

1

演習問題の解答例

2 章

[1] 固定点と 2 周期解

$$f(x) = \frac{19}{6}x(1-x)$$

固定点を求めるために $f(x) = x$ を解くと $x = 0$ と $13/19$ が得られ、これらの点での f の傾きはそれぞれ $f'(0) = 19/6$, $f'(13/19) = -7/6$. いずれも絶対値が 1 より大きいので不安定. 次に, 2 周期解を求めるために $f^2(x) = f(f(x)) = x$ を解くと, $x = 0, 10/19, 13/19, 15/19$ が得られる. うち $x = 0$ と $x = 13/19$ は固定点 (1 周期点) で, 2 周期解に対応するのは $x = 10/19, 15/19$. これらの点での $df^2(x)/dx$ の傾きは $11/36$ なので 2 周期解は線形安定.

[2] サークル写像の分岐ダイアグラム

$\Omega = 0.1$ として数値計算すると, 図 1.1 のような図が得られる. $\theta = 0$ と $\theta = 1$ は同じ点を表すことに注意. $K < K_c = 2\pi\Omega \simeq 0.628$ までは固定点が存在せず, その後, $K = K_c$ で生じた安定固定点が周期倍分岐を経てカオス状態に至る.

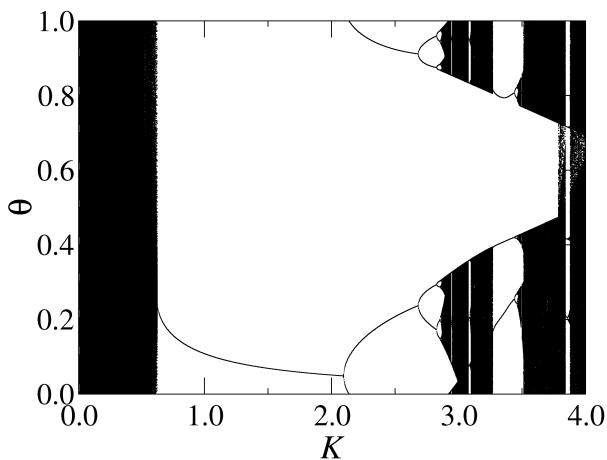


図 1.1 サークル写像の分岐ダイアグラム. $\Omega = 0.1$.

[3] 相関関数

Bernoulli 写像の相関関数は

$$C(m) = \int_0^1 x(2^m x \bmod 1) dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \frac{1}{2^{|m|}}$$

となる. ここで, 自己相関関数の計算には, $m \geq 1$ のとき

$$2^m x \bmod 1 = \begin{cases} 2^m x & (0 \leq x < 1/2^m), \\ 2^m x - 1 & (1/2^m \leq x < 2/2^m), \\ \vdots & \\ 2^m x - (m-1) & ((2^m - 1)/2^m \leq x < 1), \end{cases}$$

より

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x(2^m x \bmod 1) dx &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \int_{j/(2^m)}^{(j+1)/(2^m)} x(2^m x - j) dx \\
 &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \left(2^m \left[\frac{x^3}{3} \right]_{j/(2^m)}^{(j+1)/(2^m)} - j \left[\frac{x^2}{2} \right]_{j/(2^m)}^{(j+1)/(2^m)} \right) \\
 &= \sum_{j=0}^{2^m-1} \left(\frac{1}{3} \frac{(j+1)^3 - j^3}{2^{2m}} - \frac{j}{2} \frac{(j+1)^2 - j^2}{2^{2m}} \right) \\
 &= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{2^m-1} \left(\frac{1}{3} + \frac{j}{2} \right) = \frac{1}{2^{2m}} \left(\frac{2^m}{3} + \frac{1}{2} \frac{2^m(2^m-1)}{2} \right) \\
 &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12} \frac{1}{2^m}
 \end{aligned}$$

となることを使った.

テント写像の相関関数は

$$C(m) = \int_0^1 x f^m(x) dx - \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \delta_{m,0}$$

と計算される. ここで, テント写像については, $m \geq 1$ のときに

$$\begin{aligned}
 \int_0^1 x f^m(x) dx &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(x + \frac{1}{2} \right) f^m \left(x + \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= \int_{-1/2}^{1/2} x f^m \left(x + \frac{1}{2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_{-1/2}^{1/2} f^m \left(x + \frac{1}{2} \right) dx \\
 &= 0 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}
 \end{aligned}$$

であり (右辺第 1 項の積分は被積分関数が奇関数なので消え, 右辺第 2 項の積分はテント写像の合成写像 $f^m(x)$ のグラフの三角形の面積の合計が常に $1/2$ であるため $1/2$ となる), また $m = 0$ なら $f^0(x) = x$ なので

$$\int_0^1 x f^0(x) dx = \int_0^1 x^2 dx = \frac{1}{3}$$

となることを使った. 詳しくは Schuster[5], 藤坂ら [9]などを参照.

