているため, 1 に近い数字として 1.1 を選び, もう一方の数字として適当に 2 を選ぶと,

$$g(1.1) = 6.51 \times \log(21) - 16.6 > 0,$$

$$g(2) = 12 \times \log(3) - 22 < 0$$

である。定義域内で $((\beta + 1)/(\beta - 1))^{\beta - 1} > 0, 1/((\beta + 1)^3(\beta + 2)^3) > 0$ であるため、

$$f'_U(1.1) = \left(\frac{1.1 + 1}{1.1 - 1}\right)^{1.1 - 1} \frac{12}{(1.1 + 1)^3(1.1 + 2)^3} \cdot g(1.1) > 0,$$

$$f'_U(2) = \left(\frac{2 + 1}{2 - 1}\right)^{2 - 1} \frac{12}{(2 + 1)^3(2 + 2)^3} \cdot g(2) < 0$$

が成り立つ。したがって平均値の定理より、ある $\beta_0 \in (1.1, 2)$ が存在して、 $f'_U(\beta_0) = 0$ が成り立つ。増減表は以下のようにかける。

β	1	...	β_0	...
f'_U		+	0	-
f_U	$\frac{1}{3}$	\nearrow	$f_U(\beta_0)$	\searrow

したがって、

$$-\frac{1}{3} \leq \rho_{\alpha, \beta} \leq f_U(\beta_0)$$

である。 $1/3 < f_U(\beta_0)$ であることは増減表から分かるが、具体的な数値にも興味がある。R 言語の uniroot 関数で $f'_U(\beta_0) = 0$ の解を求めると、 $\beta_0 \approx 1.19$ と分かる (参照: 図 4)。最大値は $f_U(1.19) \approx 0.391$ と計算できる。

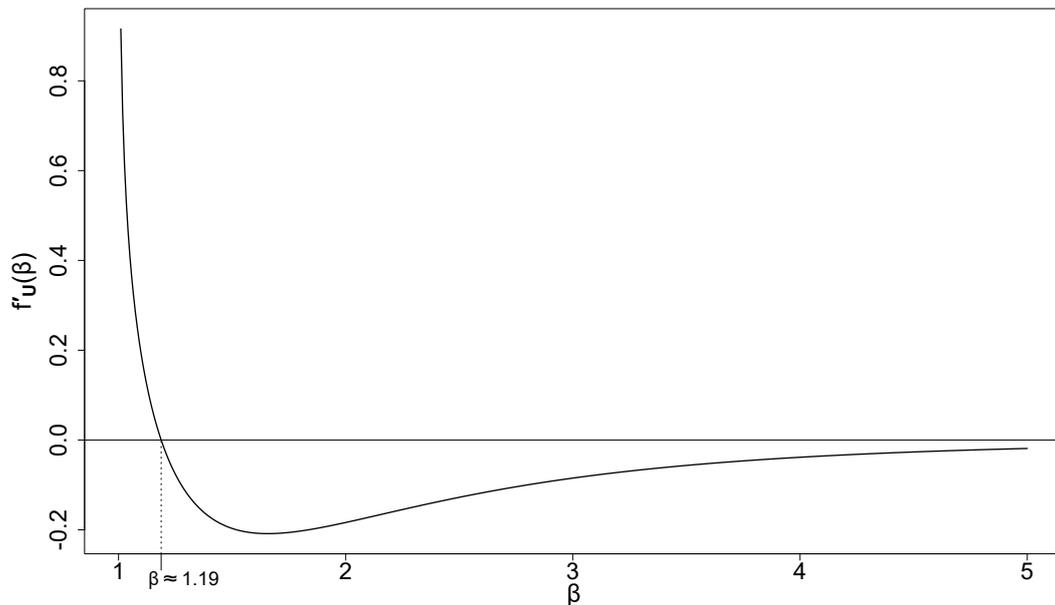


図 4: $f'_U(\beta)$ のグラフ

また、通常の FGM コピュラのスピアマン順位相関係数の範囲は $-1/3 \leq \rho_\theta \leq 1/3$ である。比較すると下限は同じであるが、上限については一般化 FGM コピュラの方がおよそ 0.058 大きい。したがって、一般化 FGM コピュラの $\rho_{\alpha, \beta}$ の範囲の方が広い。

【5】

【4】と同様、次式も一般化 FGM コピュラである (3.3 節)。

$$C_{\alpha, \beta}(u, v) = uv \{1 + \alpha(1 - u^\beta)(1 - v^\beta)\}, \quad 0 \leq u, v \leq 1$$

ここに、 $-1/\beta^2 \leq \alpha \leq 1/\beta, \beta \geq 1$ とする。【4】と同様に (1) ~ (3) に答えよ。ただし、

$$\rho_{\alpha, \beta} = \frac{3\alpha\beta^2}{(\beta + 2)^2}$$

である。

(1) コピュラ密度を計算する. まず, u で偏微分すると

$$C_{\alpha,\beta}^{[1,0]}(u,v) = v \{1 + \alpha(1 - u^\beta)(1 - v^\beta)\} + uv \{-\alpha\beta u^{\beta-1}(1 - v^\beta)\}.$$

