これなら解ける電気数学
–実験でアプローチ–

章末問題 詳解

高木 茂行
美井野 優

最終更新日: 2022 年 5 月 18 日

第１章　行列（基本編：2×2 の行列）

【１】 考える行列 A は式（A1.1） である．

$$A=\begin{bmatrix}8 & -9 & 1 & 2 & 4\\ 1 & 12 & 7 & 0 & -2\\ -3 & 5 & 2 & -4 & 3\end{bmatrix} \tag{A1.1}$$

行列の「行」とは，行列 A の $[8,-9,1,2,4]$ のように，横に並んだ数字をひと括りにした呼び方である．すなわち，A には，

$$1\text{ 行目}：\begin{bmatrix}8 & -9 & 1 & 2 & 4\end{bmatrix} \qquad 2\text{ 行目}：\begin{bmatrix}1 & 12 & 7 & 0 & -2\end{bmatrix} \qquad 3\text{ 行目}：\begin{bmatrix}-3 & 5 & 2 & -4 & 3\end{bmatrix}$$

の 3 つの行が含まれている．したがって，A の行数は 3 である．

一方，行列の「列」とは，行列 A の $\begin{bmatrix}8\\1\\-3\end{bmatrix}$ のように，縦に並んだ数字をひと括りにした呼び方である．すなわち，A には

$$1\text{ 列目}：\begin{bmatrix}8\\1\\-3\end{bmatrix} \qquad 2\text{ 列目}：\begin{bmatrix}-9\\12\\5\end{bmatrix} \qquad 3\text{ 列目}：\begin{bmatrix}1\\7\\2\end{bmatrix} \qquad 4\text{ 列目}：\begin{bmatrix}2\\0\\-4\end{bmatrix} \qquad 5\text{ 列目}：\begin{bmatrix}4\\-2\\3\end{bmatrix}$$

の 5 つの列が含まれている．したがって，A の列数は 5 である．

行列 A に含まれる要素のうち，値が 0 となっているものは 2 行目，4 列目の唯一つである．したがって，要素 0 は (2, 4) 成分 である．

【２】 行列の和と差・スカラ倍の定義に従って計算する．

$$(1)\quad A+B=\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 9\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 12 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}5+(-1) & -2+8\\ 3+12 & 9+(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4 & 6\\ 15 & 4\end{bmatrix}$$

$$(2)\quad 2A-B=2\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 9\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 12 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 5-(-1) & 2\cdot(-2)-8\\ 2\cdot 3-12 & 2\cdot 9-(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}11 & -12\\ -6 & 23\end{bmatrix}$$

$$(3)\quad -3A+4B=-3\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 9\end{bmatrix}+4\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 12 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\cdot 5+4\cdot(-1) & -3\cdot(-2)+4\cdot 8\\ -3\cdot 3+4\cdot 12 & -3\cdot 9+4\cdot(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-19 & 38\\ 39 & -47\end{bmatrix}$$

$$(4)\quad \frac{1}{2}A+\frac{1}{4}B=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & -2\\ 3 & 9\end{bmatrix}+\frac{1}{4}\begin{bmatrix}-1 & 8\\ 12 & -5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1/2\cdot 5+1/4\cdot(-1) & 1/2\cdot(-2)+1/4\cdot 8\\ 1/2\cdot 3+1/4\cdot 12 & 1/2\cdot 9+1/4\cdot(-5)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}9/4 & 1\\ 9/2 & 13/4\end{bmatrix}$$

【３】 行列の転置では，主対角線を軸として，行列の各要素を反転させる．すなわち，対角線上に並ぶ要素はそのままに，その他の要素は入れ替える．

$$(1)\quad \begin{bmatrix}100 & 35\\ 22 & 4\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}100 & 35\\ 22 & 4\end{bmatrix}^{\top}=\begin{bmatrix}100 & 22\\ 35 & 4\end{bmatrix}$$

$$(2)\quad \begin{bmatrix}58 & 7\\ 13 & 3\end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix}58 & 7\\ 13 & 3\end{bmatrix}^{\top}=\begin{bmatrix}58 & 13\\ 7 & 3\end{bmatrix}$$

【4】

(1)
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5 & 6\\ 7 & 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 5+2\cdot 7 & 1\cdot 6+2\cdot 8\\ 3\cdot 5+4\cdot 7 & 3\cdot 6+4\cdot 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}19 & 22\\ 43 & 50\end{bmatrix}$$

(2)
$$\begin{bmatrix}-3 & 2\\ 4 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -2\\ 5 & -10\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}(-3)\cdot 1+2\cdot 5 & (-3)\cdot(-2)+2\cdot(-10)\\ 4\cdot 1+1\cdot 5 & 4\cdot(-2)+1\cdot(-10)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7 & -14\\ 9 & -18\end{bmatrix}$$

(3)
$$\begin{bmatrix}10 & -20\\ 30 & -40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10\cdot 1+(-20)\cdot 0 & 10\cdot 0+(-20)\cdot 1\\ 30\cdot 1+(-40)\cdot 0 & 30\cdot 0+(-40)\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}10 & -20\\ 30 & -40\end{bmatrix}$$

(4)
$$\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4 & -2\\ -3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 4+2\cdot(-3) & 1\cdot(-2)+2\cdot 1\\ 3\cdot 4+4\cdot(-3) & 3\cdot(-2)+4\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 0\\ 0 & -2\end{bmatrix}$$

【5】 逆行列の存在は行列式の値によって決定づけられる．行列式が 0 であれば逆行列は存在せず，0 でなければ逆行列は存在する．各小問で与えられた行列を A とおき，行列式を評価しよう．

(1) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & 3\\ -5 & 7\end{vmatrix}=1\cdot 7-3\cdot(-5)=22\quad(\neq 0)$$

したがって，逆行列は存在する．2×2 の行列の逆行列の定義から，A^{-1} は次の通りとなる．

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}7 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{22}\begin{bmatrix}7 & -3\\ 5 & 1\end{bmatrix}$$

(2) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A|=\begin{vmatrix}-2 & -14\\ 1 & 7\end{vmatrix}=-2\cdot 7-(-14)\cdot 1=0$$

したがって，逆行列は存在しない．

(3) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A|=\begin{vmatrix}0 & 3\\ -1 & 8\end{vmatrix}=0\cdot 8-3\cdot(-1)=3\quad(\neq 0)$$

したがって，逆行列は存在する．2×2 の行列の逆行列の定義から，A^{-1} は次の通りとなる．

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}8 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}8 & -3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$$

(4) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A|=\begin{vmatrix}3 & 0\\ 0 & 7\end{vmatrix}=3\cdot 7-0\cdot 0=21\quad(\neq 0)$$

したがって，逆行列は存在する．2×2 の行列の逆行列の定義から，A^{-1} は次の通りとなる．

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{21}\begin{bmatrix}7 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}$$

【6】

(1) 与えられた連立方程式を行列方程式へと変換する．

$$\begin{cases} 2x+3y &= 1 \\ -x+5y &= 3 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 2\cdot x+3\cdot y &= 1 \\ -1\cdot x+5\cdot y &= 3 \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

得られた式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ にあてがえば，次の通りとなる．

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

ここで，行列方程式の解法 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ を念頭に，A^{-1} を求める．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\cdot 5 - 3\cdot(-1)}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

したがって，行列方程式の解は次の通りとなる．

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} 5\cdot 1+(-3)\cdot 3 \\ 1\cdot 1+2\cdot 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{13}\begin{bmatrix} -4 \\ 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4/13 \\ 7/13 \end{bmatrix}$$

すなわち，元の連立方程式の解として $x=-4/13,\ y=7/13$ を得る．

(2) 与えられた連立方程式を行列方程式へと変換する．

$$\begin{cases} -100x+300y &= 10 \\ 20x+50y &= 4 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{aligned} -100\cdot x+300\cdot y &= 10 \\ 20\cdot x+50\cdot y &= 4 \end{aligned}$$
$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} -100 & 300 \\ 20 & 50 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

得られた式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ にあてがえば，次の通りとなる．

$$A = \begin{bmatrix} -100 & 300 \\ 20 & 50 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix}$$

ここで，行列方程式の解法 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ を念頭に，A^{-1} を求める．

$$\begin{aligned} A^{-1} &= \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} 50 & -300 \\ -20 & -100 \end{bmatrix} = \frac{1}{50\cdot(-100)-(-300)\cdot(-20)}\begin{bmatrix} 50 & -300 \\ -20 & -100 \end{bmatrix} = \frac{1}{-11000}\begin{bmatrix} 50 & -300 \\ -20 & -100 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{-1100}\begin{bmatrix} 5 & -30 \\ -2 & -10 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

したがって，行列方程式の解は次の通りとなる．

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{-1100}\begin{bmatrix} 5 & -30 \\ -2 & -10 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 \\ 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1100}\begin{bmatrix} 5\cdot 10+(-30)\cdot 4 \\ -2\cdot 10+(-10)\cdot 4 \end{bmatrix} = \frac{1}{-1100}\begin{bmatrix} -70 \\ -60 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7/110 \\ 3/55 \end{bmatrix}$$

すなわち，元の連立方程式の解として $x=7/110,\ y=3/55$ を得る．

第２章　行列（応用編：3×3 の行列）

【１】 行列式は余因子を用いて次式で導出できる．

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad |A|=a_{11}C_{11}+a_{12}C_{12}+a_{13}C_{13} \tag{A2.1}$$

(1) 式（A2.1）にしたがい，次式の通り導出する．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3 & -3 & 1\\ 2 & 0 & -1\\ 1 & 4 & 5\end{vmatrix} &= 3\cdot\begin{vmatrix}0 & -1\\ 4 & 5\end{vmatrix}+(-3)\cdot(-1)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 5\end{vmatrix}+1\cdot\begin{vmatrix}2 & 0\\ 1 & 4\end{vmatrix}\\ &= 3\,[0\cdot5-(-1)\cdot4]+3\,[2\cdot5-(-1)\cdot1]+(2\cdot4-0\cdot1)\\ &= 3\cdot4+3\cdot11+8=53\end{aligned}$$

(2) 式（A2.1）にしたがい，次式の通り導出する．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}1 & 0 & 3\\ 0 & 5 & 0\\ 7 & 8 & 9\end{vmatrix} &= 1\cdot\begin{vmatrix}5 & 0\\ 8 & 9\end{vmatrix}+0\cdot(-1)\begin{vmatrix}0 & 0\\ 7 & 9\end{vmatrix}+3\cdot\begin{vmatrix}0 & 5\\ 7 & 8\end{vmatrix}\\ &= (5\cdot9-0\cdot8)+0+3\,(0\cdot8-5\cdot7)\\ &= 45-105=-60\end{aligned}$$

(3) 式（A2.1）にしたがい，次式の通り導出する．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}3 & 2 & -1\\ 2 & -1 & -3\\ 1 & 3 & -2\end{vmatrix} &= 3\cdot\begin{vmatrix}-1 & -3\\ 3 & -2\end{vmatrix}+2\cdot(-1)\begin{vmatrix}2 & -3\\ 1 & -2\end{vmatrix}+(-1)\cdot\begin{vmatrix}2 & -1\\ 1 & 3\end{vmatrix}\\ &= 3\,[(-1)\cdot(-2)-(-3)\cdot3]-2\,[2\cdot(-2)-(-3)\cdot1]-(2\cdot3-(-1)\cdot1)\\ &= 3\cdot11-2\cdot(-1)-7=28\end{aligned}$$

(4) 式（A2.1）にしたがい，次式の通り導出する．

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix}-7 & -10 & 4\\ 3 & -9 & 2\\ 7 & 1 & 2\end{vmatrix} &= -7\cdot\begin{vmatrix}-9 & 2\\ 1 & 2\end{vmatrix}-10\cdot(-1)\begin{vmatrix}3 & 2\\ 7 & 2\end{vmatrix}+4\cdot\begin{vmatrix}3 & -9\\ 7 & 1\end{vmatrix}\\ &= -7\,[(-9)\cdot2-2\cdot1]+10\,[3\cdot2-2\cdot7]+4\,(3\cdot1-(-9)\cdot7)\\ &= -7\cdot(-20)+10\cdot(-8)+4\cdot(66)=324\end{aligned}$$

【２】 与えられた行列の (i,j) 成分の余因子は，対応する小行列式 M_{ij} （i 行 j 列の要素を取り除いた行列の行列式）を用いて次式で計算できる．

$$C_{ij}=(-1)^{i+j}M_{ij} \tag{A2.2}$$

すなわち，それぞれ次の通り計算できる．

$$C_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -5 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = (-5)\cdot 1 - 7\cdot 0 = -5$$

$$C_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 7 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(3\cdot 1 - 7\cdot 0) = -3$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 3\cdot 0 - (-5)\cdot 0 = 0$$

$$C_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1\cdot(0\cdot 1 - 3\cdot 0) = 0$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 1 - 3\cdot 0 = 2$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(2\cdot 0 - 0\cdot 0) = 0$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 0 & 3 \\ -5 & 7 \end{vmatrix} = 0\cdot 7 - 3\cdot(-5) = 15$$

$$C_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{vmatrix} = -1\cdot(2\cdot 7 - 3\cdot 3) = -5$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -5 \end{vmatrix} = 2\cdot(-5) - 0\cdot 3 = -10$$

【3】 逆行列の存在は行列式の値によって決定づけられる．行列式が 0 であれば逆行列は存在せず，0 でなければ逆行列は存在する．各小問で与えられた行列を A とおき，行列式を評価しよう．

(1) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A| = 2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot(-1)\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + 1\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\cdot 3 - 4 - 1 = 1 \quad (\neq 0)$$

したがって，逆行列は存在する．行列 A の余因子はそれぞれ次の通り計算される．

$$C_{11} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{12} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4 \qquad C_{13} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{21} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{22} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{23} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

$$C_{31} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{32} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1 \qquad C_{33} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

すなわち，余因子行列およびその転置は次の通りとなる．

$$C = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C^\top = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

よって，逆行列 A^{-1} は次の通りに求まる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^\top = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + 2 \cdot (-1) \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 - 2 \cdot (-6) + 3 \cdot (-3) = 0$$

したがって，逆行列は存在しない．

(3) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A| = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3 \cdot (-1) \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + (-2) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 25 - 3 \cdot 10 - 2 \cdot (-15) = 25 \quad (\neq 0)$$

したがって，逆行列は存在する．行列 A の余因子はそれぞれ次の通り計算される．

$$C_{11} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & -5 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 25 \qquad C_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -10 \qquad C_{13} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -15$$

$$C_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 10 \qquad C_{22} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad C_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1$$

$$C_{31} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 0 & -5 \end{vmatrix} = -15 \qquad C_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -3 & -5 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{33} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = 9$$

すなわち，余因子行列およびその転置は次の通りとなる．

$$C = \begin{bmatrix} 25 & -10 & -15 \\ 10 & 4 & 1 \\ -15 & -1 & 9 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C^{\top} = \begin{bmatrix} 25 & 10 & -15 \\ -10 & 4 & -1 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix}$$

よって，逆行列 A^{-1} は次の通りに求まる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^{\top} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 25 & 10 & -15 \\ -10 & 4 & -1 \\ -15 & 1 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 & -0.6 \\ -0.4 & 0.16 & -0.04 \\ -0.6 & 0.04 & 0.36 \end{bmatrix}$$

(4) 与えられた行列 A の行列式は次の通りとなる．

$$|A| = 4 \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} + (-2) \cdot (-1) \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} + 3 \cdot \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 4 \cdot (-2) + 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 5 = 1 \quad (\neq 0)$$

したがって，逆行列は存在する．行列 A の余因子はそれぞれ次の通り計算される．

$$C_{11} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} -3 & 5 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = -2 \qquad C_{12} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & 5 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{13} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 8 & -3 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = 5$$

$$C_{21} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = 2 \qquad C_{22} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = -5 \qquad C_{23} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 7 & -2 \end{vmatrix} = -6$$

$$C_{31} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = -1 \qquad C_{32} = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 4 \qquad C_{33} = (+1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 8 & -3 \end{vmatrix} = 4$$

すなわち，余因子行列およびその転置は次の通りとなる．

$$C = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 2 & -5 & -6 \\ -1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \quad \Leftrightarrow \quad C^{\top} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 5 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

よって，逆行列 A^{-1} は次の通りに求まる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} C^{\top} = \frac{1}{1} \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 5 & -6 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 4 \\ 5 & -6 & 4 \end{bmatrix}$$

【4】

(1) 与えられた連立方程式を行列方程式へと変換する．

$$\begin{cases} x+2y+3z &= 5 \\ y+4z &= 3 \\ 5x+6y &= -2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{aligned} 1\cdot x+2\cdot y+3\cdot z &= 5 \\ 0\cdot x+1\cdot y+4\cdot z &= 3 \\ 5\cdot x+6\cdot y+0\cdot z &= -2 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