3 章

[1] 複数の固定点を持つ 1 次元系

例えば $f(x) = a(x+2)(x+1)x(x-1)(x-2)$ ($a \neq 0$) という形のベクトル場はそのような例となっている. グラフを描けば分かるように, 固定点 $x = -2$ が安定となるためには $a < 0$. このとき, $x = -1$ は不安定, $x = 0$ は安定, $x = 1$ は不安定, $x = 2$ は安定となる.

[2] 5 次項を含む亜臨界分岐の標準形の固定点

5 次項を加えたベクトル場は $f(x) = \mu x + x^3 - x^5$. 原点 $x = 0$ にずっと存在する固定点は, $f'(0) = \mu$ なので, $\mu < 0$ で線形安定, $\mu > 0$ で不安定. 5 次項によって新たに現れた一番外側にあるふたつの安定な固定点は $-1/4 \leq \mu$ の範囲で存在し, それらの位置は $x_{\pm}^o = \pm\sqrt{(1 + \sqrt{1 + 4\mu})/2}$. 傾きは $f'(x_{\pm}^o) = -(4\mu + 1) - \sqrt{4\mu + 1} < 0$ なので $\mu > -1/4$ で線形安定. 一方, もともと $\mu \leq 0$ の範囲で $x = \pm\sqrt{-\mu}$ に存在していたふたつの不安定な固定点は, $-1/4 \leq \mu \leq 0$ の範囲でしか存在しなくなり, それらの位置は $x_{\pm}^i = \pm\sqrt{(1 - \sqrt{1 + 4\mu})/2}$ となる. 傾きは $f'(x_{\pm}^i) = -(4\mu + 1) + \sqrt{4\mu + 1}$ なので, $-1/4 < \mu < 0$ で線形安定, $\mu > 0$ で不安定. これらの安定な固定点と不安定な固定点 (x_+^o と x_+^i , x_-^o と x_-^i) は, $\mu = -1/4$ でサドルノード分岐によって対消滅 (生成) する.

[3] FitzHugh-南雲モデルの固定点の安定性

原点における FitzHugh-南雲モデルのベクトル場の Jacobi 行列は

$$J = \begin{pmatrix} -a & -1 \\ \epsilon & -\epsilon\gamma \end{pmatrix}$$

なので, トレースは $\tau = \text{Tr } J = -a - \epsilon\gamma$, 行列式は $\Delta = \det J = \epsilon(a\gamma + 1)$ と

なり, $\tau < 0$ かつ $\Delta > 0$ なら原点は線形安定である.

[4] ローレンツモデルの発散

ローレンツモデルのベクトル場の発散は,

$$\begin{aligned}\operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= \frac{\partial}{\partial X}[\sigma(-Y + X)] + \frac{\partial}{\partial Y}(-XZ + rX - Y) + \frac{\partial}{\partial Z}(XY - bZ) \\ &= -(\sigma + 1 + b) < 0\end{aligned}$$

と計算できるので, 縮小率は $\sigma + 1 + b$. これは X, Y, Z によらず負の一定の値をとるので, 相空間内にとった領域 A の体積は

$$\frac{d}{dt}V(t) = -(\sigma + 1 + b) \int_A dv = -(\sigma + 1 + b)V(t)$$

と指数関数的に単調に縮小する.

[5] レスラーモデルの最大リアプノフ指数

$a = 0.2, b = 0.2$ として c を変化させて数値計算により分岐ダイアグラムと最大リアプノフ指数を求めると, 図 1.2 のような図が得られる. ここで, 分岐ダイアグラムは $x = 0, y > 0$ のポアンカレ断面を通過する際の y の値をプロットしており, 系が周期倍分岐によりカオスに至ることが分かる. カオスの領域では最大リアプノフ指数は正となっている.