さらに, v で偏微分して

$$\begin{aligned} C_{\alpha,\beta}^{[1,1]}(u,v) &= 1 + \alpha(1 - u^\beta)(1 - v^\beta) + v \{-\alpha\beta(1 - u^\beta)v^{\beta-1}\} + u \{-\alpha\beta u^{\beta-1}(1 - v^\beta)\} \\ &\quad + uv \{\alpha\beta^2 u^{\beta-1} v^{\beta-1}\} \\ &= 1 + \alpha \{1 - (\beta + 1)u^\beta - (\beta + 1)v^\beta + (\beta + 1)^2 u^\beta v^\beta\} \\ &= 1 + \alpha \{1 - (\beta + 1)u^\beta\} \{1 - (\beta + 1)v^\beta\}. \end{aligned}$$

したがって, 与えられたコピュラは絶対連続なので定理 4.5 より,

$$\rho_{\alpha,\beta} = 12 \int_0^1 \int_0^1 uv C_{\alpha,\beta}^{[1,1]}(u,v) dudv - 3.$$

ここで, 上の式の二重積分について解くと,

$$\begin{aligned} &\int_0^1 \int_0^1 uv C_{\alpha,\beta}^{[1,1]}(u,v) dudv \\ &= \int_0^1 \int_0^1 [uv + \alpha u \{1 - (\beta + 1)u^\beta\} v \{1 - (\beta + 1)v^\beta\}] dudv \\ &= \left(\int_0^1 u du \right)^2 + \alpha \left(\int_0^1 \{u - (\beta + 1)u^{\beta+1}\} du \right)^2. \end{aligned}$$

第 2 項の中身の積分について,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \{u - (\beta + 1)u^{\beta+1}\} du &= \left[\frac{u^2}{2} - \frac{\beta + 1}{\beta + 2} u^{\beta+2} \right]_0^1 \\ &= -\frac{\beta}{2(\beta + 2)}. \end{aligned}$$

元の式に代入して,

$$\begin{aligned} \rho_{\alpha,\beta} &= 12 \left\{ \frac{1}{4} + \frac{\alpha\beta^2}{4(\beta + 2)^2} \right\} - 3 \\ &= \frac{3\alpha\beta^2}{(\beta + 2)^2}. \end{aligned}$$

(2) $\beta = 2$ のとき, $\rho_{\alpha,\beta} = \rho_{\alpha,2} = 3\alpha/4$ であり, $-1/4 \leq \alpha \leq 1/2$ であるため, グラフは図 5 のようになる.

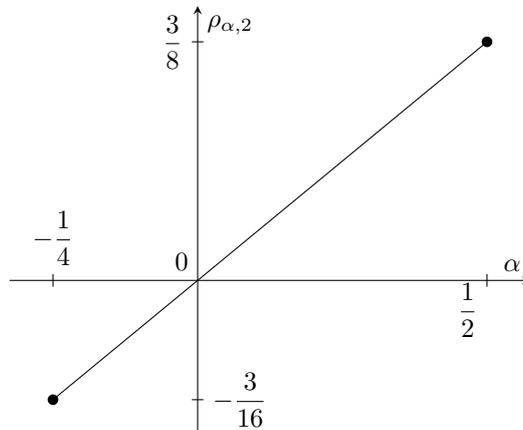


図 5: $\rho_{\alpha,2}$ のグラフ

(3) 一般化 FGM コピュラのスピアマン順位相関係数の範囲について考える. α の範囲の不等式の辺々に $3\beta^2/(\beta+2)^2$ をかけて,

$$-\frac{1}{\beta^2} \leq \alpha \leq \frac{1}{\beta}$$

$$-\frac{3}{(\beta+2)^2} \leq \rho_{\alpha,\beta} \leq \frac{3\beta}{(\beta+2)^2}.$$

$f_L(\beta) = -3/(\beta+2)^2, f_U(\beta) = 3\beta^2/(\beta+2)^2$ とおく. $\beta \geq 1$ に注意して, それぞれ β で微分して増減表をかくと以下のようになる.