得られた式を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ にあてがえば，次の通りとなる．

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

ここで，行列方程式の解法 $\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ を念頭に，A^{-1} を求める．まず，行列式 $|A|$ は次式で得られる．

$$|A| = 1\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} - 2\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} + 3\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\cdot(-24) - 2\cdot(-20) + 3\cdot(-5) = 1$$

次に，各成分の余因子は次の通り求まる．

$$C_{11} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = -24 \qquad C_{12} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 4 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = 20 \qquad C_{13} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -5$$

$$C_{21} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 18 \qquad C_{22} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad C_{23} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 4$$

$$C_{31} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 5 \qquad C_{32} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 \qquad C_{33} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

よって，逆行列 A^{-1} は次の通りとなる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^{\top} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

したがって，行列方程式の解は次の通りとなる．

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (-24)\cdot 5 + 18\cdot 3 + 5\cdot(-2) \\ 20\cdot 5 + (-15)\cdot 3 + (-4)\cdot(-2) \\ (-5)\cdot 5 + 4\cdot 3 + 1\cdot(-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -76 \\ 63 \\ -15 \end{bmatrix}$$

すなわち，元の連立方程式の解として $x = -76$，$y = 63$，$z = -15$ を得る．

(2) 与えられた連立方程式を行列方程式へと変換する．

$$\begin{cases} 5x+7y+9z &= 1 \\ 4x+3y+8z &= -3 \\ 7x+5y+6z &= 8 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} & 5\cdot x+7\cdot y+9\cdot z = 1 \\ \Leftrightarrow\ & 4\cdot x+3\cdot y+8\cdot z = -3 \\ & 7\cdot x+5\cdot y+6\cdot z = 8 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

得られた式を $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ にあてがえば，次の通りとなる．

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 4 & 3 & 8 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$$

ここで，行列方程式の解法 $\boldsymbol{x}=A^{-1}\boldsymbol{b}$ を念頭に，A^{-1} を求める．まず，行列式 $|A|$ は次式で得られる．

$$|A| = 5\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 7\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} + 9\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 5\cdot(-22)-7\cdot(-32)+9\cdot(-1) = 105$$

次に，各成分の余因子は次の通り求まる．

$$C_{11} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 3 & 8 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = -22 \qquad C_{12} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 8 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = 32 \qquad C_{13} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = -1$$

$$C_{21} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 3 \qquad C_{22} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 7 & 6 \end{vmatrix} = -33 \qquad C_{23} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 7 & 5 \end{vmatrix} = 24$$

$$C_{31} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 7 & 9 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = 29 \qquad C_{32} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 9 \\ 4 & 8 \end{vmatrix} = -4 \qquad C_{33} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 5 & 7 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -13$$

よって，逆行列 A^{-1} は次の通りとなる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^{\top} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} -22 & 3 & 29 \\ 32 & -33 & -4 \\ -1 & 24 & -13 \end{bmatrix}$$

したがって，行列方程式の解は次の通りとなる．

$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} -22 & 3 & 29 \\ 32 & -33 & -4 \\ -1 & 24 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} (-22)\cdot 1+3\cdot(-3)+29\cdot 8 \\ 32\cdot 1+(-33)\cdot(-3)+(-4)\cdot 8 \\ (-1)\cdot 1+24\cdot(-3)+(-13)\cdot 8 \end{bmatrix} = \frac{1}{105}\begin{bmatrix} 201 \\ 99 \\ -177 \end{bmatrix} = \frac{1}{35}\begin{bmatrix} 67 \\ 33 \\ -59 \end{bmatrix}$$

すなわち，元の連立方程式の解として $x=67/35,\ y=33/35,\ z=-59/35$ を得る．

【5】 各抵抗のオームの法則により，次の関係が成り立つ．

$$V_1 = 100\cdot I_1 \tag{A2.3}$$
$$V_2 = 200\cdot I_2 \tag{A2.4}$$
$$V_3 = 300\cdot I_3 \tag{A2.5}$$

キルヒホッフの電圧則により，次の関係が成り立つ．

$$V_1 + V_2 = 55 \tag{A2.6}$$
$$V_2 = V_3 \tag{A2.7}$$

ここで，式 (A2.3)–(A2.5) によって式（A2.6），（A2.7）の V_1, V_2, V_3 を消去すると，キルヒホッフの電圧則は次式に置き換えられる．

$$100I_1 + 200I_2 = 55 \tag{A2.8}$$
$$200I_2 = 300I_3 \tag{A2.9}$$

また，キルヒホッフの電流則により，次の関係が成り立つ．

$$I_1 = I_2 + I_3 \tag{A2.10}$$

したがって，式（A2.8），（A2.9），（A2.10）をまとめると I_1, I_2, I_3 に関する次の連立方程式を得る．

$$\left\{\begin{array}{rcl} 100I_1 + 200I_2 &=& 55 \\ 200I_2 - 300I_3 &=& 0 \\ I_1 - I_2 - I_3 &=& 0 \end{array}\right. \tag{A2.11}$$

式（A2.11）を行列方程式へと変換する．

$$\begin{array}{rcl} 100\cdot I_1 + 200\cdot I_2 + 0\cdot I_3 &=& 55 \\ 0\cdot I_1 + 200\cdot I_2 + (-300)\cdot I_3 &=& 0 \\ 1\cdot I_1 + (-1)\cdot I_2 + (-1)\cdot I_3 &=& 0 \end{array} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{bmatrix} 100 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & -300 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{A2.12}$$

式（A2.12）を $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ にあてがえば，次のとおりに対応する．

$$A = \begin{bmatrix} 100 & 200 & 0 \\ 0 & 200 & -300 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{x} = \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b}$ による解法を念頭に，A^{-1} を求める．はじめに，行列式 $|A|$ は次式で求まる．

$$|A| = 100\cdot\begin{vmatrix} 200 & -300 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} - 200\cdot\begin{vmatrix} 0 & -300 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0\cdot\begin{vmatrix} 0 & 200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 100\cdot(-500) - 200\cdot 300 + 0 = -110000$$

つぎに，A の各成分の余因子を求める．

$$C_{11} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 200 & -300 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -500 \qquad C_{12} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & -300 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -300 \qquad C_{13} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 0 & 200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -200$$

$$C_{21} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 200 & 0 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 200 \qquad C_{22} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -100 \qquad C_{23} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 300$$

$$C_{31} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 200 & 0 \\ 200 & -300 \end{vmatrix} = -60000 \qquad C_{32} = (-1)\cdot\begin{vmatrix} 100 & 0 \\ 0 & -300 \end{vmatrix} = 30000 \qquad C_{33} = (+1)\cdot\begin{vmatrix} 100 & 200 \\ 0 & 200 \end{vmatrix} = 20000$$

よって，逆行列 A^{-1} は次の通りとなる．

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}C^{\top} = \frac{1}{-110000}\begin{bmatrix} -500 & 200 & -60000 \\ -300 & -100 & 30000 \\ -200 & 300 & 20000 \end{bmatrix} = \frac{1}{1100}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 600 \\ 3 & 1 & -300 \\ 2 & -3 & -200 \end{bmatrix}$$

したがって，行列方程式の解は次の通りとなる．

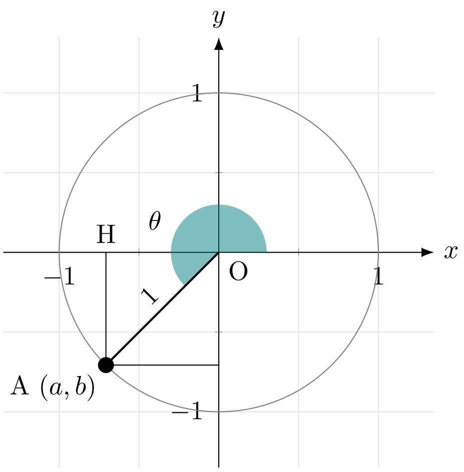
$$\boldsymbol{x} = A^{-1}\boldsymbol{b} = \frac{1}{1100}\begin{bmatrix} 5 & -2 & 600 \\ 3 & 1 & -300 \\ 2 & -3 & -200 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 55 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{1100}\begin{bmatrix} 5\cdot 55 + (-2)\cdot 0 + 600\cdot 0 \\ 3\cdot 55 + 1\cdot 0 + (-300)\cdot 0 \\ 2\cdot 55 + (-3)\cdot 0 + (-200)\cdot 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{20}\begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.25 \\ 0.15 \\ 0.1 \end{bmatrix}$$

すなわち，元の連立方程式の解として，$I_1 = 0.25$ A，$I_2 = 0.15$ A，$I_3 = 0.1$ A を得る．

第 3 章　三角関数

【1】 様々な手段が考えられるが，本詳解では単位円を用いた解法を用いる．

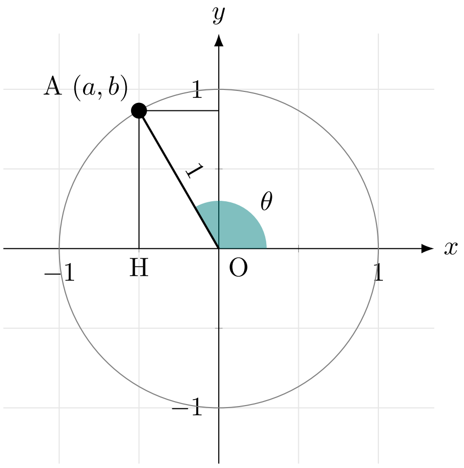
(1) $\dfrac{5}{4}\pi = 225^\circ$ に対応する単位円上の点 A は次の通りとなる．



ここで，$225^\circ = 180^\circ + 45^\circ$ に注意すれば，三角形 OAH は OH = AH の直角二等辺三角形であることがわかる．したがって，$a = b$ であるため，次式を得る．

$$\tan\frac{5}{4}\pi = \frac{b}{a} = 1$$

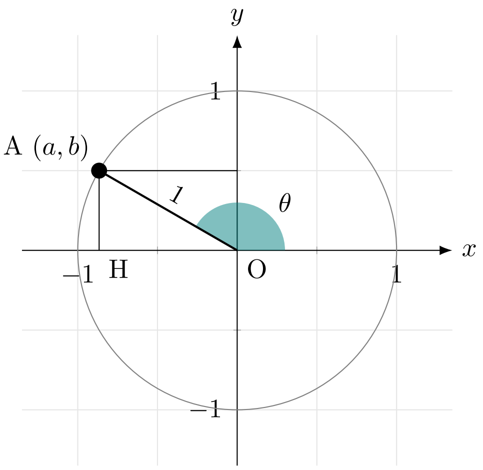
(2) $\dfrac{2}{3}\pi = 120^\circ$ に対応する単位円上の点 A は次の通りとなる．



ここで，$120^\circ = 90^\circ + 30^\circ$ に注意すれば，三角形 OAH は OA : AH : HO = $2 : \sqrt{3} : 1$ の直角二等辺三角形であることがわかる．したがって，$b = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となって次式を得る．

$$\sin\frac{2}{3}\pi = \frac{b}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

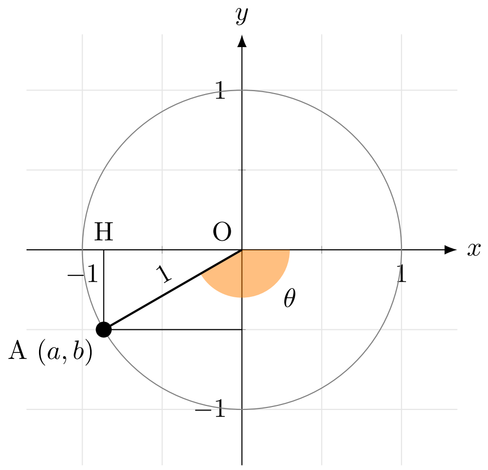
(3) $\dfrac{5}{6}\pi = 150^\circ$ に対応する単位円上の点 A は次の通りとなる．



ここで，$150^\circ = 180^\circ - 30^\circ$ に注意すれば，三角形 OAH は OA : AH : HO = $2 : 1 : \sqrt{3}$ の直角二等辺三角形であることがわかる．したがって，A の x 座標が負であることに注意すると $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となって次式を得る．

$$\cos\frac{5}{6}\pi = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

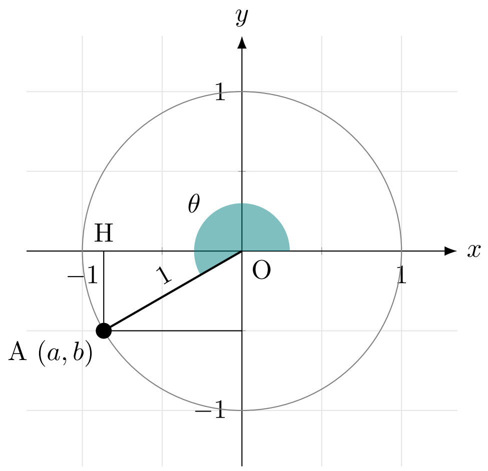
(4) $-\dfrac{5}{6}\pi = -150^\circ$ に対応する単位円上の点 A は次の通りとなる．



ここで，$-150^\circ = -180^\circ + 30^\circ$ に注意すれば，三角形 OAH は $\mathrm{OA}:\mathrm{AH}:\mathrm{HO} = 2:1:\sqrt{3}$ の直角二等辺三角形であることがわかる．したがって，A の x 座標が負であることに注意すると $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となって次式を得る．

$$\cos\left(-\frac{5}{6}\pi\right) = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

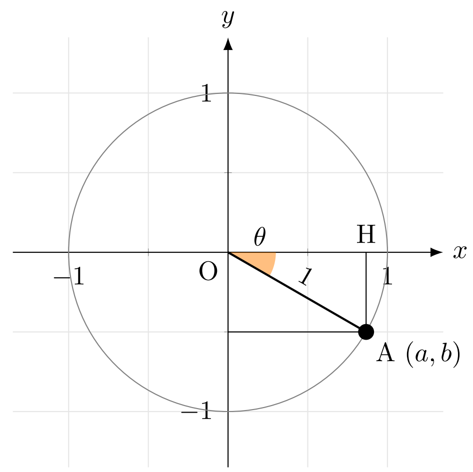
(5) $\dfrac{7}{6}\pi = 210^\circ$ に対応する単位円上の点 A は次の通りとなる．



ここで，$210^\circ = 180^\circ + 30^\circ$ に注意すれば，三角形 OAH は $\mathrm{OA}:\mathrm{AH}:\mathrm{HO} = 2:1:\sqrt{3}$ の直角二等辺三角形であることがわかる．したがって，A の x 座標が負であることに注意すると $a = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ となって次式を得る．

$$\cos\frac{7}{6}\pi = \frac{a}{r} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(6) $-\dfrac{1}{6}\pi = -30^\circ$ に対応する単位円上の点 A は次の通りとなる．



ここで，三角形 OAH は $\mathrm{OA}:\mathrm{AH}:\mathrm{HO} = 2:1:\sqrt{3}$ の直角二等辺三角形であることがわかる．したがって，A の y 座標が負であることに注意すると $b = -\frac{1}{2}$ となって次式を得る．

$$\sin\left(-\frac{1}{6}\pi\right) = \frac{b}{r} = -\frac{1}{2}$$

【2】 (1)–(3) は $\dfrac{7}{12}\pi = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\pi}{3}$ に気付けるか否かがポイントである．弧度法では分かりづらいが，度数法に直せば $105^\circ = 45^\circ + 60^\circ$ と一気にわかりやすくなる．

(1) $\sin\dfrac{7}{12}\pi \;=\sin\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}+\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(2) $\cos\dfrac{7}{12}\pi \;=\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\cos\dfrac{\pi}{4}\cos\dfrac{\pi}{3}-\sin\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(3) $\tan\dfrac{7}{12}\pi \;=\tan\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\pi}{3}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\tan\frac{\pi}{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-1\cdot\sqrt{3}}=\dfrac{1+\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{4+2\sqrt{3}}{-2}=-\left(2+\sqrt{3}\right)$

同様に，(4)–(6) では $\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$ を用いる．

(4) $\sin\dfrac{\pi}{12} \;=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

(5) $\cos\dfrac{\pi}{12} \;=\cos\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\cos\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\sin\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(6) $\tan\dfrac{\pi}{12} \;=\tan\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\tan\frac{\pi}{3}-\tan\frac{\pi}{4}}{1+\tan\frac{\pi}{3}\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{1+\sqrt{3}\cdot 1}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}\cdot\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1}=\dfrac{4-2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