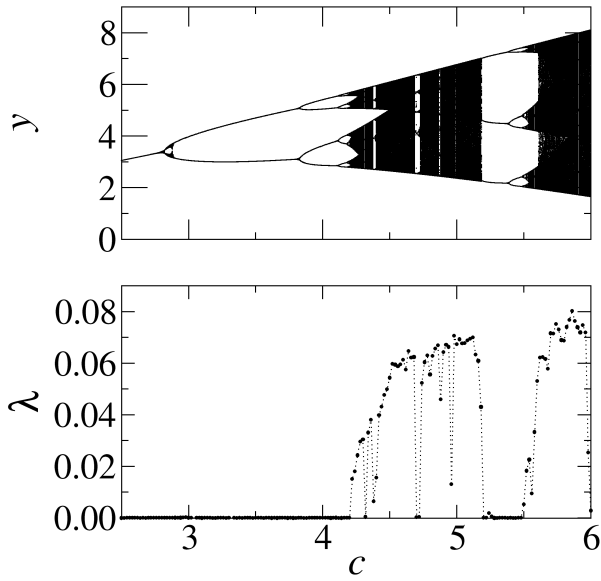


図 1.2 レスラーモデルの分岐ダイアグラムと最大リア
プノフ指数. $a = 0.2$, $b = 0.2$.

4 章

[1] スケールフリーネットワークの次数の平均と2次モーメント

平均次数は、次数 k を連続値と近似すると、

$$\bar{k} \simeq \int_{k_m}^{k_M} dk \tilde{P}(k) k = \left(\frac{\gamma - 1}{\gamma - 2} \right) \frac{k_m^{2-\gamma} - k_M^{2-\gamma}}{k_m^{1-\gamma} - k_M^{1-\gamma}}$$

と表される。この式より、大きなネットワークの極限を考え、最大次数を $k_M \rightarrow \infty$ としても平均次数 \bar{k} が有限であるためには $\gamma > 2$ でなくてはならず、このとき $k_M \rightarrow \infty$ で $\bar{k} \simeq k_m(\gamma - 1)/(\gamma - 2)$ となる。次数の2次モーメントについては、 $\gamma > 3$ ならば $k_M \rightarrow \infty$ で $\overline{k^2} \simeq k_m^2(\gamma - 1)(\gamma - 3)$ となり有限だが、 $2 < \gamma < 3$ では $\overline{k^2} \rightarrow \infty$ と発散する。

[2] ネットワークのラプラシアン固有値

図 4.1(b) の隣接行列より、ラプラシアン行列は

$$L = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

となる。固有値を数値計算すると

$$\Lambda_1 \simeq 0.00, \Lambda_2 \simeq 0.657, \Lambda_3 \simeq 1, \Lambda_4 \simeq 2.53, \Lambda_5 \simeq 3, \Lambda_6 \simeq 4.81$$

5 章

[1] アクティブローターの位相応答

$L = 2\pi$, $F(X) = a - \sin X$ で, $a > 1$ で周期解 $X_0(t)$ を持つ. 時刻 $t = 0$ で $X_0(0) = 0$ として, これを位相原点 $\theta = 0$ とする. $dt = dX/(a - \sin X)$ なので, 周期は状態 $X_0(0) = 0$ から $X_0(T) = 2\pi$ までこれを積分して

$$T = \int_0^{2\pi} \frac{1}{a - \sin X'} dX' = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - 1}}$$

となる. また, 状態 $0 \leq X_0(t) < 2\pi$ に達する時刻を t として

$$t = \int_0^{X_0(t)} \frac{1}{a - \sin X'} dX'$$

となり, 右辺を積分すればリットサイクル解 $X_0(t)$ と時刻 t の関係式が得られるが, これを $X_0(t)$ について解くのは難しく, 実際には数値計算で求める必要がある. 位相感受関数は

$$Z(\theta) = \frac{2\pi}{T} \frac{1}{a - \sin X_0(\theta)} = \frac{\sqrt{a^2 - 1}}{a - \sin X_0(\theta)}$$

となる. この Z は $a > 1$ では常に正の値をとり, 変数 X に摂動を与えると, 常に位相 θ も増加することがわかる. a を 1 に近づけると応答は発散する. 具体例については図 5.3 を参照.

[2] Stuart-Landau 振動子

$\theta = \phi - \beta \ln R$ は

$$\frac{d}{dt}\theta(t) = \frac{d}{dt}\phi(t) - \beta \frac{1}{R} \frac{d}{dt}R(t) = \alpha - \beta R^2 - \beta(1 - R^2) = \alpha - \beta$$

を満たすので, 角速度が R に依存する ϕ とは異なり, 常に一定の振動数 $\alpha - \beta$ で回転する.