β	1	...	β	1	...	$\frac{2}{\sqrt{3}}$...
f'_L		+	f'_U		+	0	-
f_L	$-\frac{1}{3}$	\nearrow	f_U	$\frac{1}{3}$	\nearrow	$\frac{6\sqrt{3}-9}{4}$	\searrow

したがって,

$$-\frac{1}{3} \leq \rho_{\alpha,\beta} \leq \frac{6\sqrt{3}-9}{4} \approx 0.348$$

である. また, 通常の FGM コピュラのスピアマン順位相関係数の範囲は $-1/3 \leq \rho_\theta \leq 1/3$ である. 比較すると下限は同じであるが, 上限については一般化 FGM コピュラの方がおよそ 0.015 大きい. したがって, 一般化 FGM コピュラの $\rho_{\alpha,\beta}$ の範囲の方が広い. ■

5章 解答

【1】

生成素関数 $\phi(t)$ は 2 階微分可能で次を満足するとする:

$$\phi'(t) = \frac{d\phi(t)}{dt} < 0, \quad \phi''(t) = \frac{d^2\phi(t)}{dt^2} > 0, \quad t \in [0, 1].$$

- (1) 任意の $\beta \geq 1$ に対して, $\{\phi(t)\}^\beta$ も生成素であることを示せ.
 (2) 任意の $\alpha \in (0, 1]$ に対して, $\phi(t^\alpha)$ も生成素になることを示せ.

定理 5.2 の (条件 I) および (条件 II) を満たすことを示す.

(1) 定義域および値域は変わらず, $\{\phi(1)\}^\beta = 0^\beta = 0$ が成り立つため, (条件 I) を満たす.

$$\frac{\partial \{\phi(t)\}^\beta}{\partial t} = \beta \{\phi(t)\}^{\beta-1} \phi'(t) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \{\phi(t)\}^\beta}{\partial t^2} = \beta \{\phi(t)\}^{\beta-2} [(\beta-1) \{\phi'(t)\}^2 + \phi(t)\phi''(t)] > 0$$

が成り立つため, (条件 II) を満たす. ■

(2) 定義域および値域は変わらず, $\phi(1^\alpha) = \phi(1) = 0$ が成り立つため, (条件 I) を満たす. $\alpha = 1$ のとき $\phi(t)$ となり生成素であるので, 以下 $\alpha \in (0, 1)$ で考える.

$$\frac{\partial \phi(t^\alpha)}{\partial t} = \alpha t^{\alpha-1} \phi'(t^\alpha) < 0,$$

$$\frac{\partial^2 \phi(t^\alpha)}{\partial t^2} = \alpha t^{\alpha-1} \phi''(t^\alpha) + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} \phi'(t^\alpha) > 0$$

が成り立つため, (条件 II) を満たす. ■

【2】

次式のテイラー展開 ($x = 0$ の周りの展開) を導出せよ.

$$-\log(1-x) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{x^z}{z}.$$

また, 次式が成立することを示せ.

$$\frac{1}{\theta} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z} (1 - e^{-\theta})^z = 1, \quad \frac{1}{\theta} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z} [e^{-s}(1 - e^{-\theta})]^z = -\frac{1}{\theta} \log[1 - e^{-s}(1 - e^{-\theta})].$$

$\log(1+x)$ のテイラー展開 ($x = 0$ の周りの展開) は

$$\log(1+x) = \sum_{z=1}^{\infty} (-1)^{z-1} \frac{x^z}{z}$$

であるので, x を $-x$ に置き換えて

$$\begin{aligned} \log(1-x) &= \sum_{z=1}^{\infty} (-1)^{z-1} \frac{(-x)^z}{z} \\ &= \sum_{z=1}^{\infty} -\frac{x^z}{z}. \end{aligned}$$

したがって,

$$-\log(1-x) = \sum_{z=1}^{\infty} \frac{x^z}{z}. \quad \text{--- ③}$$

式 ③ で x に $1 - e^{-\theta}$ を代入すると,

$$\begin{aligned} -\log(e^{-\theta}) &= \sum_{z=1}^{\infty} \frac{(1 - e^{-\theta})^z}{z} \\ 1 &= \frac{1}{\theta} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z} (1 - e^{-\theta})^z. \end{aligned}$$

一方, 式 ③ で x に $e^{-s}(1 - e^{-\theta})$ を代入すると,

$$\begin{aligned} -\log(1 - e^{-s}(1 - e^{-\theta})) &= \sum_{z=1}^{\infty} \frac{\{e^{-s}(1 - e^{-\theta})\}^z}{z} \\ -\frac{1}{\theta} \log[1 - e^{-s}(1 - e^{-\theta})] &= \frac{1}{\theta} \sum_{z=1}^{\infty} \frac{1}{z} [e^{-s}(1 - e^{-\theta})]^z. \end{aligned}$$

【3】

セレビオル・クアドラス (Celebioglu-Cuadras) コピュラは

$$C_{\theta}(u, v) = uv \times \exp\{\theta(1-u)(1-v)\}, \quad \theta \in [-1, 1]$$

で定義される. (1), (2) を示せ.