【3】

(1) 与式の逆三角関数を書き換えると $\sin\theta=1/2$ となる．すなわち，$0<\theta<2\pi$ の範囲でこれを満たす θ を求めれば良い．したがって，基本的な三角比[*1]により，次の通り解が得られる．

$$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{5}{6}\pi$$

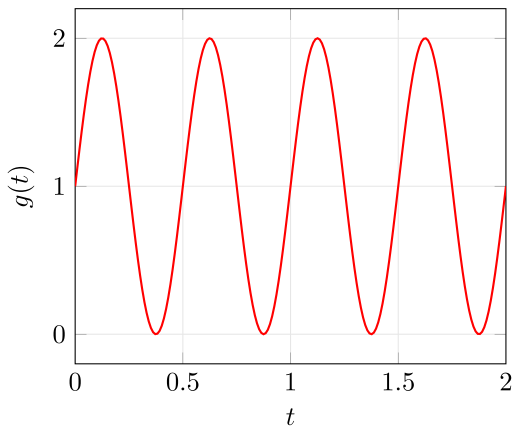
(2) 与式の逆三角関数を書き換えると $\cos\theta=\sqrt{3}/2$ となる．すなわち，$0<\theta<2\pi$ の範囲でこれを満たす θ を求めれば良い．したがって，基本的な三角比により，次の通り解が得られる．

$$\theta=\frac{\pi}{6},\frac{11}{6}\pi$$

(3) 与式の逆三角関数を書き換えると $\tan\theta=\sqrt{3}$ となる．すなわち，$0<\theta<2\pi$ の範囲でこれを満たす θ を求めれば良い．したがって，基本的な三角比により，次の通り解が得られる．

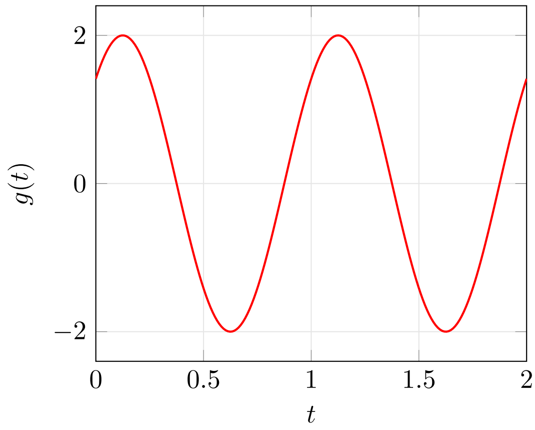
$$\theta=\frac{\pi}{3},\frac{4}{3}\pi$$

【4】

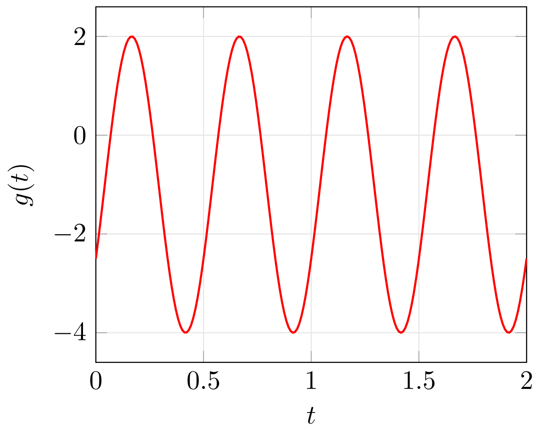


(1) 振幅が 1，バイアスが 1 であるため，縦軸方向には $g(t)=1$ を軸として上下 1 の幅（0 から 2 の幅）で発振している．一方，周波数が 2 であるため，t が 1 進むにつれて波が 2 つ発生している．最後に，位相が 0 であるため，$t=0$ で $\sin 0$ と対応する波形となる．したがって，グラフは左図の通りである．

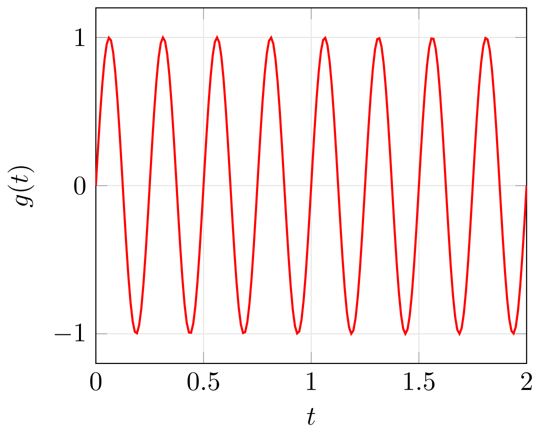
[*1] 基本的な角度と三角比の対応は暗記しておこう．



(2) 振幅が 2，バイアスが 0 であるため，縦軸方向には $g(t)=0$ を軸として上下 2 の幅（−2 から 2 の幅）で発振している．一方，周波数が 1 であるため，t が 1 進むにつれて波が 1 つ発生している．最後に，位相が $\pi/4$ であるため，$t=0$ で $\sin\frac{\pi}{4}$ と対応する波形となる．したがって，グラフは左図の通りである．



(3) 振幅が 3，バイアスが −1 であるため，縦軸方向には $g(t)=-1$ を軸として上下 3 の幅（−4 から 2 の幅）で発振している．一方，周波数が 2 であるため，t が 1 進むにつれて波が 2 つ発生している．最後に，位相が $-\pi/6$ であるため，$t=0$ で $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$ と対応する波形となる．したがって，グラフは左図の通りである．



(4) 振幅が 1，バイアスが 0 であるため，縦軸方向には $g(t)=0$ を軸として上下 1 の幅（−1 から 1 の幅）で発振している．一方，周波数が 4 であるため，t が 1 進むにつれて波が 4 つ発生している．最後に，位相が 2π であるため，$t=0$ で $\sin 2\pi=\sin 0$ と対応する波形，すなわち位相 0 と等価となる．したがって，グラフは左図の通りである．

【5】

(1) 波の y 軸方向の動きを観察すると，0 から 2 の幅で 1 を軸として発振していることがわかる．したがって，振幅 A は 1，バイアス B は 1 である．波の x 軸方向の動きを観察すると，$t=0$ から $t=1$ までの間に 2 つの波が発生していることがわかる．したがって，周波数 f は 2 である．最後に，対象の正弦波は $t=0$ において山の頂点を示しているため，$t=0$ における波の位相は $\sin\frac{\pi}{2}$ と一致する．すなわち，位相 $\phi=\pi/2$ である．

(2) 波の y 軸方向の動きを観察すると，−2 から 2 の幅で 0 を軸として発振していることがわかる．したがって，振幅 A は 2，バイアス B は 0 である．波の x 軸方向の動きを観察すると，$t=0$ から $t=2$ までの間に 1 つの波が発生していることがわかる．したがって，周波数 f は 1/2 である．最後に，対象の正弦波は $t=0$ において谷から山へ向かう中間地点を示しているため，$t=0$ における波の位相は $\sin 0$ と一致する．すなわち，位相 $\phi=0$ である．

(3) 波の y 軸方向の動きを観察すると，−4 から 2 の幅で −1 を軸として発振していることがわかる．したがって，振幅 A は 3，バイアス B は −1 である．波の x 軸方向の動きを観察すると，$t=0$ から $t=1$ までの間に 3 つの波が発生している

ことがわかる．したがって，周波数 f は 3 である．最後に，対象の正弦波は $t=0$ において谷の底を示しているため，$t=0$ における波の位相は $\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ と一致する．すなわち，位相 $\phi=-\pi/2$ である．

(4) 波の y 軸方向の動きを観察すると，-4 から 0 の幅で -2 を軸として発振していることがわかる．したがって，振幅 A は 2，バイアス B は -2 である．波の x 軸方向の動きを観察すると，$t=0$ から $t=1$ までの間に 1 つの波が発生していることがわかる．したがって，周波数 f は 1 である．最後に，対象の正弦波は $t=0$ において山から谷へ向かう中間地点を示しているため，$t=0$ における波の位相は $\sin\pi$ または $\sin(-\pi)$ と一致する．すなわち，位相 $\phi=\pi$ または $\phi=-\pi$ である．

【6】 三角比の基本的な変換により，(b) は次式で置き換えられる．

$$3\sin\left(2\pi x+\frac{\pi}{2}\right)-1=3\cos\left(2\pi x\right)-1$$

したがって，(a) と (b) の三角関数を足し合わせて次式を得る．

$$\sin\left(2\pi x\right)+3\cos\left(2\pi x\right)-1$$

sin と cos の角がそれぞれ $2\pi x$ で等しいため，三角関数の合成の公式が適用できる．

$$\sin\left(2\pi x\right)+3\cos\left(2\pi x\right)=\sqrt{1^2+3^2}\sin\left(2\pi x+\phi\right)=\sqrt{10}\sin\left(2\pi x+\phi\right)$$

ただし，ϕ は次式を満たす．

$$\phi=\tan^{-1}3$$

ここで，仮定から $\tan 1.249=3$ であるため，$\phi=1.249$ である．したがって，次の通りに解を得る．

$$\sqrt{10}\sin\left(2\pi x+1.249\right)-1$$

第 4 章　指数と対数およびその関数

【1】 指数演算の基本に則って，下記の通りに解を得る．

$$
\begin{aligned}
&(1)\quad 2^6 \times 2^{-5} &&= 2^{6-5} = 2^1 = 2\\
&(2)\quad 2^3 \times 5^3 &&= (2\times 5)^3 = 10^3 = 1000\\
&(3)\quad \left(2^2\right)^3 &&= 2^{2\times 3} = 2^6 = 64\\
&(4)\quad 2^{2^3} &&= 2^8 = 256
\end{aligned}
$$

【2】 対数演算の基本に則って，下記の通りに解を得る．

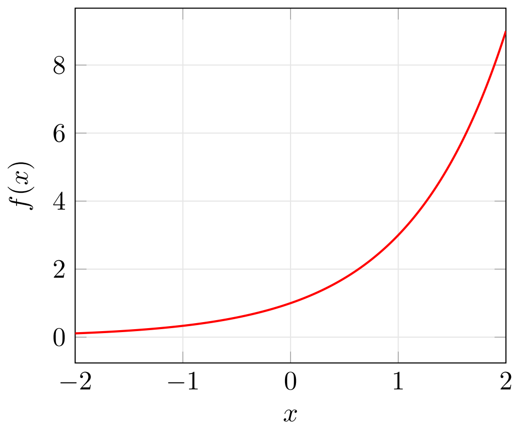
(1) $$\log_2 8 + \log_2 4 = \log_2 2^3 + \log_2 2^2 = 3 + 2 = 5$$

(2) $$\log_3 162 - \log_3 2 = \log_3\left(\frac{162}{2}\right) = \log_3 81 = \log_3 3^4 = 4$$

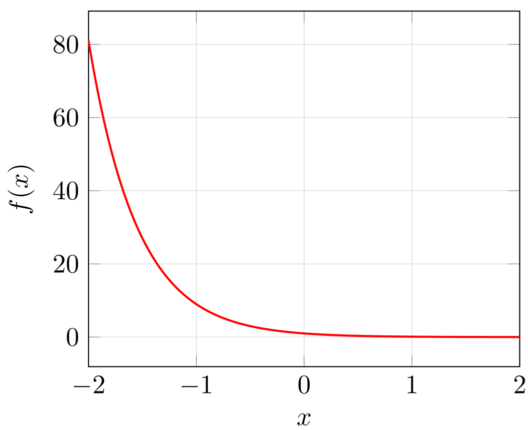
(3) $$\frac{1}{3}\log_{0.5} 64 = \frac{1}{3}\log_{0.5} 4^3 = \frac{1}{3}\cdot 3\log_{0.5} 4 = \log_{0.5} 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 0.5} = \frac{\log_2 2^2}{\log_2 2^{-1}} = \frac{2}{-1} = -2$$

(4) $$\begin{aligned}\log_5 500 - 2\log_5 2 + \log_4 32 + \log_4 8 &= \log_5 500 - \log_5 2^2 + \log_4(32\times 8) = \log_5\left(\frac{500}{2^2}\right) + \log_4\left(4^2\cdot 2\times 4\cdot 2\right)\\ &= \log_5 125 + \log_4 4^4 = \log_5 5^3 + 4 = 3 + 4 = 7\end{aligned}$$

【3】

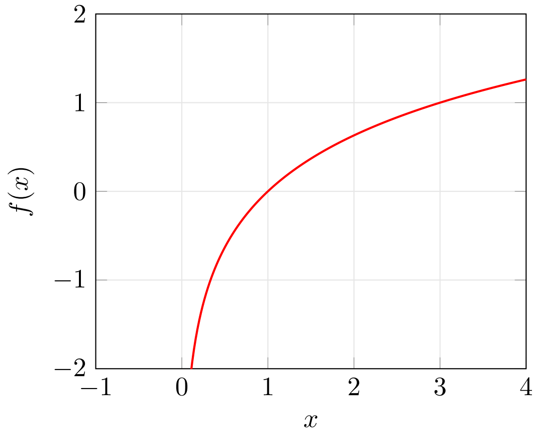


(1) $f(x) = 3^x$ は $x = 0$ で $f(0) = 3^0 = 1$ を取り，底が 1 よりも大きい指数関数である．すなわち，x が増加するにつれて $f(x)$ も増加し，x が減少するにつれて $f(x)$ も減少する．また，$3^x > 0$ であるため，$f(x)$ はどれだけ減少しても 0 にはならない．ゆえに，グラフの概形は左図の通りとなる．

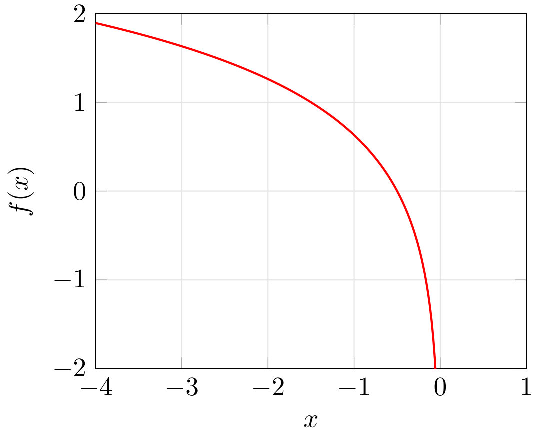


(2) $f(x) = 3^{-2x}$ は $x = 0$ で $f(0) = 3^0 = 1$ を取り，$3^{-2x} = \left(3^{-2}\right)^x = (1/9)^x$ から，底が 1 よりも小さい指数関数である．すなわち，x が増加するにつれて $f(x)$ は減少し，x が減少するにつれて $f(x)$ は増加する．また，$(1/9)^x > 0$ であるため，$f(x)$ はどれだけ減少しても 0 にはならない．ゆえに，グラフの概形は左図の通りとなる．

【4】



(1) 対数関数の定義域は真数によって決定づけられる．すなわち，真数は正でなくてはならないため，定義域は $x > 0$ である．また，$f(x)$ は $x = 1$ において，$f(1) = \log_3 1 = 0$ を取り，グラフの概形は左図の通りとなる．



(2) 真数は正でなくてはならないため，$-2x > 0$，すなわち 定義域は $x < 0$ である．また，$f(x)$ は $x = -1/2$ において，$f(-1/2) = \log_3 1 = 0$ を取り，グラフの概形は左図の通りとなる．グラフは $g(x) = f(-x) = \log_3(2x)$ を y 軸に対して線対称に反転させたグラフとなっている．

【5】 双曲線関数の定義を再掲しておく．

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \tag{A4.1}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \tag{A4.2}$$

$$\tanh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} \tag{A4.3}$$

これらの関数に対して $x = 1$ を代入し，$e = 2.72$ を用いて置き換える．

$$(1) \quad \sinh(1) = \frac{e - e^{-1}}{2} = \frac{2.72 - \frac{1}{2.72}}{2} = \frac{2.35235\ldots}{2} \approx 1.18$$

$$(2) \quad \cosh(1) = \frac{e + e^{-1}}{2} = \frac{2.72 + \frac{1}{2.72}}{2} = \frac{3.08764\ldots}{2} \approx 1.54$$

$$(3) \quad \tanh(1) = \frac{e^2 - 1}{e^2 + 1} = \frac{7.3984 - 1}{7.3984 + 1} = \frac{6.3984}{8.3984} \approx 0.76$$

【6】

(1) 式（A4.1）から，$\sinh^2(x)$ を指数関数で表すと次式となる．

$$\sinh^2(x) = \left(\frac{e^x - e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} - 1 - 1 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4}$$

(2) 式（A4.2）から，$\cosh^2(x)$ を指数関数で表すと次式となる．

$$\cosh^2(x) = \left(\frac{e^x + e^{-x}}{2}\right)^2 = \frac{e^{2x} + 1 + 1 + e^{-2x}}{4} = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4}$$

(3) (1) および (2) から，$\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ は次の通り記述できる．

$$\cosh^2(x) - \sinh^2(x) = \frac{e^{2x} + 2 + e^{-2x}}{4} - \frac{e^{2x} - 2 + e^{-2x}}{4} = \frac{2+2}{4} = 1$$