[3] 蔵本モデルの式変形

蔵本モデル

$$\frac{d\theta_\ell}{dt} = \omega_\ell + \frac{K}{M} \sum_{j=1}^M \sin(\theta_\ell - \theta_j) \quad (\ell = 1, 2, \dots, N)$$

の右辺第 2 項の和の部分は

$$\begin{aligned} -\sum_{j=1}^M \sin(\theta_j - \theta_\ell) &= \operatorname{Im} \sum_{j=1}^M e^{i(\theta_j - \theta_\ell)} = \operatorname{Im} \left(\sum_{j=1}^M e^{i\theta_j} \right) e^{-i\theta_\ell} \\ &= \operatorname{Im} Mre^{i\Phi} e^{-i\theta_\ell} = \operatorname{Im} Mre^{i(\Phi - \theta_\ell)} \\ &= Mr \sin(\Phi - \theta_\ell) = -Mr \sin(\theta_\ell - \Phi) \end{aligned}$$

と表せるので,

$$\frac{d\theta_\ell}{dt} = \omega_\ell + Kr \sin(\theta_\ell - \Phi) \quad (\ell = 1, 2, \dots, N)$$

[4] 蔵本モデルの数値計算

図 5.8 参照. なお, 前問の式変形を使うと高速に計算できる.

6 章

[1] 共通ノイズによるリミットサイクル振動子の同期

ふたつの Stuart-Landau 振動子の x 成分に, Ornstein-Uhlenbeck 過程

$$d\xi(t) = -\frac{1}{\tau}\xi(t)dt + \frac{1}{\tau}dW(t)$$

で生成した有色ガウスノイズを共通加法ノイズ $D\xi(t)$ として与えた例を図 1.3 に示す. ここで $W(t)$ は単位 Wiener 過程で, 相関時間を与える時定数は $\tau = 0.1$. Stuart-Landau 振動子のパラメータは $\alpha = 2$, $\beta = 1$ で, ノイズ強度 $D = 0.05$.

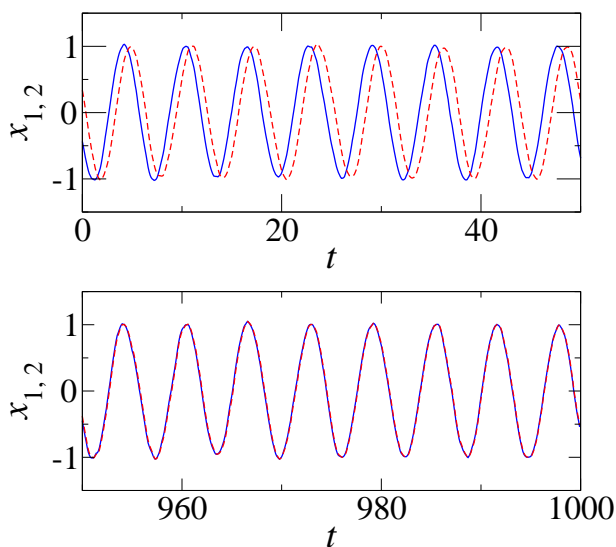


図 1.3 Stuart-Landau 振動子の共通ノイズ同期.

[2] Stuart-Landau 振動子の共通ノイズ同期時の位相差の分布

Stuart-Landau 振動子の x 成分にのみノイズを与えるとする. $Z(\theta) = -\sin \theta - \beta \cos \theta$ なので, 式 (6.36) の位相感受関数は相関関数 $h(\varphi)$ は

$$h(\varphi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} Z(\theta)Z(\theta + \varphi)d\theta = \frac{1}{2} (\beta^2 + 1) \cos \varphi$$

よって, 式 (6.38) の位相差の定常確率密度関数は, 共通ノイズ強度を ϵ^2 , 独立ノイズ強度を σ^2 として

$$U_0(\varphi) = \frac{u_0}{\epsilon^2[h(0) - h(\varphi)] + \sigma^2 h(0)} = \frac{u'_0}{\epsilon^2(1 - \cos \varphi) + \sigma^2}$$

ここで u_0, u'_0 は $\int_0^{2\pi} U_0(\varphi)d\varphi = 1$ より決まる規格化定数.