(1)

$$C_{\theta}(u, C_{\theta}(v, w)) = uvw \times \exp\{\theta\{(1-v)(1-w) + (1-u)(1 - vwe^{\theta(1-v)(1-w)})\}\}$$

(2) 結合律が成立する条件が次式であることを示せ.

$$(1-u)(1 - we^{\theta(1-u)(1-w)}) = (1-w)(1 - ue^{\theta(1-v)(1-w)}).$$

また, $C_{\theta}(u, v)$ がアルキメデスコピュラかどうか判定せよ.

(1) 順番に計算する.

$$\begin{aligned} C_\theta(u, C_\theta(v, w)) &= uC_\theta(v, w) \exp \{ \theta(1-u)(1-C_\theta(v, w)) \} \\ &= uvw \exp \{ \theta(1-v)(1-w) \} \exp \left[\theta(1-u)(1-vwe^{\theta(1-v)(1-w)}) \right] \\ &= uvw \exp \left[\theta \left\{ (1-v)(1-w) + (1-u)(1-vwe^{\theta(1-v)(1-w)}) \right\} \right]. \end{aligned}$$

(2)

○ 結合律が成立する条件

$A = \theta(1-v)(1-w), B = \theta(1-u)(1-v)$ とおくと,

$$C_\theta(u, C_\theta(v, w)) = uvw \exp \left[\theta \left\{ (1-v)(1-w) + (1-u)(1-vwe^A) \right\} \right],$$

$$C_\theta(C_\theta(u, v), w) = uvw \exp \left[\theta \left\{ (1-u)(1-v) + (1-w)(1-uve^B) \right\} \right].$$

$C_\theta(C_\theta(u, v), w) = C_\theta(u, C_\theta(v, w))$ を解いて,

$$\begin{aligned} (1-v)(1-w) + (1-u)(1-vwe^A) &= (1-u)(1-v) + (1-w)(1-uve^B) \\ vw - vwe^A + uvwe^A &= uv - uve^B + uvwe^B \\ (1-u)(1-we^B) &= (1-w)(1-ue^A) \end{aligned}$$

となるため, 結合律が成立する条件は $(1-u)(1-we^{\theta(1-u)(1-w)}) = (1-w)(1-ue^{\theta(1-v)(1-w)})$ である.

○ C_θ がアルキメデスコピュラかどうかの判定

$\theta = 0$ のとき, $C_\theta(u, v) = uv = \Pi(u, v)$ であり, これは生成素 $\phi(t) = -\log t$ によって生成されるので, アルキメデスコピュラである. 以下, $\theta \in (-1, 0) \vee (0, 1)$ で考える.

あるコピュラが結合律を満たし, かつ, $C(u, u) < u, u \in (0, 1)$ が成り立つとき, そのコピュラはアルキメデスコピュラである. $C_\theta(u, v)$ について, $C_\theta(u, u) = u^2 \exp \{ \theta(1-u)^2 \}$ が成り立つ.

$$C_\theta(u, u) < u \Leftrightarrow u \exp \{ \theta(1-u)^2 \} < 1$$

であるため, 以下 $u \exp \{ \theta(1-u)^2 \} < 1$ が成り立つか否かを確認する. $f(u) = u \exp \{ \theta(1-u)^2 \}$ とおくと,

$$f'(u) = \{ 1 - 2\theta u(1-u) \} \exp \{ \theta(1-u)^2 \}$$

である. $\exp(\cdot)$ は正なので, $f'(u)$ の符号は $1 - 2\theta u(1-u)$ の符号と一致する.

$$f'(u) > 0 \Leftrightarrow 1 - 2\theta u(1-u) > 0 \Leftrightarrow \theta < \frac{1}{2u(1-u)}$$

が成り立つ. $u(1-u) = -(u-1/2)^2 + 1/4 \leq 1/4$ を用いて,

$$2 \leq \frac{1}{2u(1-u)}$$

であるため, 今考えている θ の範囲では常に $f'(u) > 0$ が成り立ち, 増減表は以下のように書ける.

u	0	...	1
$f'(u)$		+	
$f(u)$	0	↗	1

増減表より, $f(u) < 1 \Leftrightarrow C_\theta(u, u) < u$ が成り立つ.

以上より, 結合律を満たす $((1-u)(1-we^{\theta(1-u)(1-w)}) = (1-w)(1-ue^{\theta(1-v)(1-w)})$ が成り立つ) ような θ について, $C_\theta(u, v)$ はアルキメデスコピュラである.

【4】

連続型確率変数 X は非負の値のみをとると仮定する. X の平均に関する次式を示せ.

$$E(X) = \int_0^{\infty} P(X > x) dx.$$

さらに, 次で定義されるロマックス分布 (Lomax distribution) は有限の平均を持たないことを示せ.

$$P(X > x) = \frac{1}{1 + \theta x}, \quad x \geq 0, \quad \theta > 0.$$

部分積分を用いて示す.