したがって，$\cosh^2(x) - \sinh^2(x)$ の値は x によらず一定となる．

第 5 章　複素数

【1】 複素数の基本的な演算に基づいて計算する．

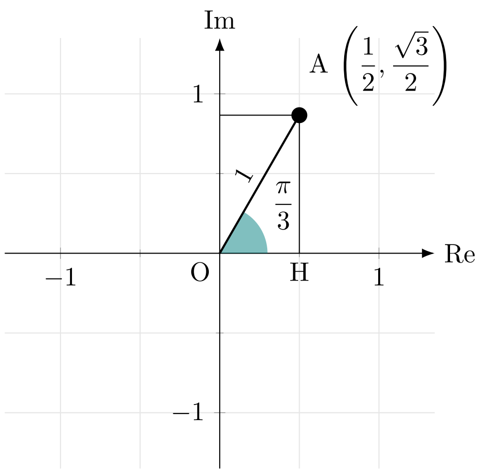
(1) $3(2+j3)+j2(1-j) = 3\cdot 2+3\cdot j3+j2\cdot 1-j2\cdot j = 6+j9+j2-j^2 2 = 6+j11-(-1)\cdot 2 = 8+j11$

(2) $(2+j3)(5-j2) = 2\cdot 5-2\cdot j2+j3\cdot 5-j3\cdot j2 = 10-j4+j15-j^2 6 = 10+j11-(-1)\cdot 6 = 16+j11$

(3) $|1+j|^2 = \sqrt{1^2+1^2}^2 = \sqrt{2}^2 = 2$

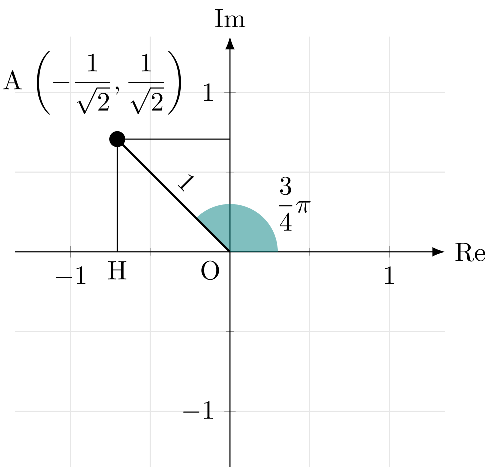
(4) $$\frac{5+j2}{7-j3} = \frac{5+j2}{7-j3}\cdot\frac{7+j3}{7+j3} = \frac{5\cdot 7+5\cdot j3+j2\cdot 7+j2\cdot j3}{7^2-(j3)^2} = \frac{35+j15+j14+j^2 6}{49-j^2 9}$$
$$= \frac{35+j29+(-1)\cdot 6}{49-(-1)\cdot 9} = \frac{29+j29}{58} = \frac{1}{2}+j\frac{1}{2}$$

【2】 複素平面上に与えられた複素数を点として描画し，原点からの距離 r と実軸からの角度 θ を求める．これらの値から，$a+jb = r(\cos\theta + j\sin\theta)$ によって式を変換する．なお，問題文から自明でもあるが，本問においては原点からの距離 r はすべて $r=1$ であるため，導出は示さない．



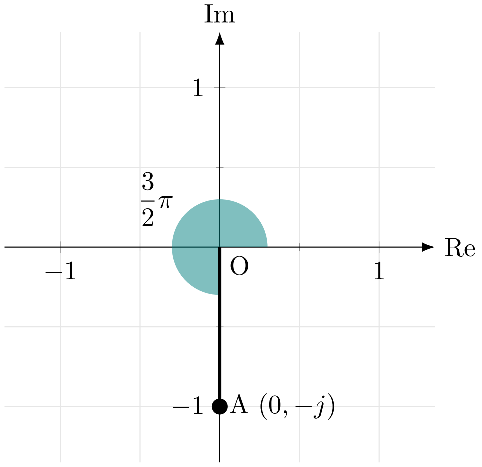
(1) 三角形 OAH は OA : AH : HO $= 2 : \sqrt{3} : 1$ の直角三角形である．したがって，$\angle\mathrm{HOA} = \pi/3$ であり，与式は次の通り変換できる．

$$\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}$$



(2) 三角形 OAH は OA : AH : HO $= \sqrt{2} : 1 : 1$ の直角三角形である．したがって，$\angle\mathrm{HOA} = \pi/4$ であり，$\theta = 3\pi/4$ となり与式は次の通り変換できる．

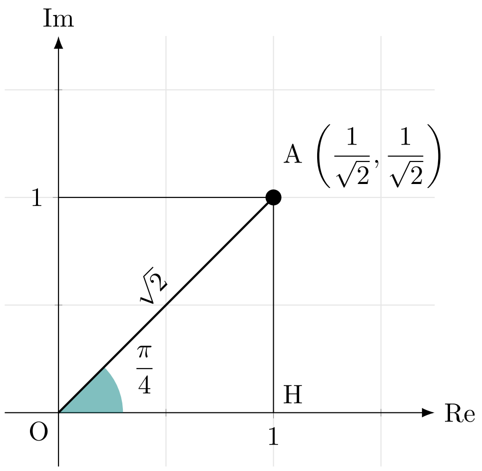
$$-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos\frac{3}{4}\pi+j\sin\frac{3}{4}\pi$$



(3) 左図から，$\theta = 3\pi/2$ となり与式は次の通り変換できる．

$$-j = \cos\frac{3}{2}\pi + j\sin\frac{3}{2}\pi$$

【3】 前問同様であるが，今回は $r = 1$ ではない．得られた r と θ を基に，(r, θ) として極座標を，$re^{j\theta}$ として指数関数表示を得る．

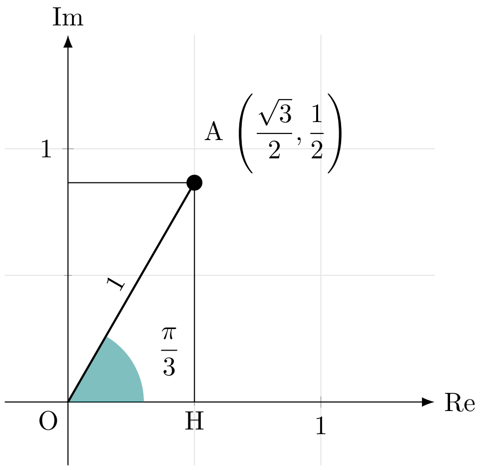


(1) 原点からの距離 r は，$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ である．また，三角形 OAH は OA : AH : HO $= \sqrt{2} : 1 : 1$ の直角三角形であり，$\angle\mathrm{HOA} = \theta = \pi/4$ となる．したがって，極座標は次の通りとなる．

$$1 + j \to \left(\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}\right)$$

また，極座標表示は次の通りとなる．

$$1 + j = \sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$$

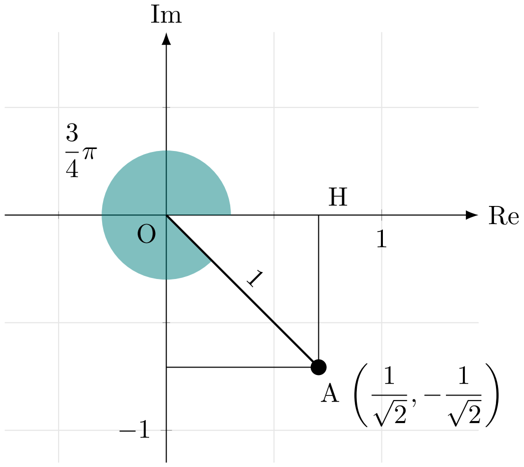


(2) 原点からの距離 r は，$r = \sqrt{(\sqrt{3}/2)^2 + (1/2)^2} = 1$ である．また，三角形 OAH は OA : AH : HO $= 2 : \sqrt{3} : 1$ の直角三角形であり，$\angle\mathrm{HOA} = \theta = \pi/3$ となる．したがって，極座標は次の通りとなる．

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \to \left(1, \frac{\pi}{3}\right)$$

また，極座標表示は次の通りとなる．

$$\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2} \to e^{j\frac{\pi}{3}}$$



(3) 原点からの距離 r は，$r = \sqrt{(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2} = 1$ である．また，三角形 OAH は OA : AH : HO $= \sqrt{2} : 1 : 1$ の直角三角形であり，$\angle \mathrm{HOA} = \pi/4$，すなわち $\theta = 7\pi/4$ となる．したがって，極座標は次の通りとなる．

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} \to \left(1, \frac{7}{4}\pi\right)$$

また，極座標表示は次の通りとなる．

$$\frac{1}{\sqrt{2}} - j\frac{1}{\sqrt{2}} = e^{j\frac{7}{4}\pi}$$

【4】 まずは指数を簡単な形へと変換し，その後，次式で直交座標表示へと置き換える．

$$re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta) \tag{A5.1}$$

(1) 指数を簡単な形へ変換する．

$$2e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\frac{\pi}{3}} = 2e^{j\frac{\pi}{2}+j\frac{\pi}{3}} = 2e^{j\frac{5}{6}\pi}$$

式（A5.1）によって直交座標表示を得る．

$$2e^{j\frac{5}{6}\pi} = 2\left(\cos\frac{5}{6}\pi + j\sin\frac{5}{6}\pi\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + j\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} + j$$

(2) 指数を簡単な形へ変換する．

$$\left(e^{j\frac{\pi}{8}}\right)^2 = e^{j\frac{\pi}{8}\cdot 2} = e^{j\frac{\pi}{4}}$$

式（A5.1）によって直交座標表示を得る．

$$e^{j\frac{\pi}{4}} = \cos\frac{\pi}{4} + j\sin\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j\frac{1}{\sqrt{2}}$$

(3) 指数を簡単な形へ変換する．

$$\frac{6e^{j\frac{4}{3}\pi}}{3e^{j\frac{\pi}{6}}} = 2e^{j\frac{4}{3}\pi - j\frac{\pi}{6}} = 2e^{j\frac{7}{6}\pi}$$

式（A5.1）によって直交座標表示を得る．

$$2e^{j\frac{7}{6}\pi} = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - j\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3} - j$$

【5】

(1) 複素数の基本的な演算に基づいて計算する．

$$[r(\cos\theta + j\sin\theta)]^2 = r^2(\cos\theta + j\sin\theta)^2 = r^2\left(\cos^2\theta + 2j\cos\theta\sin\theta + j^2\sin^2\theta\right) = r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2j\cos\theta\sin\theta\right)$$

(2) 三角比の加法定理から，次式が成り立つ．

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta$$
$$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$$

したがって，(1) で得た式は次の通り変換できる．

$$r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2j\cos\theta\sin\theta\right) = r^2(\cos 2\theta + j\sin 2\theta)$$

(3) $n=2$ におけるド・モアブルの定理は次の通りである．

$$[r(\cos\theta + j\sin\theta)]^2 = r^2(\cos 2\theta + j\sin 2\theta) \tag{A5.2}$$

(1) の結果から，左辺は次の通り変換できる．

$$(\text{左辺}) = [r(\cos\theta + j\sin\theta)]^2 = r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta + 2j\cos\theta\sin\theta\right)$$

さらに (2) により，次の通り変換できる．

$$(\text{左辺}) = r^2(\cos 2\theta + j\sin 2\theta)$$

したがって，（左辺）＝（右辺）となり，ド・モアブルの定理は成立する．

第 6 章　微分・偏微分

【1】

(1) $\left(3x^3-2x^2+6x+3\right)' == 3\cdot(3x^2)-2\cdot(2x)+6\cdot 1+3\cdot 0 = 9x^2-4x+6$

(2) $\left(\sqrt{x+2}\right)' = \left[(x+2)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2}(x+2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2(x+2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{2\sqrt{x+2}}$

(3) $[(3x-1)\sin x]' = (3x-1)'\sin x+(3x-1)(\sin x)' = 3\sin x+(3x-1)\cos x$

(4) $\left(\frac{x}{x+1}\right)' = \frac{(x)'(x+1)-x(x+1)'}{(x+1)^2} = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

【2】 合成関数 $f(x)=g(u(x))$ は，$g(u)$ および $u(x)$ を適切に（微分できるように）定義できれば，$f(x)$ そのものも微分できるようになる．合成関数 $f(x)=g(u(x))$ の微分は次式によって導ける．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx} \tag{A6.1}$$

(1) $u(x)=\sin x$，$g(u)=u^4$ とおくと，与式は合成関数 $g(u(x))$ となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(u^4\right)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)=4u^3\cdot\cos x=4\sin^3 x\cos x$$

(2) $u(x)=\sin x$，$g(u)=\sqrt{u}$ とおくと，与式は合成関数 $g(u(x))$ となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot\cos x=\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$$

(3) はじめに，加法定理により式変換を行う．

$$\sin x\cos x=\frac{1}{2}\sin 2x$$

$u(x)=2x$，$g(u)=\frac{1}{2}\sin u$ とおくと，与式は合成関数 $g(u(x))$ となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(\frac{1}{2}\sin u\right)\cdot\frac{d}{dx}(2x)=\frac{\cos u}{2}\cdot 2=\cos 2x$$

(4) $u(x)=-x^2$，$g(u)=e^u$ とおくと，与式は合成関数 $g(u(x))$ となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(e^u\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(-x^2\right)=e^u\cdot(-2x)=-2xe^{-x^2}$$

(5) $u(x)=\sin x$，$g(u)=e^u$ とおくと，与式は合成関数 $g(u(x))$ となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(e^u\right)\cdot\frac{d}{dx}(\sin x)=e^u\cdot\cos x=e^{\sin x}\cos x$$

(6) (4) にならい，$1+e^{x^2}$ の導関数を求めておく．$u(x)=x^2$，$g(u)=1+e^u$ とおくと，$1+e^{x^2}$ は合成関数となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{d}{dx}\left(1+e^{x^2}\right)=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(1+e^u\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(x^2\right)=e^u\cdot(2x)=2xe^{x^2}$$

つぎに，$u(x)=1+e^{x^2}$，$g(u)=\sqrt{u}$ とおくと，与式は合成関数 $g(u(x))$ となる．したがって，式（A6.1）によって次式を得る．

$$\frac{df}{dx}=\frac{dg}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{d}{du}\left(\sqrt{u}\right)\cdot\frac{d}{dx}\left(1+e^{x^2}\right)=\frac{1}{2\sqrt{u}}\cdot 2xe^{x^2}=\frac{xe^{x^2}}{\sqrt{1+e^{x^2}}}$$

【3】 媒介変数関数の微分は次式で計算できる．

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{1}{\dfrac{dx}{dt}} \tag{A6.2}$$

(1) y，x をそれぞれ t について微分する．

$$\frac{dy}{dt} = b\cos t \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = -a\sin t$$

したがって，式（A6.2）により，次式の解を得る．

$$\frac{dy}{dx} = b\cos t \cdot \frac{1}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\frac{1}{\tan t}$$

(2) y，x をそれぞれ t について微分する．

$$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 4t = 4t(t-1)(t+1) \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = t - 1$$

したがって，式（A6.2）により，次式の解を得る．

$$\frac{dy}{dx} = 4t(t-1)(t+1) \cdot \frac{1}{t-1} = 4t(t+1)$$

【4】 $y = f(x)$ の逆関数を $g = f^{-1}(x)$ とするとき，g の微分は次式で計算できる．

$$\frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{\dfrac{df}{dx}(g(x))} \tag{A6.3}$$

そこで，与式を $y = g(x)$ とおく．

$$g(x) = \arccos x \ (-1 < x < 1) \qquad f(x) = g^{-1}(x) = \cos x \ (0 < x < \pi) \qquad f'(x) = -\sin x \ (0 < x < \pi)$$

したがって，式（A6.3）により，次式を得る．

$$y' = \frac{dg}{dx}(x) = \frac{1}{-\sin(\arccos x)} = -\frac{1}{\sin y}$$

$x = \cos y$ であるので，$\cos^2 y + \sin^2 y = 1$ から次式が導かれる．

$$\sin^2 y = 1 - \cos^2 y = 1 - x^2$$
$$\sin y = \pm\sqrt{1 - x^2}$$

ここで，$0 < y < \pi$ から，$\sin y > 0$ であり，$\sin y = \sqrt{1 - x^2}$ となる．したがって，次式の解を得る．

$$y' = -\frac{1}{\sin y} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$$

【5】 解き方 6.7 に従って計算する．

(1) x についての偏微分では，y を定数として扱う．

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = 2 \cdot 2x - 1 \cdot 4y^2 + 0 = 4x - 4y^2$$

y についての偏微分では，x を定数として扱う．

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = 0 - 4x \cdot 2y + 3 \cdot 2y = -8xy + 6y$$

(2) $u = x^2 + 3xy$ とおいておき，合成関数の微分として解く．u の x および y についての偏導関数は次の通り．

$$u = x^2 + 3xy \qquad u_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 3y \qquad u_y = \frac{\partial u}{\partial y} = 3x$$