7 章

[1] 結合した非対称テント写像のカオス同期

非対称テント写像の自然な不変密度は $\rho(x) = 1$ ($0 < x < 1$) となる. 実際, Frobenius-Perron 方程式

$$\rho_{n+1}(x) = \sum_i \rho_n(y_i) |f'(y_i)|^{-1}$$

に代入し, 写像の形状より必ずふたつの点 $y_1 = px (< p)$, $y_2 = 1 - (1-p)x (> p)$ が同じ $0 < x < 1$ に移され, それらの点での傾きが $f'(y_1) = 1/p$, $f'(y_2) = -1/(1-p)$ なので, $\rho(x) = 1$ を代入すると

$$1 = \sum_{i=1}^2 |f'(y_i)|^{-1} = p + 1 - p = 1$$

となり, 定常解となっている. 従って, Lyapunov 指数は,

$$\begin{aligned} \lambda &= \int_0^1 \rho(x) \ln |f'(x)| dx = \int_0^p \ln \frac{1}{p} dx + \int_p^1 \ln \frac{1}{1-p} dx \\ &= -p \ln p - (1-p) \ln(1-p) \end{aligned}$$

となり, (7.7) より k_c が決まる. 例えば $p = 0.4$ だと $\lambda \simeq 0.673$ となり

$$k_c = \frac{1 - e^{-0.673}}{2} \simeq 0.250$$

となる. 数値計算すれば実際にこの値を境にカオス同期の有無が確認できる.

[2] 共通ノイズによるローレンツモデルの同期

ふたつのローレンツモデルを考え, その状態変数を (x_1, y_1, z_1) および (x_2, y_2, z_2) とする. パラメータはいずれも $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ とする. モデルの x , y , z 成分のいずれかに共通ノイズ $D\xi(t)$ をを加法的に与えた場合の状態差 $x_2 - x_1$

を図 1.4 に示す. ここで D がノイズ強度を表す. ここで $\xi(t)$ は問題 6-1 と同じ Ornstein-Uhlenbeck 過程により生成. x あるいは y 成分に与えた場合, それぞれあるノイズ強度に達すると共通ノイズ同期が起こるが, z 成分では数値計算した範囲内では共通ノイズ同期の発生は確認できない.

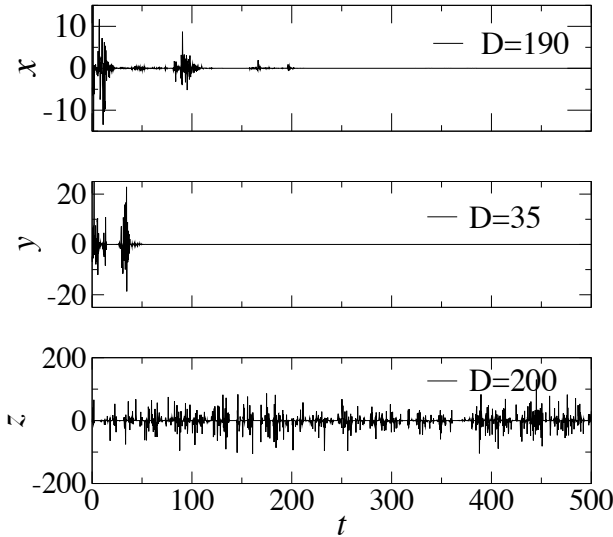


図 1.4 ローレンツモデルの共通ノイズ同期.

[3] ローレンツ系の Master Stability Function

ローレンツモデルの x 成分間のみ線形結合がある場合, y 成分間のみ線形結合がある場合, z 成分間のみ線形結合がある場合 (結合項がそれぞれ $H(\mathbf{x}) = (x, 0, 0)$, $H(\mathbf{x}) = (0, y, 0)$, $H(\mathbf{x}) = (0, 0, z)$ の場合) について, 図 7.8(a) と同様にローレンツモデル () について計算した例を図 1.5 に示す. パラメータはいずれも $\sigma = 10$, $b = 8/3$, $r = 28$ である.

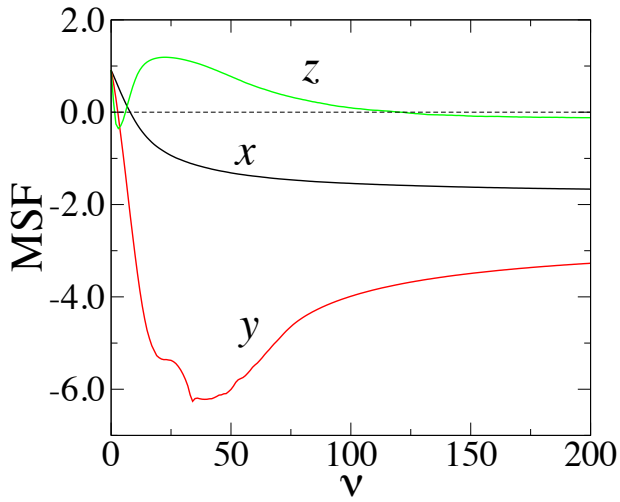


図 1.5 ローレンツモデルの Master Stability Function.