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} x f(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} x \{F(x)\}' dx \\ &= [xF(x)]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} F(x) dx \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} x - \int_0^{\infty} F(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} 1 dx - \int_0^{\infty} F(x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \{1 - F(x)\} dx. \\ &= \int_0^{\infty} P(X > x) dx. \end{aligned}$$

— ④

式 ④ を用いてロマックス分布の平均を計算すると,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^{\infty} P(X > x) dx \\ &= \int_0^{\infty} \frac{1}{1 + \theta x} dx \\ &= \left[\frac{1}{\theta} \log(1 + \theta x) \right]_0^{\infty} \\ &= \infty \end{aligned}$$

と発散するため, ロマックス分布は有限の平均を持たない.

【コラム 3】

ロマックス分布が有限の平均を持たないのは, “裾の重い分布” だからである. よって, 母集団がこのような分布に従うデータにおいては, 期待値や分散を計算しても, 母集団に対して有益な情報は得られない.

下のパレート I 型分布でも同様である. 詳細は, (武富・山本, 2023) を参照されたい.

【5】

確率変数 X は 1 以上の値のみを取ると仮定する. このとき, 次式で定義されるパレート I 型分布 (Pareto type I distribution) は有限の平均を持たないことを示せ.

$$P(X > x) = \frac{1}{x}, \quad x \geq 1.$$

さらに, 次式で定義される分布は有限の平均を持たないことを示せ.

$$P(X > x) = \frac{1}{1 + \theta \log x}, \quad x \geq 1, \quad \theta > 0.$$

1以上の値のみを取る確率変数 X について、平均を求める。

$$\begin{aligned}
 E(X) &= \int_1^{\infty} x f(x) dx \\
 &= \int_1^{\infty} x \{F(x)\}' dx \\
 &= [xF(x)]_1^{\infty} - \int_1^{\infty} F(x) dx \\
 &= \lim_{x \rightarrow \infty} x - \int_1^{\infty} F(x) dx \\
 &= \int_1^{\infty} 1 dx + 1 - \int_1^{\infty} F(x) dx \\
 &= 1 + \int_1^{\infty} P(X > x) dx.
 \end{aligned}$$

— ⑤

式 ⑤ を用いてパレート I 型分布の平均を計算すると、

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 + \int_1^{\infty} P(X > x) dx \\
 &= 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{x} dx \\
 &= 1 + [\log x]_1^{\infty} \\
 &= \infty
 \end{aligned}$$

と発散するため、パレート I 分布は有限の平均を持たない。

同様に、与えられた分布の平均は以下のように表される。

$$\begin{aligned}
 E(X) &= 1 + \int_1^{\infty} P(X > x) dx \\
 &= 1 + \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \theta \log x} dx.
 \end{aligned}$$

ここで $x \geq 1, \theta > 0$ より、

$$\frac{1}{1 + \theta \log x} - \frac{1}{1 + \theta x} = \frac{\theta(x - \log x)}{(1 + \theta \log x)(1 + \theta x)} > 0$$

であるため、

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \theta x} dx < \int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \theta \log x} dx$$

が成り立つ。追い出しの原理より、

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{1 + \theta \log x} dx = \infty.$$

したがって、与えられた分布は有限の平均を持たない。

【6】

フランクコピュラにおいて、極限值 $\theta \rightarrow -\infty, \theta \rightarrow 0, \theta \rightarrow \infty$ がコピュラ W, Π, M にそれぞれ対応していることを示せ。

○ $\theta \rightarrow -\infty$ のとき

Nelsen(2006) の Theorem 4.4.7. より、

$$\lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\phi_{\theta}(s)}{\phi'_{\theta}(t)} = s - 1$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\phi_\theta(s)}{\phi'_\theta(t)} &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{-\log\left(\frac{e^{-\theta s} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)}{\frac{1 - e^{\theta t}}{\theta}} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\frac{s(e^\theta - 1) - e^{\theta s} + 1}{(e^\theta - 1)(e^{\theta s} - 1)}}{\frac{e^{\theta t}(1 - \theta t) - 1}{(e^{\theta t} - 1)^2}} \quad [\because \text{ロピタルの定理}] \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{(e^{\theta t} - 1)^2 \{s(e^\theta - 1) - e^{\theta s} + 1\}}{(e^\theta - 1)(e^{\theta s} - 1) \{e^{\theta t}(1 - \theta t) - 1\}} \\
 &= \frac{(-1)^2(-s + 1)}{(-1)^3} \\
 &= s - 1.
 \end{aligned}$$

したがって、フラクコピュラにおいて $\lim_{\theta \rightarrow -\infty} C_\theta = W$ が成り立つ.

○ $\theta \rightarrow 0$ のとき

II の生成素は $\phi(t) = -\log t$ で表されるので,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \phi_\theta(t) = -\log t$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1} &= \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{-te^{-\theta t}}{-e^{-\theta}} \quad [\because \text{ロピタルの定理}] \\
 &= t
 \end{aligned}$$

であるため、フラクコピュラにおいて $\lim_{\theta \rightarrow 0} \phi_\theta(t) = -\log t$ が成り立つ.