まず，f の x についての偏導関数を求める．

$$f(x, y) = y\sqrt{u} = y \cdot u^{\frac{1}{2}}$$
$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = y \cdot \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial x}\right) = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}}(2x+3y) = \frac{y(2x+3y)}{2\sqrt{x^2+3xy}}$$

つぎに，f の y についての偏導関数を求める[*1]．

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = y \cdot \left(\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}} \cdot \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u^{\frac{1}{2}} = y \cdot \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot 3x + \sqrt{u} = \frac{3xy + 2u}{2\sqrt{u}} = \frac{3xy + 2\left(x^2+3xy\right)}{2\sqrt{x^2+3xy}}$$
$$= \frac{2x^2 + 9xy}{2\sqrt{x^2+3xy}}$$

(3) 与式は x についての関数と y についての関数の積となっている．x についての偏導関数では，y についての関数も定数として扱う．

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \left(2e^{2x}\right) \cdot \cos 2y = 2e^{2x}\cos 2y$$

y についての偏導関数では，x についての関数も定数として扱う．

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = e^{2x}\left(-2\sin 2y\right) = -2e^{2x}\sin 2y$$

(4) 商の微分の公式にしたがって，下記の通り導出できる．

$$f' = \frac{(2xy)'\left(x^2+y^2\right) - 2xy\left(x^2+y^2\right)'}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

x についての偏導関数は，$'$ を $\partial/\partial x$ とみて，次の通り解を求める．

$$f_x = \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{2y\left(x^2+y^2\right) - 2xy \cdot 2x}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2y\left(x^2+y^2\right) - 2y \cdot 2x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = -\frac{2y\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

y についての偏導関数は，$'$ を $\partial/\partial y$ とみて，次の通り解を求める．

$$f_y = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - 2xy \cdot 2y}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x\left(x^2+y^2\right) - 2x \cdot 2y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2} = \frac{2x\left(x^2-y^2\right)}{\left(x^2+y^2\right)^2}$$

【6】

(1) まずは一階の偏導関数を求める．

$$f_x = 3 \cdot (2x) \cdot y = 6xy, \qquad f_y = 3x^2 \cdot 1 - 3y^2 = 3x^2 - 3y^2$$

つぎに，一階の偏導関数をさらに偏微分して二階の偏導関数を得る．

$$f_{xx} = 6y \cdot 1 = 6y, \qquad f_{xy} = 6x \cdot 1 = 6x, \qquad f_{yx} = 6x - 0 = 6x, \qquad f_{yy} = 0 - 6y = -6y$$

(2) まずは一階の偏導関数を求める．

$$f_x = e^x\cos 3y, \qquad f_y = e^x \cdot (-3\sin 3y) = -3e^x\sin 3y$$

つぎに，一階の偏導関数をさらに偏微分して二階の偏導関数を得る．

$$f_{xx} = e^x\cos 3y, \quad f_{xy} = e^x \cdot (-3\sin 3y) = -3e^x\sin 3y, \quad f_{yx} = -3e^x\sin 3y, \quad f_{yy} = -3e^x(3\cos 3y) = -9e^x\cos 3y$$

*1 積の微分を思い出そう．

第 7 章　積分

以下，特に断りのない限り C を積分定数とする．

【1】 不定積分の各種公式にしたがって計算する．

(1)
$$\int \left(5x^2 - 3x + 1\right)\, dx = 5 \cdot \frac{1}{3}x^3 - 3 \cdot \frac{1}{2}x^2 + x + C = \frac{5}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x + C$$

(2)
$$\int \frac{x+1}{x^3}\, dx = \int \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3}\right)\, dx = \int \left(x^{-2} + x^{-3}\right)\, dx = \frac{1}{-1}x^{-1} + \frac{1}{-2}x^{-2} + C = -\frac{1}{x} - \frac{1}{2x^2} + C$$

(3)
$$\int \sin^2 x\, dx = \int \frac{1 - \cos 2x}{2}\, dx = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{\cos 2x}{2}\right)\, dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}\sin 2x + C = \frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\sin 2x + C$$

【2】 置換積分では，$u = f(x)$ を定めて，x についての積分を u についての積分に置き換える．

(1) $u = 3x - 2$ とおくと，$du/dx = 3$ から，次式の通り置き換えられる．

$$\int (3x-2)^5\, dx = \int u^5 \cdot \underbrace{\frac{1}{3}\frac{du}{dx}}_{1}\, dx = \int \frac{u^5}{3}\, du$$

得られた式を積分すると次式となる．

$$\int \frac{u^5}{3}\, du = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{6}u^6 + C = \frac{1}{18}u^6 + C$$

したがって，$u = 3x - 2$ を元に戻せば，解として次式を得る．

$$\int (3x-2)^5\, dx = \frac{1}{18}(3x-2)^6 + C$$

(2) $u = 1 + x^2$ とおくと，$du/dx = 2x$ から，次式の通り置き換えられる．

$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \int x\sqrt{u} \cdot \underbrace{\frac{1}{2x}\frac{du}{dx}}_{1}\, dx = \int \frac{\sqrt{u}}{2}\, du$$

得られた式を積分すると次式となる．

$$\int \frac{\sqrt{u}}{2}\, du = \int \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}}u^{-\frac{1}{2}} + C = \frac{1}{\sqrt{u}} + C$$

したがって，$u = 1 + x^2$ をもとに戻せば，解として次式を得る．

$$\int x\sqrt{1+x^2}\, dx = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} + C$$

(3) $u = \sin x$ とおくと，$du/dx = \cos x$ から，次式の通り置き換えられる．

$$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \int u^4 \cos x \cdot \underbrace{\frac{1}{\cos x}\frac{du}{dx}}_{1}\, dx = \int u^4\, du$$

得られた式を積分すると次式となる．

$$\int u^4\, du = \frac{1}{5}u^5 + C$$

したがって，$u = \sin x$ をもとに戻せば，解として次式を得る．

$$\int \sin^4 x \cos x\, dx = \frac{1}{5}\sin^5 x + C$$

【3】 部分積分の公式は次の通りである．

$$\int [f(x) \cdot g'(x)]\, dx = f(x) \cdot g(x) - \int [f'(x) \cdot g(x)]\, dx \tag{A7.1}$$

(1) $f(x) = x$，$g'(x) = e^x$，$g(x) = e^x$ として式（A7.1）に当てはめる．

$$\int xe^x\, dx = x \cdot e^x - \int (x)' \cdot e^x\, dx = xe^x - \int e^x\, dx = xe^x - e^x + C = e^x(x-1) + C$$

(2) $f(x) = x$，$g'(x) = \cos x$，$g(x) = \sin x$ として式（A7.1）に当てはめる．

$$\int x\cos x\, dx = x \cdot \sin x - \int (x)' \sin x\, dx = x\sin x - \int \sin x\, dx = x\sin x + \cos x + C$$

(3) $f(x) = \ln(x)$，$g'(x) = 1$，$g(x) = x$ として式（A7.1）に当てはめる．

$$\int \ln(x)\, dx = \ln x \cdot x - \int \frac{1}{x} \cdot x\, dx = x\ln x - \int 1\, dx = x\ln x - x + C = x(\ln x - 1) + C$$

【4】 まず不定積分を求め，$F(x)$ を導く．その後，$F(b) - F(a)$ によって定積分を計算する．

(1) まずは不定積分を求める．

$$\int \left(x^3 + x^2\right)\, dx = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{3}x^3 + C = F(x) + C$$

したがって，定積分は次式の通り得られる．

$$\int_0^1 \left(x^3 + x^2\right)\, dx = F(1) - F(0) = \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{3}\right) - 0 = \frac{7}{12}$$

(2) まずは不定積分を求める．

$$\int \sqrt{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{2}}\, dx = \frac{1}{3/2}x^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C = F(x) + C$$

したがって，定積分は次式の通り得られる．

$$\int_0^2 \sqrt{x}\, dx = F(4) - F(0) = \left(\frac{2}{3} \cdot 4\sqrt{4}\right) - 0 = \frac{16}{3}$$

(3) まずは不定積分を求める．本問題の不定積分は【2】(3) と同様にして求まる．

$$\int \sin^2 x \cos x\, dx = \frac{1}{3}\sin^3 x + C = F(x) + C$$

したがって，定積分は次式の通り得られる．

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \cos x\, dx = F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F(0) = \left(\frac{1}{3}\sin^3 \frac{\pi}{2}\right) - 0 = \frac{1}{3}$$

【5】 回路に流れる電流 i は，オームの法則から次式となる．

$$i(t) = \frac{v(t)}{R} = \frac{5\sin(10t)}{20} = \frac{1}{4}\sin(10t)\ [\mathrm{A}] \tag{A7.2}$$

電力の定義式 $P = V \cdot I$ に与えられた電圧，求めた電流をそれぞれ当てはめれば，電力 p として次式を得る．

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = 5\sin(10t) \cdot \frac{1}{4}\sin(10t) = \frac{5}{4}\sin^2(10t) = \frac{5}{4} \cdot \frac{1 - 2\cos(20t)}{2} = \frac{5}{8}[1 - 2\cos(20t)]\ [\mathrm{W}] \tag{A7.3}$$

$\cos(20t)$ は周期 $\pi/10$ の周期関数であるため[*1]，$p(t)$ もまた周期 $\pi/10$ の周期関数である．したがって，平均電力は次式で導かれる．

$$\begin{aligned} P_{\mathrm{avg}} &= \frac{1}{\pi/10}\int_0^{\pi/10} \frac{5}{8}[1 - 2\cos(20t)]\, dt = \frac{10}{\pi} \cdot \frac{5}{8}\left[t - 2 \cdot \frac{1}{20}\sin(20t)\right]_0^{\pi/10} \\ &= \frac{10}{\pi} \cdot \frac{5}{8}\left[\frac{\pi}{10} - \frac{1}{10}\sin\left(20 \cdot \frac{\pi}{10}\right)\right] = \frac{5}{8} = 0.625\ [\mathrm{W}] \end{aligned}$$

[*1] $\omega = 20$ より，$T = 2\pi/\omega = \pi/10$ である．

第 8 章　１階の微分方程式

【１】 実際に y の導関数を求め，与式に代入することで確かめる．

(1) $y = Ce^{-3t}$ を t について微分すると次式となる．

$$y' = C \cdot (-3)e^{-3t} = -3Ce^{-3t}$$

したがって，与式の左辺は次の通り計算できる．

$$y' + 3y = -3Ce^{-3t} + 3Ce^{-3t} = 0$$

ゆえに，$y = Ce^{-3t}$ は常に与えられた微分方程式を満たす．　□

(2) $y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$ を t について微分すると次式となる．

$$\begin{aligned} y' &= C_1 \cdot (-3\sin 3t) + C_2 \cdot (3\cos 3t) = -3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t \\ y'' &= -3C_1(3\cos 3t) + 3C_2(-3\sin 3t) = -9C_1 \cos 3t - 9C_2 \sin 3t \end{aligned}$$

したがって，与式の左辺は次の通り計算できる．

$$y'' + 9y = -9C_1 \cos 3t - 9C_2 \sin 3t + 9\left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right) = 0$$

ゆえに，$y = C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t$ は常に与えられた微分方程式を満たす．　□

(3) $y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ を t について微分すると次式となる．

$$\begin{aligned} y' &= C_1 e^t - C_2 e^{-t} \\ y'' &= C_1 e^t + C_2 e^{-t} \end{aligned}$$

したがって，与式の左辺は次の通り計算できる．

$$y'' - y = \left(C_1 e^t + C_2 e^{-t}\right) - \left(C_1 e^t + C_2 e^{-t}\right) = 0$$

ゆえに，$y = C_1 e^t + C_2 e^{-t}$ は常に与えられた微分方程式を満たす．　□

【２】 変数を分離し，両辺を t によって積分して解を求める．

(1)

$$\begin{aligned} y' - t^2 &= 0 \\ y' &= t^2 \\ \frac{dy}{dt} &= t^2 \\ \int \frac{dy}{dt}\,dt &= \int t^2\,dt \\ \int dy &= \frac{1}{3}t^3 + C \\ y &= \frac{1}{3}t^3 + C \end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
y' + 2y &= 0 \\
y' &= -2y \\
\frac{1}{y}y' &= -2 \quad (\text{ただし } y \neq 0) \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt &= \int (-2)\,dt \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= -2t + C \\
\ln|y| &= -2t + C \\
|y| &= e^{-2t+C} = Ce^{-2t} \quad (e^C \to C > 0) \\
y &= Ce^{-2t} \quad (C > 0 \to C \neq 0)
\end{aligned}$$

ここで，$y = 0$ は与えられた微分方程式を常に満たすため，$y = 0$ も解として認められる．したがって，一般解は次の通り求まる．

$$y = Ce^{-2t}$$

ただし，C は任意の実数である．

【3】

(1)

$$\begin{aligned}
yy' + t^2 - 3 &= 0 \\
yy' &= -t^2 + 3 \\
\int y\frac{dy}{dt}\,dt &= \int \left(-t^2 + 3\right)\,dt \\
\int y\,dy &= -\frac{1}{3}t^3 + 3t + C \\
\frac{1}{2}y^2 &= -\frac{1}{3}t^3 + 3t + C \\
y^2 &= -\frac{2}{3}t^3 + 6t + C
\end{aligned}$$

ここで，初期条件 $y(0) = \sqrt{3} > 0$ より，$y > 0$ であるため，求める一般解は次式となる．

$$y(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}t^3 + 6t + C}$$

また，$t = 0$ において $y = \sqrt{3}$ となるため，任意定数 C は次式の通り求まる．

$$\begin{aligned}
y(0) = \sqrt{C} &= \sqrt{3} \\
C &= 3
\end{aligned}$$

ゆえに，初期値問題の解は次式となる．

$$y(t) = \sqrt{-\frac{2}{3}t^3 + 6t + 3}$$

(2)

$$
\begin{aligned}
3ty' - 2y &= 0 \\
3ty' &= 2y \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{2}{3t} \quad (\text{ただし}\, t \neq 0, y \neq 0) \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt &= \int \frac{2}{3t}\,dt \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \frac{2}{3}\ln|t| + C = \ln|t^{2/3}| + \ln|C| \quad (C \to \ln|C|, C \neq 0) \\
\ln|y| &= \ln|Ct^{2/3}| \\
y &= Ct^{2/3}
\end{aligned}
$$

ここで，$t = 0$ のとき，与式から $0 - 2y = 0 \to y = 0$ となり，$(t, y) = (0, 0)$ は与えられた微分方程式の解として認められる．したがって，$C = 0$ においても求めた解は満たされ，一般解として次式を得る．

$$y(t) = Ct^{2/3}$$

また，$t = 1$ において初期条件 $y(1) = 9$ となるため，任意定数 C は次式の通り求まる．

$$
\begin{aligned}
y(1) = C \cdot 1 &= 9 \\
C &= 9
\end{aligned}
$$

ゆえに，初期値問題の解は次式となる．

$$y(t) = 9t^{2/3}$$

【4】

(1) 式（8.19）の補関数は，微分方程式 $4\dfrac{dy}{dt} - y = 0$ の解である．これを変数分離法によって解く．

$$
\begin{aligned}
4y' - y &= 0 \\
\frac{1}{y}y' &= \frac{1}{4} \quad (\text{ただし}\, y \neq 0) \\
\int \frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt &= \int \frac{1}{4}\,dt \\
\int \frac{1}{y}\,dy &= \frac{1}{4}t + C \\
\ln|y| &= \frac{1}{4}t + C \\
|y| &= e^{t/4 + C} = Ce^{t/4} \quad (e^C \to C > 0) \\
y &= Ce^{t/4} \quad (C > 0 \to C \neq 0)
\end{aligned}
$$

ここで，$y = 0$ は常に $4y' - y = 0$ を満たす．すなわち，求める補関数は次式となる．

$$y = Ce^{t/4}$$

ただし，C は任意の実数である．

(2) 解き方 8.4 にしたがい，$y' = 0$ と置いて定常解を求める．

$$4 \cdot 0 - y = 4 \quad \Rightarrow \quad y = -4$$

(3) 一般解は補関数と定常解の和となるため，下記の通り求まる．

$$y = Ce^{t/4} + (-4) = -4 + Ce^{t/4}$$

(4) 初期条件 $y(0)=-2$ により，$t=0$ のとき $y=-2$ である．

$$y(0)=-4+Ce^0=-4+C=-2 \quad \Rightarrow \quad C=2$$

したがって，求める初期値問題の解は次の通りとなる．

$$y(t)=-4+2e^{t/4}$$

(5) まず，初期値を確認する．

$$y(0)=-4+2e^0=-4+2=-2$$

$y(0)=-2$ を確認できた．次に，求めた関数が微分方程式を満たすかを確かめる．(4) の解について，導関数を予め求めておく．

$$y'=2\cdot\frac{1}{4}e^{t/4}=\frac{1}{2}e^{t/4}$$

ここで，y' および y を与式に代入する．

$$\begin{aligned}&(\text{左辺})=4y'-y=4\cdot\frac{1}{2}e^{t/4}-\left(-4+2e^{t/4}\right)=2e^{t/4}+4-2e^{t/4}=4\\&(\text{右辺})=4\end{aligned}$$

したがって，左辺と右辺は等しく，求めた関数は与式を満たす．　□

【5】

(1) 式（8.20）の補関数は，微分方程式 $\dfrac{dy}{dt}+5y=0$ の解である．これを変数分離法によって解く．

$$\begin{aligned}y'+5y&=0\\\frac{1}{y}y'&=-5\quad(\text{ただし}\ y\neq0)\\\int\frac{1}{y}\frac{dy}{dt}\,dt&=\int(-5)\,dt\\\int\frac{1}{y}\,dy&=-5t+C\\\ln|y|&=-5t+C\\|y|&=e^{-5t+C}=Ce^{-5t}\quad(e^C\to C>0)\\y&=Ce^{-5t}\quad(C>0\to C\neq0)\end{aligned}$$

ここで，$y=0$ は常に $y'+5y=0$ を満たす．すなわち，求める補関数は次式となる．

$$y=Ce^{-5t}$$

ただし，C は任意の実数である．

(2) 解き方 8.4 にしたがい，$y=c\cos t+d\sin t$ と置いて定常解を求める．まずは候補の解の導関数を求めておく．

$$y'=c\,(-\sin t)+d\cos t=-c\sin t+d\cos t$$

つぎに，与えられた微分方程式に y および y' を代入する．

$$\begin{aligned}y'+5y&=\sin t\\(-c\sin t+d\cos t)+5\,(c\cos t+d\sin t)&=\sin t\\(-c+5d)\sin t+(d+5c)\cos t&=\sin t\\(-c+5d-1)\sin t+(d+5c)\cos t&=0\end{aligned}$$

どのような t に対しても上式が成り立つためには，$\sin t$ および $\cos t$ の係数が 0 となる必要がある．

$$\begin{cases} -c+5d-1 &= 0 \\ d+5c &= 0 \end{cases}$$

これを解いて，$c=-1/26$，$d=5/26$ を得る．すなわち，次の関数 y が与えられた微分方程式を満たす定常解となる．

$$y=-\frac{1}{26}\cos t+\frac{5}{26}\sin t$$

(3) 一般解は補関数と定常解の和となるため，下記の通り求まる．

$$y=Ce^{-5t}+\left(-\frac{1}{26}\cos t+\frac{5}{26}\sin t\right)=Ce^{-5t}-\frac{1}{26}\cos t+\frac{5}{26}\sin t$$

(4) 初期条件 $y(0)=0$ により，$t=0$ のとき $y=0$ である．

$$y(0)=Ce^{0}-\frac{1}{26}\cos 0+\frac{5}{26}\sin 0=C-\frac{1}{26}=0 \quad\Rightarrow\quad C=\frac{1}{26}$$

したがって，求める初期値問題の解は次の通りとなる．

$$y(t)=\frac{1}{26}e^{-5t}-\frac{1}{26}\cos t+\frac{5}{26}\sin t$$

(5) まず，初期値を確認する．

$$y(0)=\frac{1}{26}e^{0}-\frac{1}{26}\cos 0+\frac{5}{26}\sin 0=\frac{1}{26}-\frac{1}{26}=0$$

$y(0)=0$ を確認できた．次に，求めた関数が微分方程式を満たすかを確かめる．(4) の解について，導関数を予め求めておく．

$$y'=-\frac{5}{26}e^{-5t}+\frac{1}{26}\sin t+\frac{5}{26}\cos t$$

ここで，y' および y を与式に代入する．

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= y'+5y=-\frac{5}{26}e^{-5t}+\frac{1}{26}\sin t+\frac{5}{26}\cos t+5\left(\frac{1}{26}e^{-5t}-\frac{1}{26}\cos t+\frac{5}{26}\sin t\right)\\ &=-\frac{5}{26}e^{-5t}+\frac{1}{26}\sin t+\frac{5}{26}\cos t+\frac{5}{26}e^{-5t}-\frac{5}{26}\cos t+\frac{25}{26}\sin t=\frac{26}{26}\sin t\\ &=\sin t\end{aligned}$$

したがって，左辺と右辺は等しく，求めた関数は与式を満たす． □

第 9 章　2 階の微分方程式

【1】

(1) y_1 を実際に式（9.14）に代入して確かめる．y_1 の導関数は次の通り求まる．

$$y_1' = -2e^{-2t}$$
$$y_1'' = 4e^{-2t}$$

したがって，与式の左辺は次の通り計算できる．

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 4e^{-2t} + 5\left(-2e^{-2t}\right) + 6\left(e^{-2t}\right) = 4e^{-2t} - 10e^{-2t} + 6e^{-2t} = 0$$

ゆえに，左辺と右辺は等しくなり，y_1 は与えられた微分方程式の解として認められる．　□

(2) y_2 を実際に式（9.14）に代入して確かめる．y_2 の導関数は次の通り求まる．

$$y_1' = -3e^{-3t}$$
$$y_1'' = 9e^{-3t}$$

したがって，与式の左辺は次の通り計算できる．

$$y_2'' + 5y_2' + 6y_2 = 9e^{-3t} + 5\left(-3e^{-3t}\right) + 6\left(e^{-3t}\right) = 9e^{-3t} - 15e^{-3t} + 6e^{-3t} = 0$$

ゆえに，左辺と右辺は等しくなり，y_2 は与えられた微分方程式の解として認められる．　□

(3) (1) および (2) の結果から，次式が満たされる．

$$y_1'' + 5y_1' + 6y_1 = 0$$
$$y_2'' + 5y_2' + 6y_2 = 0$$

微分演算には線形性[*1] がある．したがって，上記 2 式は次の通り変換できる．

$$(C_1y_1)'' + 5(C_1y_1)' + 6(C_1y_1) = 0 \quad (y_1 \to C_1y_1)$$
$$(C_2y_2)'' + 5(C_2y_2)' + 6(C_2y_2) = 0 \quad (y_2 \to C_2y_2)$$

$$(C_1y_1 + C_2y_2)'' + 5(C_1y_1 + C_2y_2)' + 6(C_1y_1 + C_2y_2) = 0 \quad (\text{上記 2 式の足し合わせ})$$

ゆえに，$C_1y_1 + C_2y_2$ は与えられた微分方程式の解として認められる．　□

【2】

(1-1) 与えられた微分方程式の解を $y = Ce^{\lambda t}$ と仮定し，式へ代入する．まず，導関数を求めておく．

$$y' = C\lambda e^{\lambda t}, \qquad y'' = C\lambda^2 e^{\lambda t}$$

これらを与えられた微分方程式へ代入する．

$$y'' - 9y = 0$$
$$C\lambda^2 e^{\lambda t} - 9Ce^{\lambda t} = 0$$

[*1] 例えば，$[f(x) + g(x)]' = f'(x) + g'(x)$ であったり，$[Cf(x)]' = Cf'(x)$ と変換できる．

$C \neq 0$ のとき，$Ce^{\lambda t} \neq 0$ から，両辺を $Ce^{\lambda t}$ で割る．

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 9 &= 0 \\ \lambda &= \pm 3 \end{aligned}$$

したがって，表 9.1 から，微分方程式の解として次式を得る．

$$y = C_1 e^{-3t} + C_2 e^{3t}$$

なお，$C = 0$ の場合は $y = 0$ となり，与えられた微分方程式を満たす．$y = 0$ は $C_1 = C_2 = 0$ の解と対応する．

(1-2) まず，一般解の導関数を求めておく．

$$y' = -3C_1 e^{3t} + 3C_2 e^{3t}$$

つぎに，初期条件 $y'(0) = 4, y(0) = 0$ を代入する．

$$\begin{aligned} y'(0) &= -3C_1 e^0 + 3C_2 e^0 = -3C_1 + 3C_2 = 4 \\ y(0) &= C_1 e^0 + C_2 e^0 = C_1 + C_2 = 0 \end{aligned}$$

ゆえに，$C_1 = -2/3, C_2 = 2/3$ であり，初期値問題の解は次の通り求まる．

$$y = -\frac{2}{3}e^{-3t} + \frac{2}{3}e^{3t}$$

(3) 与えられた微分方程式の解を $y = Ce^{\lambda t}$ と仮定し，式へ代入する．まず，導関数を求めておく．

$$y' = C\lambda e^{\lambda t}, \qquad y'' = C\lambda^2 e^{\lambda t}$$

これらを与えられた微分方程式へ代入する．

$$\begin{aligned} y'' - 6y' + 13y &= 0 \\ C\lambda^2 e^{\lambda t} - 6C\lambda e^{\lambda t} + 13Ce^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

$C \neq 0$ のとき，$Ce^{\lambda t} \neq 0$ から，両辺を $Ce^{\lambda t}$ で割る．

$$\begin{aligned} \lambda^2 - 6\lambda + 13 &= 0 \\ \lambda &= 3 \pm j2 \end{aligned}$$

したがって，表 9.1 から，微分方程式の解として次式を得る．

$$y = C_1 e^{3t}\cos 2t + C_2 e^{3t}\sin 2t$$

なお，$C = 0$ の場合は $y = 0$ となり，与えられた微分方程式を満たす．$y = 0$ は $C_1 = C_2 = 0$ の解と対応する．

(4) まず，一般解の導関数を求めておく．

$$\begin{aligned} y' &= \left(C_1 e^{3t}\cos 2t + C_2 e^{3t}\sin 2t\right)' \\ &= \left[e^{3t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right)\right]' \\ &= \left(e^3 t\right)'\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right) + e^{3t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right)' \\ &= 3e^{3t}\left(C_1\cos 2t + C_2\sin 2t\right) + e^{3t}\left(-2C_1\sin 2t + 2C_2\cos 2t\right) \\ &= e^{3t}\left[(3C_1 + 2C_2)\cos 2t + (-2C_1 + 3C_2)\sin 2t\right] \end{aligned}$$

つぎに，初期条件 $y'(0) = 3, y(0) = -1$ を代入する．

$$\begin{aligned} y'(0) &= e^0\left[(3C_1 + 2C_2)\cos 0 + (-2C_1 + 3C_2)\sin 0\right] = 3C_1 + 2C_2 = 3 \\ y(0) &= C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = C_1 = -1 \end{aligned}$$

ゆえに，$C_1 = -1, C_2 = 3$ であり，初期値問題の解は次の通り求まる．

$$y = -e^{3t}\cos 2t + 3e^{3t}\sin 2t$$

【3】

(1) 与式の解が式（9.15）の補関数となる．与式の解を $y = Ce^{\lambda t}$ と仮定して，式に代入する．

$$\begin{aligned} y'' + 6y'' + 5y &= 0 \\ \lambda^2 Ce^{\lambda t} + 6\lambda Ce^{\lambda t} + 5Ce^{\lambda t} &= 0 \end{aligned}$$

$C \neq 0$ のとき，$Ce^{\lambda t} \neq 0$ から，両辺を $Ce^{\lambda t}$ で割る．

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 6\lambda + 5 = 0 \\ \lambda = -1, -5 \end{aligned}$$

したがって，表 9.1 から，微分方程式の解として次式を得る．

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t}$$

なお，$C = 0$ の場合は $y = 0$ となり，与えられた微分方程式を満たす．$y = 0$ は $C_1 = C_2 = 0$ の解と対応する．

(2) 表 9.2 にしたがい，特殊解の候補を選ぶ．式（9.15）の右辺は三角関数であるため，$f_p(t) = c\cos t + d\sin t$ と仮定する．仮定した f_p の導関数は次の通り求まる．

$$f_p'(t) = -c\sin t + d\cos t, \qquad f_p''(t) = -c\cos t - d\sin t = -f_p(t)$$

式（9.15）の解として f_p を代入し，f_p が微分方程式を満たすよう c および d を定める．

$$\begin{aligned} f_p'' + 6f_p' + 5f_p &= 6\cos t \\ -f_p + 6\left(-c\sin t + d\cos t\right) + 5f_p &= 6\cos t \\ 4\underbrace{\left(c\cos t + d\sin t\right)}_{f_p} - 6c\sin t + 6d\cos t &= 6\cos t \\ (4c + 6d - 6)\cos t + (-6c + 4d)\sin t = 0 \end{aligned}$$

上式がどのような t に対しても恒等的に成り立つためには，三角関数のそれぞれの係数が 0 となれば良い．すなわち，次の連立方程式を満たす c, d を求める．

$$\begin{cases} 4c + 6d - 6 &= 0 \\ -6c + 4d &= 0 \end{cases}$$

これを解いて $c = 6/13$，$d = 9/13$ を得る．したがって，f_p は $c = 6/13$，$d = 9/13$ の元で与式を満たす．すなわち，特殊解は次式となる．

$$y = \frac{6}{13}\cos t + \frac{9}{13}\sin t$$

(3) 一般解は補関数と特殊解の和によって与えられる．したがって，(1) および (2) から次式の通り求まる．

$$y = C_1 e^{-t} + C_2 e^{-5t} + \frac{6}{13}\cos t + \frac{9}{13}\sin t$$

(4) 初期条件を代入するため，求めた一般解の導関数を計算しておく．

$$y' = -C_1 e^{-t} - 5C_2 e^{-5t} - \frac{6}{13}\sin t + \frac{9}{13}\cos t$$

$y(0) = 0$ および $y'(0) = 0$ を代入する．

$$\begin{aligned} y(0) &= C_1 e^0 + C_2 e^0 + \frac{6}{13}\cos 0 + \frac{9}{13}\sin 0 = C_1 + C_2 + \frac{6}{13} = 0 \\ y'(0) &= -C_1 e^0 - 5C_2 e^0 - \frac{6}{13}\sin 0 + \frac{9}{13}\cos 0 = -C_1 - 5C_2 + \frac{9}{13} = 0 \end{aligned}$$

これらを連立して解くと，$C_1 = -3/4$，$C_2 = 15/52$ を得る．したがって，初期値問題の解として次式を得る．

$$y = -\frac{3}{4}e^{-t} + \frac{15}{52}e^{-5t} + \frac{6}{13}\cos t + \frac{9}{13}\sin t$$

【4】

(1) 電源 E の正端子から回路に流れる電流を $i(t)$，抵抗，インダクタ，キャパシタの両端にかかる電圧をそれぞれ V_R, V_L, V_C と置く（電流の向きと矛盾しないように定義する）．キルヒホッフの電圧則により，次式が成り立つ．

$$E = V_R + V_L + V_C \tag{A9.1}$$

また，各素子の特性から，次式が成り立つ．

$$V_R = Ri = i, \tag{A9.2}$$
$$V_L = L\frac{di}{dt} = 0.5 \cdot \frac{di}{dt}, \tag{A9.3}$$
$$V_C = \frac{1}{C}q = 5q \tag{A9.4}$$

ここで，電流は電荷の速度に等しいことから，$i = dq/dt$ と書ける．したがって，V_R および V_L は次の通り書き換えられる．

$$V_R = \frac{dq}{dt} \tag{A9.5}$$
$$V_L = 0.5\frac{d^2q}{dt^2} \tag{A9.6}$$

式（A9.1-A9.6）をまとめて次式を得る．

$$\begin{aligned} V_R + V_L + V_C &= E \\ \frac{dq}{dt} + 0.5\frac{d^2q}{dt^2} + 5q &= 20 \\ \frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 10q &= 40 \end{aligned}$$

すなわち，求める LCR の回路方程式，すなわち 2 階の線形微分方程式は次式となる．

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 10q = 40$$

(2) $t = 0$ でスイッチをオンするため，$t = 0$ の瞬間では電流が流れておらず，電荷量も 0 である．したがって，次の通りの初期条件を得る．

$$q(0) = 0, \qquad q'(0) = i(0) = 0$$

(3) (1) の補関数は次の微分方程式の解である．

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 10q = 0$$

$q = Ce^{\lambda t}$ と仮定し，補助方程式を立てる．

$$\begin{aligned} \lambda^2 + 2\lambda + 10 &= 0 \\ \lambda &= -1 \pm j3 \end{aligned}$$

したがって，表 9.1 から，微分方程式の解として次式を得る．

$$q(t) = C_1e^{-t}\cos 3t + C_2e^{-t}\sin 3t$$

(4) (1) で求めた微分方程式の右辺が定数であるため，解き方 9.3 にしたがい，$q'' = q' = 0$ と置く．

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\frac{dq}{dt} + 10q = 0 + 2 \cdot 0 + 10q = 40 \quad \Leftrightarrow \quad q = 4$$