○ $\theta \rightarrow \infty$ のとき

Nelsen(2006) の Theorem 4.4.8. より,

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\phi_\theta(t)}{\phi'_\theta(t)} = 0$$

を示せばよい.

$$\begin{aligned}
 \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\phi_\theta(t)}{\phi'_\theta(t)} &= \lim_{\theta \rightarrow -\infty} \frac{\log\left(\frac{e^{-\theta t} - 1}{e^{-\theta} - 1}\right)}{\frac{1 - e^{\theta t}}{\theta}} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{\frac{t(e^\theta - 1) - e^{\theta t} + 1}{(e^\theta - 1)(e^{\theta t} - 1)}}{\frac{e^{\theta t}(1 - \theta t) - 1}{(e^{\theta t} - 1)^2}} \quad [\because \text{ロピタルの定理}] \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{(e^{\theta t} - 1) \{t(e^\theta - 1) - e^{\theta t} + 1\}}{(e^\theta - 1) \{e^{\theta t}(1 - \theta t) - 1\}} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{t(1 - e^{-\theta} - e^{\theta(t-1)} + e^{-\theta})}{1 - e^{-\theta}} \cdot \frac{1 - e^{-\theta t}}{(1 - \theta t) - e^{-\theta t}} \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

したがって、フラクコピュラにおいて $\lim_{\theta \rightarrow \infty} C_\theta = M$ が成り立つ.

【7】

下界コピュラ $W(u, v) = \max(u + v - 1, 0)$ は対称律と結合律を満たすことを示せ. さらに, 結合律について次式を示せ.

$$W(W(u, v), w) = \max(u + v + w - 2, 0) = W(u, W(v, w)).$$

○ $W(u, v)$ が対称律を満たすことの証明

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0) = \max(v + u - 1, 0) = W(v, u).$$

したがって、下界コピュラは対称律を満たすことが示された。 ■

○ $W(u, v)$ が結合律を満たすことの証明

$$\begin{aligned} W(W(u, v), w) &= \max(W(u, v) + w - 1, 0) \\ &= \max(\max(u + v - 1, 0) + w - 1, 0) \\ &= \max(\max(u + v + w - 2, w - 1), 0) \quad [:\max(a, b) + c = \max(a + c, b + c)] \\ &= \max(u + v + w - 2, 0) \quad [:\max(\max(a, b), c) = \max(a, b, c) \text{ かつ } w - 1 \leq 0]. \end{aligned}$$

同様に、

$$\begin{aligned} W(u, W(v, w)) &= \max(u + W(v, w) - 1, 0) \\ &= \max(u + \max(v + w - 1, 0) - 1, 0) \\ &= \max(\max(u + v + w - 2, u - 1), 0) \\ &= \max(u + v + w - 2, 0). \end{aligned}$$

以上より、下界コピュラは結合律を満たすことが示された。 ■

6章 解答

【1】

3変量コピュラ $C(u_1, u_2, u_3)$ の2次元周辺分布関数

$C_{12}(u_1, u_2) = C(u_1, u_2, 1)$, $C_{13}(u_1, u_3) = C(u_1, 1, u_3)$, $C_{23}(u_2, u_3) = C(1, u_2, u_3)$ はすべてコピュラになることを示せ。

まず、定義 6.3 条件 1 を用いて以下の等式が成り立つ。

$$\begin{aligned} C_{12}(u_1, 0) &= C(u_1, 0, 1) = 0 \\ C_{12}(0, u_2) &= C(0, u_2, 1) = 0 \\ C_{12}(u_1, 1) &= C(u_1, 1, 1) = u_1 \\ C_{12}(1, u_2) &= C(1, u_2, 1) = u_2 \end{aligned}$$

したがって、 C_{12} について定義 2.2 の条件 1 が成り立つ。 C_{13}, C_{23} についても同様。

次に、定義 6.3 の条件 2 の不等式において、 $w_1 = 0, w_2 = 1$ とすると、

$$\begin{aligned} 0 &\leq C(u_2, v_2, 1) - C(u_2, v_2, 0) - C(u_2, v_1, 1) - C(u_1, v_2, 1) \\ &\quad + C(u_2, v_1, 0) + C(u_1, v_2, 0) + C(u_1, v_1, 1) - C(u_1, v_1, 0) \\ &= C(u_2, v_2, 1) - C(u_2, v_1, 1) - C(u_1, v_2, 1) + C(u_1, v_1, 1) \\ &= C_{12}(u_2, v_2) - C_{12}(u_2, v_1) - C_{12}(u_1, v_2) + C_{12}(u_1, v_1) \end{aligned}$$

したがって、 C_{12} について定義 2.2 の条件 2 が成り立つ。 C_{13}, C_{23} についても同様。

定義 2.2 の条件 1 および条件 2 を満たすため、 C_{12}, C_{13}, C_{23} はすべてコピュラである。 ■

【2】

n 変量コピュラ C と, $0 \leq a_i \leq b_i \leq 1$ に対して

$$C(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_n)$$

を示せ. また

$$C(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \leq u_i$$

を示せ.