したがって，特殊解は次式の通り．

$$q(t) = 4 \tag{A9.7}$$

(5) 一般解は補関数と特殊解の和として得られる．したがって，(3) および (4) から次式の解を得る．

$$q(t) = 4 + C_1 e^{-t} \cos 3t + C_2 e^{-t} \sin 3t$$

(6) (5) で求めた一般解の導関数を求めておく．

$$\begin{aligned} q' &= 0 + \left[e^{-t} \left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right)\right]' \\ &= -e^{-t} \left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right) + e^{-t} \left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right)' \\ &= -e^{-t} \left(C_1 \cos 3t + C_2 \sin 3t\right) + e^{-t} \left(-3C_1 \sin 3t + 3C_2 \cos 3t\right) \\ &= e^{-t} \left[(-C_1 + 3C_2) \cos 3t + (-3C_1 - C_2) \sin 3t\right] \end{aligned}$$

初期条件 $q(0) = 0, q'(0) = 0$ から，C_1 および C_2 を求める．

$$\begin{aligned} q(0) &= 4 + C_1 e^0 \cos 0 + C_2 e^0 \sin 0 = 4 + C_1 = 0 \\ q(1) &= e^0 \left[(-C_1 + 3C_2) \cos 0 + (-3C_1 - C_2) \sin 0\right] = -C_1 + 3C_2 = 0 \end{aligned}$$

これを解いて，$C_1 = -4$，$C_2 = -4/3$ を得る．したがって，初期値問題の解は次の通り求まる．

$$q(t) = 4 - 4e^{-t} \cos 3t - \frac{4}{3} e^{-t} \sin 3t$$

第 10 章 ラプラス変換

【1】

(1) オイラーの公式により，次の通り表せる．

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\sin\theta$$

(2) (1) の θ を at および $-at$ に置き換えてみる．

$$\begin{aligned} e^{jat} &= \cos at + j\sin at \\ e^{-jat} &= \cos(-at) + j\sin(-at) = \cos at - j\sin at \end{aligned}$$

ここで，両辺を足し合わせると，次式を得る．

$$e^{jat} + e^{-jat} = 2\cos at$$

これを整理して，次式の解を得る．

$$\cos at = \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2}$$

(3) ラプラス変換の定義式にしたがって計算する．

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt &= \int_0^{\infty} \frac{e^{jat} + e^{-jat}}{2} e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} \frac{e^{(ja-s)t} + e^{(-ja-s)t}}{2}\,dt \\ &= \frac{1}{2}\left[\frac{1}{ja-s}e^{(ja-s)t} + \frac{1}{-ja-s}e^{(-ja-s)t}\right]_0^{\infty} \\ &= \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{ja-s} - \frac{1}{-ja-s}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{s-ja} + \frac{1}{s+ja}\right) = \frac{1}{2}\frac{2s}{s^2+a^2} \\ &= \frac{s}{s^2+a^2} \end{aligned}$$

したがって，$\cos at$ ラプラス変換は次式となる．

$$\frac{s}{s^2+a^2}$$

【2】

(1) ラプラス変換の定義式にしたがって計算する．

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}\,dt &= \int_0^{\infty} 4e^{-7t}e^{-st}\,dt = \int_0^{\infty} 4e^{(-7-s)t}\,dt \\ &= 4\left[\frac{1}{-7-s}e^{(-7-s)t}\right]_0^{\infty} = 4\left(-\frac{1}{-7-s}e^{0}\right) = \frac{4}{s+7} \end{aligned}$$

したがって，$4e^{-7}$ のラプラス変換は次式となる．

$$\frac{4}{s+7}$$

(2) ラプラス変換の表により，次式が成り立つ．

$$\mathcal{L}\left\{e^{-at}\right\}(s) = \frac{1}{s+a}$$

したがって，$4e^{-7t}$ のラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}\left\{4e^{-7t}\right\}(s) = 4\cdot\mathcal{L}\left\{e^{-7t}\right\}(s) = 4\cdot\frac{1}{s+7} = \frac{4}{s+7}$$

(3) (1) および (2) の計算結果は互いに等しい． □

【3】

(1) ラプラス変換の表により，次式が成り立つ．

$$\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}(s)=\frac{1}{s^3}$$

したがって，$3t^2$ のラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}\left\{3t^2\right\}(s)=6\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{t^2}{2}\right\}(s)=6\cdot\frac{1}{s^3}=\frac{6}{s^3}$$

(2) ラプラス変換の表により，次式が成り立つ．

$$\mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}\sin 5t\right\}(s)=\frac{1}{s^2+5^2}$$

したがって，$\sin 5t$ のラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}\left\{\sin 5t\right\}(s)=5\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{1}{5}\sin 5t\right\}(s)=5\cdot\frac{1}{s^2+5^2}=\frac{5}{s^2+25}$$

(3) ラプラス変換の表により，次式が成り立つ．

$$\mathcal{L}\left\{\cos\frac{t}{2}\right\}(s)=\frac{s}{s^2+(1/2)^2}$$

したがって，$\cos(t/2)$ のラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}\left\{\cos\frac{t}{2}\right\}(s)=\frac{s}{s^2+1/4}=\frac{4s}{4s^2+1}$$

【4】 推移則はラプラス変換において成り立つ次の法則である．

$$\mathcal{L}\left\{e^{at}f(t)\right\}(s)=F(s-a) \tag{A10.1}$$

ラプラス変換をする元の関数が e^{at} と何かしらの関数の積で表される場合，推移則によって計算を簡略化できる．

(1) $f(t)=t$ とみれば，与式は式（A10.1）の形式に一致する．したがって，まずは $f(t)=t$ のラプラス変換 $F(s)$ を求める．

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{t\right\}(s)=\frac{1}{s^2}$$

推移則から，与式は次の通り計算できる．

$$\mathcal{L}\left\{te^{-3t}\right\}(s)=F\left(s-(-3)\right)=F(s+3)=\frac{1}{(s+3)^2}$$

(2) $f(t)=t^3$ とみれば，与式は式（A10.1）の形式に一致する．したがって，まずは $f(t)=t^3$ のラプラス変換 $F(s)$ を求める．

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{t^3\right\}(s)=6\cdot\mathcal{L}\left\{\frac{t^3}{6}\right\}(s)=\frac{6}{s^4}$$

推移則から，与式は次の通り計算できる．

$$\mathcal{L}\left\{t^3e^{-t}\right\}(s)=F\left(s-(-1)\right)=F(s+1)=\frac{6}{(s+1)^4}$$

(3) $f(t)=4\sin t$ とみれば，与式は式（A10.1）の形式に一致する．したがって，まずは $f(t)=4\sin t$ のラプラス変換 $F(s)$ を求める．

$$F(s)=\mathcal{L}\left\{4\sin t\right\}(s)=4\cdot\mathcal{L}\left\{\sin t\right\}(s)=4\cdot\frac{1}{s^2+1}=\frac{4}{s^2+1}$$

推移則から，与式は次の通り計算できる．

$$\mathcal{L}\left\{4\sin te^{-2t}\right\}(s)=F\left(s-(-2)\right)=F(s+2)=\frac{4}{(s+2)^2+1}$$

【5】 ラプラス変換の表にしたがって逆変換する．

(1) 指数関数のラプラス変換に着目する．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t)=e^{-3t}$$

(2) $\sin at$ のラプラス変換に着目する．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+4}\right\}(t)=2\cdot\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+4}\right\}(t)=2\cdot\frac{1}{2}\sin 2t=\sin 2t$$

(3) n 次関数のラプラス変換に着目する．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\}(t)=\frac{t^3}{3!}=\frac{t^3}{6}$$

(4) 次の通り $F(s)$ を定義する．

$$F(s)=\frac{s}{s^2+4}$$

すると，与式は $F(s+3)$ となる．推移則から，$F(s+3)$ の逆ラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s+3)\right\}(t)=f(t)\cdot e^{-3t}$$

$F(s)$ の逆ラプラス変換 $f(t)$ は，$\cos t$ のラプラス変換に着目すると次式で得られる．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{F(s)\right\}(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2+4}\right\}(t)=\cos 2t$$

したがって，求める逆ラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s+3}{(s+3)^2+4}\right\}(t)=e^{-3t}\cos 2t$$

第 11 章　ラプラス変換で微分方程式を解く

【1】 1 階導関数のラプラス変換は次式となる．

$$\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) = sF(s) - f(0) = s\mathcal{L}\{f(t)\}(s) - f(0)$$

$f'' = (f')'$ に注意すれば，上式の $f(t)$ を $f'(t)$ に置き換えれば良いことに気がつく．すなわち，2 階導関数のラプラス変換は次の通り計算できる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\{f''(t)\}(s) &= \mathcal{L}\left\{[f'(t)]'\right\}(s) = s\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) - f'(0)\\ &= s[sF(s) - f(0)] - f'(0) = s^2F(s) - sf(0) - f'(0)\end{aligned}$$

求めた結果は式（11.1）に一致する．　□

【2】

(1-1) 与式が部分分数分解できると仮定し，次の形で記述する．

$$\frac{3s+1}{s^2+2s-3} = \frac{3s+1}{(s+3)(s-1)} = \frac{A}{s+3} + \frac{B}{s-1}$$

両辺に $(s+3)(s-1)$ をかけて次式を得る．

$$3s+1 = (s-1)A + (s+3)B$$

$s=1$ および $s=-3$ を代入すると，A，B がそれぞれ求まる．

$$\begin{aligned}3\cdot 1 + 1 &= 0\cdot A + 4\cdot B & B &= 1\\ 3\cdot(-3) + 1 &= (-4)\cdot A + 0\cdot B & A &= 2\end{aligned}$$

したがって，与式は次の形に部分分数分解できる．

$$\frac{3s+1}{s^2+2s-3} = \frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-1}$$

(1-2) ラプラス変換の表に基づき，逆ラプラス変換を行う．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s+3} + \frac{1}{s-1}\right\}(t) = 2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+3}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s-1}\right\}(t) = 2e^{-3t} + e^{t}$$

(2-1) 与式が部分分数分解できると仮定し，次の形で記述する．

$$\frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s(s+1)} = \frac{A}{s} + \frac{B}{s+1}$$

両辺に $s(s+1)$ をかけて次式を得る．

$$1 = (s+1)A + sB$$

$s=-1$ および $s=0$ を代入すると，A，B がそれぞれ求まる．

$$\begin{aligned}1 &= 0\cdot A + (-1)\cdot B & B &= -1\\ 1 &= 1\cdot A + 0\cdot B & A &= 1\end{aligned}$$

したがって，与式は次の形に部分分数分解できる．

$$\frac{1}{s^2+s} = \frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}$$

(2-2) ラプラス変換の表に基づき，逆ラプラス変換を行う．

$$\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s} - \frac{1}{s+1}\right\}(t) = \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t) = t^2 - e^{-t}$$

【3】

(1) 微分定理から，$f'(t)$ のラプラス変換は $F(s)$ および初期値 $f(0)$ によって記述できる．したがって，与えられた微分方程式のラプラス変換は次式となる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f'(t)+2f(t)\right\}(s)&=0\\ \mathcal{L}\left\{f'(t)\right\}(s)+2\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)&=0\\ sF(s)-f(0)+2F(s)&=0\\ (s+2)F(s)&=f(0)=3\\ F(s)&=\frac{3}{s+2}\end{aligned}$$

(2) (1) で得たラプラス変換を逆変換し，$f(t)$ を求める．

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{3}{s+2}\right\}(t)=3\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+2}\right\}(t)=3e^{-2t}$$

【4】

(1) 微分定理から，$f'(t)$ および $f''(t)$ のラプラス変換は $F(s)$ および初期値 $f(0), f'(0)$ によって記述できる．したがって，与えられた微分方程式のラプラス変換は次式となる．

$$\begin{aligned}\mathcal{L}\left\{f''(t)+9f(t)\right\}(s)&=0\\ \mathcal{L}\left\{f''(t)\right\}(s)+9\mathcal{L}\left\{f(t)\right\}(s)&=0\\ s^2F(s)-sf(0)-f'(0)+9F(s)&=0\\ (s^2+9)F(s)&=sf(0)+f'(0)=s\cdot 0+2=2\\ F(s)&=\frac{2}{s^2+9}\end{aligned}$$

(2) (1) で得たラプラス変換を逆変換し，$f(t)$ を求める．

$$f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{2}{s^2+9}\right\}(t)=2\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+9}\right\}(t)=2\cos 3t$$

【5】 5-1：直接解く方法

(1) 与式の補助方程式は次の通り．

$$\lambda+1=0 \quad\rightarrow\quad \lambda=-1$$

したがって，補関数は次式となる．

$$f(t)=Ce^{-t}$$

(2) 表 9.2 にしたがい，特殊解の候補を $f_p(t)=At+B$ とおく．候補の解を微分方程式に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}A+At+B&=t\\ A+B+(A-1)t&=0\end{aligned}$$

これを解いて，$A=1, B=-1$ を得る．したがって，特殊解として次式を得る．

$$f_p(t)=t-1$$

(3) 一般解は補関数と特殊解の和として求まるため，(2) および (3) から次式で得られる．

$$f(t)=Ce^{-t}+t-1$$

(4) 初期条件 $f(0)=0$ により，次式が成り立つ．

$$f(0)=Ce^0+0-1=C-1=0 \quad\rightarrow\quad C=1$$

したがって，求める初期値問題の解は次式となる．

$$f(t) = e^{-t} + t - 1$$

5-2：ラプラス変換で解く方法

(1) 微分定理から，$f'(t)$ のラプラス変換は $F(s)$ および初期値 $f(0)$ によって記述できる．したがって，与えられた微分方程式のラプラス変換は次式となる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\{f'(t) + f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t\}(s) \\
\mathcal{L}\{f'(t)\}(s) + \mathcal{L}\{f(t)\}(s) &= \mathcal{L}\{t\}(s) \\
sF(s) - f(0) + F(s) &= \frac{1}{s^2} \\
(s+1)F(s) &= \frac{1}{s^2} + f(0) = \frac{1}{s^2} \\
F(s) &= \frac{1}{s^2(s+1)}
\end{aligned}$$

(2) (1) で得たラプラス変換を逆変換し，$f(t)$ を求める．まずは部分分数分解を試みる．

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{A}{s^2} + \frac{B}{s} + \frac{C}{s+1}$$

両辺に $s^2(s+1)$ をかけて次式を得る．

$$1 = (s+1)A + s(s+1)B + s^2C \tag{A11.1}$$

$s = -1$ および $s = 0$ を代入すると，A，C がそれぞれ求まる．

$$\begin{aligned}
1 &= 0 \cdot A + 0 \cdot B + (-1)^2C = C & C &= 1 \\
1 &= 1 \cdot A + 0 \cdot B + 0 \cdot C = A & A &= 1
\end{aligned}$$

一方，$A = 1$ および $C = 1$ を式（A11.1）に代入して次式を得る．

$$\begin{aligned}
s + 1 + s(s+1)B + s^2 &= 1 \\
s(s+1)B + s(s+1) &= 0 \\
s(s+1)(B+1) &= 0
\end{aligned}$$

すなわち，$B = -1$ でどのような s に対しても等式が成り立つ．以上により，部分分数分解が完了し，次式を得る．

$$\frac{1}{s^2(s+1)} = \frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}$$

ゆえに，求める $f(t)$ は逆ラプラス変換によって次式で求まる．

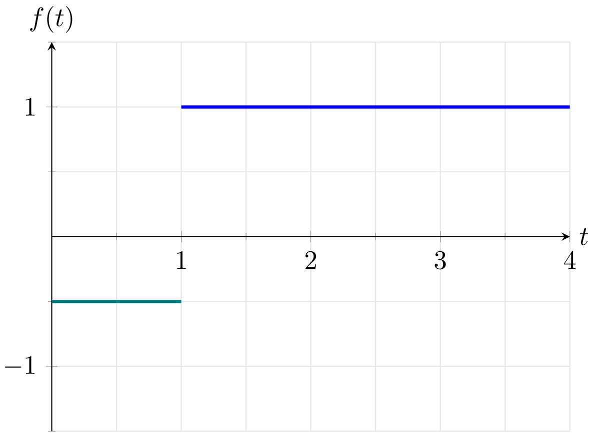
$$\begin{aligned}
f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2} - \frac{1}{s} + \frac{1}{s+1}\right\}(t) \\
&= \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\}(t) - \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s}\right\}(t) + \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s+1}\right\}(t) \\
&= t - 1 + e^{-t}
\end{aligned}$$