ヒント：定義 6.2 の条件を使う

○ 1 つ目の不等式

定義 6.2 の条件 2 より $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ に対して, $0 \leq u_i \leq 1$ のとき, 以下が成り立つ.

$$\Delta_0^{u_1} \dots \Delta_0^{u_{i-1}} \Delta_{a_i}^{b_i} \Delta_0^{u_{i+1}} \dots \Delta_0^{u_n} C(v_1, \dots, v_n) \geq 0, \quad \forall (v_1, \dots, v_n) \in [0, 1]^n$$

不等式の左辺について, 定義 6.2 の条件 1: $C(u_1, \dots, u_{i-1}, 0, u_{i+1}, \dots, u_n) = 0$ を用いて, 帰納的に以下のように計算できる.

$$\begin{aligned} & \Delta_0^{u_1} \dots \Delta_0^{u_{i-1}} \Delta_{a_i}^{b_i} \Delta_0^{u_{i+1}} \dots \Delta_0^{u_n} C(v_1, \dots, v_n) \\ &= \Delta_0^{u_1} \dots \Delta_0^{u_{i-1}} \Delta_{a_i}^{b_i} \Delta_0^{u_{i+1}} \dots \Delta_0^{u_{n-1}} \{C(v_1, \dots, v_{n-1}, u_n) - C(v_1, \dots, v_{n-1}, 0)\} \\ &= \Delta_0^{u_1} \dots \Delta_0^{u_{i-1}} \Delta_{a_i}^{b_i} \Delta_0^{u_{i+1}} \dots \Delta_0^{u_{n-1}} C(v_1, \dots, v_{n-1}, u_n) \\ &= \Delta_0^{u_1} \dots \Delta_0^{u_{i-1}} \Delta_{a_i}^{b_i} C(v_1, \dots, v_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ &= \Delta_0^{u_1} \dots \Delta_0^{u_{i-1}} \{C(v_1, \dots, v_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_n) - C(v_1, \dots, v_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_n)\} \\ &= C(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_n) - C(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \end{aligned}$$

したがって,

$$C(u_1, \dots, u_{i-1}, a_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \leq C(u_1, \dots, u_{i-1}, b_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \quad \text{--- ⑥}$$

が成り立つ. ■

○ 2 つ目の不等式

不等式 ⑥ が成り立つので, 他の変数をすべて固定すれば, n 変量コピュラは任意の 1 変数について非減少である. したがって, 以下の不等式が成り立つ.

$$\begin{aligned} & C(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_n) \\ & \leq C(u_1, \dots, u_{i-1}, u_i, u_{i+1}, \dots, u_{n-1}, 1) \quad [\because u_n \leq 1 \text{ より, 不等式 ⑥ を用いて}] \\ & \leq C(1, \dots, 1, u_i, 1, \dots, 1) \quad [\because u_i \text{ 以外の変数についても同様にして}] \\ & \leq u_i \quad [\because \text{定義 6.2 の条件 2}] \end{aligned}$$

【3】

次式がコピュラでないことを示せ.

$$C(u_1, u_2, u_3) = \max\{u_1 + u_2 + u_3 - 2, 0\}.$$

ヒント： $C(1, 1, 1) = 1$, $C(1, 1, 1/2) = 1/2$, $C(1, 1/2, 1/2) = C(1/2, 1/2, 1/2) = 0$ を用いる

定義 6.3 の条件 2 の不等式の左辺について, $u_1 = v_1 = w_1 = 1/2, u_2 = v_2 = w_2 = 1$ を代入して計算すると,

$$\begin{aligned} & C(1, 1, 1) - C(1, 1, 1/2) - C(1, 1/2, 1) - C(1/2, 1, 1) \\ & \quad + C(1, 1/2, 1/2) + C(1/2, 1, 1/2) + C(1/2, 1/2, 1) - C(1/2, 1/2, 1/2) \\ &= 1 - 1/2 - 1/2 - 1/2 + 0 + 0 + 0 - 0 \\ &= -1/2. \end{aligned}$$

したがって、与えられた 3 変量関数は定義 6.3 の条件 2 を満たさないためコピュラではない。

【4】

標準正規分布の分布関数 $\Phi(x)$ と、多変量標準正規分布の分布関数 $\Phi_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n)$ について (1) ~ (3) に答えよ。

(1) 次式を示せ。

$$\frac{d\Phi^{-1}(u)}{du} = \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u))}.$$

(2) 次式を示せ。

$$\frac{\partial^n \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} = \frac{\varphi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1)) \times \cdots \times \varphi(\Phi^{-1}(u_n))}.$$

(3) $\mathbf{x}^T = (\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))$ とおき、次式を示せ。

$$\frac{\varphi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1)) \times \cdots \times \varphi(\Phi^{-1}(u_n))} = \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{x}\right).$$

多変量正規コピュラを微分し、多変量正規コピュラ密度関数を求める問題である (参照: 定義 6.4).

(1) $x = \Phi^{-1}(u)$ とおくと、 $u = \Phi(x)$ が成り立つ。両辺を x で微分して、

$$\begin{aligned} \frac{du}{dx} &= \frac{d\Phi(x)}{dx} \\ \frac{dx}{du} &= \frac{1}{\varphi(x)} \\ \frac{d\Phi^{-1}(u)}{du} &= \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u))}. \end{aligned}$$

(2) $x_i = \Phi^{-1}(u_i)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \frac{\partial^n \Phi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} &= \frac{\partial^n \Phi_{\mathbf{R}}(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_1 \cdots \partial x_n} \cdot \frac{\partial \Phi^{-1}(u_1) \cdots \partial \Phi^{-1}(u_n)}{\partial u_1 \cdots \partial u_n} \\ &= \varphi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n)) \cdot \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1))} \times \cdots \times \frac{1}{\varphi(\Phi^{-1}(u_n))} \quad [\because (1) \text{の結果}] \\ &= \frac{\varphi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1)) \times \cdots \times \varphi(\Phi^{-1}(u_n))}. \end{aligned}$$

(3) 分子は多変量標準正規分布 $N(\mathbf{0}, \mathbf{R})$ に従う確率変数の確率密度関数であり、分母は単変量標準正規分布に従う確率変数の確率密度関数の総積であるため、以下のように計算できる。ただし、 \mathbf{I} は n 次元単位行列である。

$$\begin{aligned} \frac{\varphi_{\mathbf{R}}(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_n))}{\varphi(\Phi^{-1}(u_1)) \times \cdots \times \varphi(\Phi^{-1}(u_n))} &= \frac{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x}\right)}{\frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sqrt{\det(\mathbf{I})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{I}^{-1} \mathbf{x}\right)} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left\{-\frac{1}{2} (\mathbf{x}^T \mathbf{R}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{x}^T \mathbf{I} \mathbf{x})\right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\det(\mathbf{R})}} \exp\left(-\frac{1}{2} \mathbf{x}^T (\mathbf{R}^{-1} - \mathbf{I}) \mathbf{x}\right). \end{aligned}$$

【5】

自由度 $\nu \rightarrow \infty$ のとき, t -分布の密度関数は標準正規分布の密度関数に収束することを示せ. すなわち,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

を示せ.

ヒント: 十分大きい数 n に対するスターリング近似 (Stirling's approximation)

$$\Gamma(n) \approx \sqrt{\frac{2\pi}{n}} \left(\frac{n}{e}\right)^n.$$

を用いる

スターリング近似を用いて, 十分大きい ν について以下が成り立つ.

$$\begin{aligned} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}} &\approx \frac{\sqrt{\frac{4\pi}{\nu+1}} \left(\frac{\nu+1}{2e}\right)^{\nu/2} \left(\frac{\nu+1}{2e}\right)^{1/2}}{\sqrt{\frac{4\pi}{\nu}} \left(\frac{\nu}{2e}\right)^{\nu/2} \sqrt{\nu\pi}} \\ &= \left(1 + \frac{1}{\nu}\right)^{\nu/2} \left(\frac{1}{e}\right)^{1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \\ &\rightarrow e^{1/2} e^{-1/2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \quad (\nu \rightarrow \infty) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left\{ \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\nu/2} + \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-1/2} \right\} \\ &= \lim_{\nu \rightarrow \infty} \left[\left\{ 1 - \frac{2}{\nu} \cdot \left(-\frac{t^2}{2}\right) \right\}^{-\nu/2} + \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-1/2} \right] \\ &= \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \end{aligned}$$

以上より,

$$\lim_{\nu \rightarrow \infty} \frac{\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)\sqrt{\nu\pi}} \left(1 + \frac{t^2}{\nu}\right)^{-\frac{\nu+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right)$$

が成り立つ. ■

参考文献

1. 江村剛志, 古川恭治. (2024). フレイルティモデル —生存分析におけるハザードのランダム効果—. 計量生物学, 45(2), 215-245.
2. 江村剛志, 大庭幸治. (2024). 生存時間変数に対する代替性評価—メタアナリシスアプローチ—. 計量生物学, 45(1), 67-85.
3. 武富奈菜美, 山本和嬉. (2023). 生存時間解析・信頼性解析のための統計モデル. 日本統計学会誌, 52(2), 69-112.
4. Nelsen, R.B. (2006). *An Introduction to Copulas*(2nd ed.). Springer.