これは **5-1** で求めた $e^{-t} + t - 1$ に一致する．

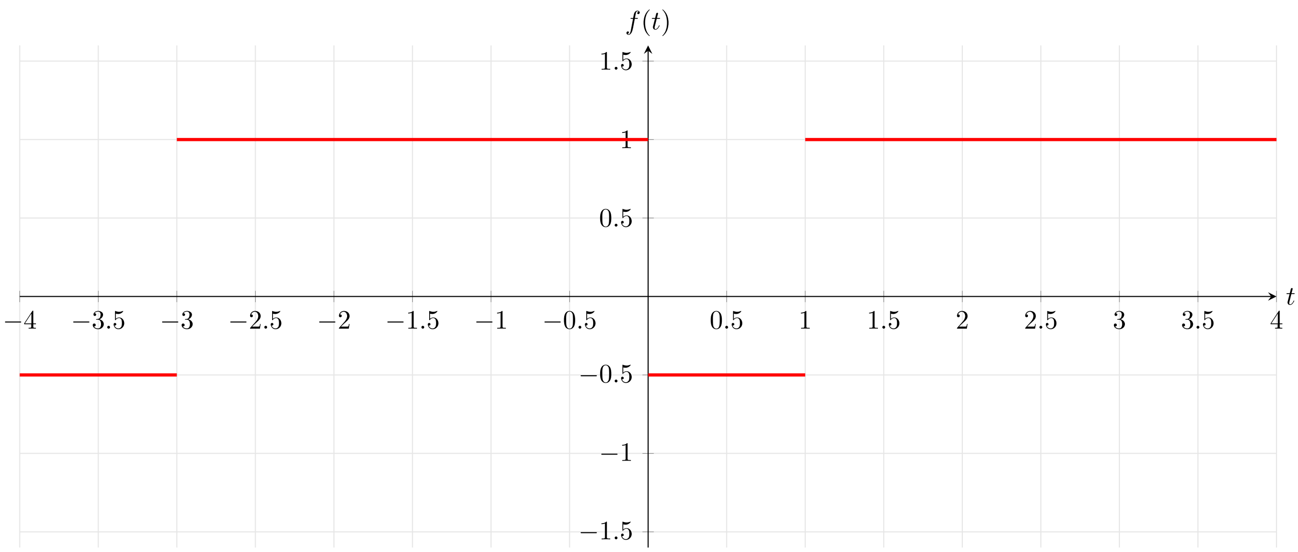
第 12 章 フーリエ級数

【1】

(1) ① まずは基本関数を描画する．



上記のグラフが $-4 \leq t \leq 4$ の範囲で繰り返されるため，答えは次図となる．



② 周期は，基本関数の定義域の幅である．したがって，周期 T は次式となる．

$$T = 4 - 0 = 4$$

角周波数は周期から次式で求まる．

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{2}$$

(2) ①

$$\int_{1/2}^{3/2} dt = [x]_{1/2}^{3/2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2} = 1$$

② 部分積分により求める．

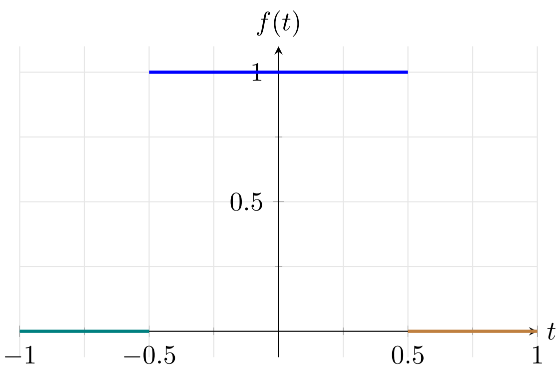
$$\int_0^{\pi} x \sin x \, dx = [-x \cos x]_0^{\pi} - \int_0^{\pi} (-\cos x) \, dx = -\pi \cdot \cos \pi + [\sin x]_0^{\pi} = -\pi \cdot (-1) + 0 = \pi$$

(3)

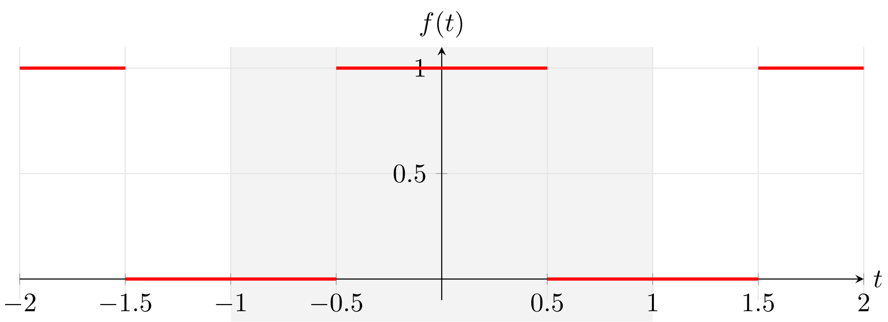
n	cos	answer
$n=1$	$\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)$	0
$n=2$	$\cos\left(\frac{2\pi}{2}\right)=\cos\pi$	-1
$n=3$	$\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)$	0
$n=4$	$\cos\left(\frac{4\pi}{2}\right)=\cos 2\pi$	1

【2】

(1) まずは基本関数を描画する．



上記のグラフが $-2 \leq t \leq 2$ の範囲で繰り返されるため，答えは次図となる．



ここで，基本関数は塗りつぶし領域である点に注意しておく．

(2) 偶関数の定義は $f(t)=f(-t)$，奇関数の定義は $f(t)=-f(-t)$ である．すなわち，y 軸に対して線対称なグラフとなっていれば偶関数，原点に対して点対称なグラフになっていれば奇関数といえる．(1) で導いたグラフから，$f(t)$ は y 軸に対して線対称であり，$f(t)=f(-t)$ を満たす．したがって，与式は 偶関数 である．

(3) 周期は，基本関数の定義域の幅である．したがって，周期 τ は次式となる．

$$\tau = 1-(-1) = 2$$

角周波数は周期から次式で求まる．

$$\omega_0 = \frac{2\pi}{\tau} = \pi$$

(4) 周期 τ の周期関数 $f(t)$ について，フーリエ級数展開の a_0 は次式で求まる．

$$a_0 = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\,dt \tag{A12.1}$$

すなわち，与えられた関数についての a_0 は次式で求まる．

$$a_0 = \frac{2}{2}\int_{-2/2}^{2/2} f(t)\,dt = \int_{-1}^{-0.5} 0\,dt + \int_{-0.5}^{0.5} 1\,dt + \int_{0.5}^{1} 0\,dt = \int_{-0.5}^{0.5} 1\,dt = [x]_{-0.5}^{0.5} = 0.5 - (-0.5) = 1$$

したがって，直流成分 $a_0/2$ は次式となる．

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2}$$

(5) フーリエ級数の係数は次式で導ける．

$$a_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt \tag{A12.2}$$

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt \tag{A12.3}$$

したがって，sin の係数 b_1 は次式で求まる．

$$\begin{aligned} b_1 &= \int_{-1}^{1} f(t)\sin \pi t\,dt = \int_{-1}^{-0.5} 0\cdot\sin \pi t\,dt + \int_{-0.5}^{0.5} 1\cdot\sin \pi t\,dt + \int_{0.5}^{1} 0\cdot\sin \pi t\,dt = \int_{-0.5}^{0.5} \sin \pi t\,dt \\ &= \left[-\frac{1}{\pi}\cos \pi t\right]_{-0.5}^{0.5} = -\frac{1}{\pi}\left[\cos\frac{\pi}{2} - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = -\frac{1}{\pi}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

(6) 式（A12.3）から，cos の係数 a_1 は次式で求まる．

$$\begin{aligned} a_1 &= \int_{-1}^{1} f(t)\cos \pi t\,dt = \int_{-1}^{-0.5} 0\cdot\cos \pi t\,dt + \int_{-0.5}^{0.5} 1\cdot\cos \pi t\,dt + \int_{0.5}^{1} 0\cdot\cos \pi t\,dt = \int_{-0.5}^{0.5} \cos \pi t\,dt \\ &= \left[\frac{1}{\pi}\sin \pi t\right]_{-0.5}^{0.5} = \frac{1}{\pi}\left[\sin\frac{\pi}{2} - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{1}{\pi}\cdot(1-(-1)) = \frac{2}{\pi} \end{aligned}$$

(7) cos は偶関数，sin は奇関数であるが，cos の係数 a_1 は 0 ではない値を持ち，sin の係数 b_1 は 0 となっている．したがって，$f(t)$ のフーリエ級数展開（$n=1$）では，奇関数の要素が排除され，偶関数の部分のみが残っている．これは (2) の性質と一致する．

(8) $f(t)$ が偶関数であり，偶関数と奇関数の積は奇関数となることから，$f(t)\sin n\omega_0 t$ もまた奇関数となる．したがって，式（A12.3）の右辺の積分は次式に置き換えられる．

$$b_n = \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\sin n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{\tau}\int_{0}^{\tau/2} 0\,dt = 0$$

一方，偶関数と偶関数の積は偶関数となることから，$f(t)\cos n\omega_0 t$ は偶関数である．したがって，式（A12.2）の右辺は次の通りに求まる．

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{\tau}\int_{-\tau/2}^{\tau/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{\tau}\int_{0}^{\tau/2} f(t)\cos n\omega_0 t\,dt = \frac{4}{2}\int_{0}^{1} f(t)\cos n\pi t\,dt \\ &= 2\left(\int_{0}^{0.5} 1\cdot\cos n\pi t\,dt + \int_{0.5}^{1} 0\cdot\cos n\pi t\,dt\right) = 2\int_{0}^{0.5}\cos n\pi t\,dt \\ &= 2\left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\right]_{0}^{0.5} = \frac{2}{n\pi}\left[\sin\frac{n\pi}{2} - \sin 0\right] = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} \end{aligned}$$

(9) (8) より，$b_n = 0$ であり，a_n は次式となる．

$$a_n = \frac{2}{n\pi}\sin\frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \frac{2}{n\pi}\cdot(-1)^{(n-1)/2} & \text{if} \quad n = 2k-1 \\ 0 & \text{if} \quad n = 2k \end{cases}$$

したがって，(4)，(8) により，求めるフーリエ級数は次式となる．

$$
\begin{aligned}
&\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{6}(a_n\cos n\omega_0 t+b_n\sin n\omega_0 t)\\
&=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{6}a_n\cos n\omega_0 t\\
&=\frac{1}{2}+\bigl(a_1\cos\pi t+\underbrace{a_2}_{0}\cos 2\pi t+a_3\cos 3\pi t+\underbrace{a_4}_{0}\cos 4\pi t+a_5\cos 5\pi t+\underbrace{a_6}_{0}\cos 6\pi t\bigr)\\
&=\frac{1}{2}+\left(\frac{2}{\pi}\sin\frac{\pi}{2}\cos\pi t+\frac{2}{3\pi}\sin\frac{3\pi}{2}\cos 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\sin\frac{5\pi}{2}\cos 5\pi t+\right)\\
&=\frac{1}{2}+\left[\frac{2}{\pi}\cdot 1\cdot\cos\pi t+\frac{2}{3\pi}\cdot(-1)\cdot\cos 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\cdot 1\cdot\cos 5\pi t\right]=\frac{1}{2}+\frac{2}{\pi}\cos\pi t-\frac{2}{3\pi}\cos 3\pi t+\frac{2}{5\pi}\cos 5\pi t
\end{aligned}
$$

【3】

(1) グラフから座標を読み取ると，$-1\le t\le 1$ の範囲において，$f(t)$ は $(-1,-1)$ と $(1,1)$ を結ぶ線分となる．したがって，求める関数は次式の通りとなる．

$$f(t)=t$$

(2) $f(t)=t$ について，$f(-t)=-t=-f(t)$ となり，奇関数の定義を満たす．したがって，$f(t)=t$ は奇関数である．　□

(3) 図 12.14 ののこぎり波は $f(t)=t(-1\le t\le 1)$ を基本関数とする周期波形である．したがって，$f(t)$ の定義域から，のこぎり波の周期として次式を得る．

$$\tau=1-(-1)=2$$

周期から，角周波数は次式となる．

$$\omega_0=\frac{2\pi}{\tau}=\pi$$

(4) 式（A12.1）から，与えられた関数についての a_0 は次式で求まる．

$$a_0=\frac{2}{2}\int_{-2/2}^{2/2}f(t)\,dt=\int_{-1}^{1}x\,dt=2\int_{0}^{1}0\,dt=0$$

したがって，直流成分 $a_0/2$ は次式となる．

$$\frac{a_0}{2}=\frac{0}{2}=0$$

(5) 部分積分により，次式の通り求まる．

$$\int x\cos x\,dx=x\sin x-\int\sin x\,dx=x\sin x-(-\cos x)+C=x\sin x+\cos x+C$$

(6) 奇関数と偶関数の積は奇関数であるため，$t\cos\pi t$ は奇関数である．したがって，式（A12.2）から，a_1 は次式で求まる．

$$a_1=\int_{-1}^{1}t\cos\pi t\,dt=2\int_{0}^{2}0\,dt=0$$

一方，式（A12.3） から，b_1 は次式となる．

$$b_1=\int_{-1}^{1}t\sin\pi t\,dt=2\int_{0}^{1}t\sin\pi t\,dt$$

ここで，【1】(2)② と同様に，部分積分によって次式を得る．

$$\int_{0}^{1}t\sin\pi t\,dt=\left[-\frac{1}{\pi}t\cos\pi t\right]_0^1-\int_0^1\left(-\frac{1}{\pi}\cos\pi t\right)dt=-\frac{1}{\pi}\left\{(\cos\pi-0)-\left[\frac{1}{\pi}\sin\pi t\right]_0^1\right\}=-\frac{1}{\pi}(-1-0)=\frac{1}{\pi}$$

ゆえに，求める b_1 は次式となる．

$$b_1 = 2\int_0^1 t\sin \pi t\, dt = \frac{2}{\pi}$$

(7) cos は偶関数，sin は奇関数であるが，cos の係数 a_1 は 0 であり，sin の係数 b_1 は 0 ではない値を持っている．したがって，$f(t)$ のフーリエ級数展開では，偶関数の要素は排除され，奇関数の部分のみが残る．これは (2) の性質と一致する．

(8) a_1 同様にして，$a_n = 0$ となる．一方，b_n も b_1 にならい，次式となる．

$$b_n = \int_{-1}^1 t\sin n\pi t\, dt = 2\int_0^1 t\sin n\pi t\, dt$$

ここで，【1】(2)② と同様に，部分積分によって次式を得る．

$$\begin{aligned}\int_0^1 t\sin n\pi t\, dt &= \left[-\frac{1}{n\pi}t\cos n\pi t\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{n\pi}\cos n\pi t\right)\, dt \\ &= -\frac{1}{n\pi}\left\{(\cos n\pi - 0) - \left[\frac{1}{n\pi}\sin n\pi t\right]_0^1\right\} = -\frac{1}{n\pi}(\cos n\pi - 0) = -\frac{1}{n\pi}\cos n\pi\end{aligned}$$

ゆえに，求める b_1 は次式となる．

$$b_n = 2\int_0^1 t\sin n\pi t\, dt = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi$$

(9) (8) により，$a_n = 0$ であり，b_n は次式となる．

$$b_n = -\frac{2}{n\pi}\cos n\pi = -\frac{2}{n\pi}(-1)^n = \frac{2}{n\pi}(-1)^{n+1}$$

したがって，(4)，(8) により，求めるフーリエ級数は次式となる．

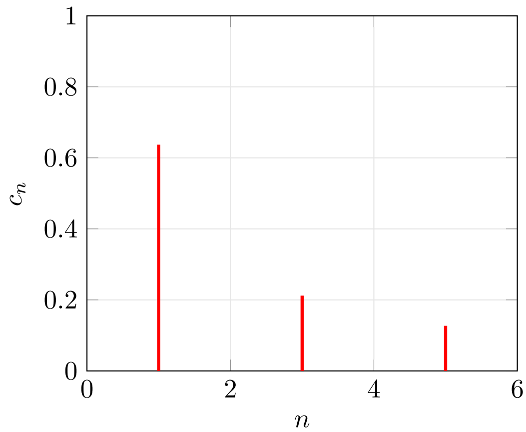
$$\begin{aligned}&\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{6}(a_n\cos n\omega_0 t + b_n \sin n\omega_0 t) \\ &= \sum_{n=1}^{6} b_n \sin n\pi t \\ &= b_1\sin\pi t + b_2\sin 2\pi t + b_3 \sin 3\pi t + b_4\sin 4\pi t + b_5 \sin 5\pi t + b_6\sin 6\pi t \\ &= \frac{2}{\pi}\sin\pi t + \frac{2}{2\pi}\cdot(-1)\sin 2\pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t + \frac{2}{4\pi}\cdot(-1)\sin 4\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t + \frac{2}{6\pi}\cdot(-1)\sin 6\pi t \\ &= \frac{2}{\pi}\sin\pi t - \frac{1}{\pi}\sin 2\pi t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\pi t - \frac{1}{2\pi}\sin 4\pi t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\pi t - \frac{1}{3\pi}\sin 6\pi t\end{aligned}$$

【4】

(1) 【2】から，$1 \le n \le 6$ における a_n，b_n，およびそれらから算出される $c_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ は次の通りとなる．

n	a_n	b_n	c_n
1	$\dfrac{2}{\pi}$	0	$\sqrt{\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2+0^2}=\dfrac{2}{\pi}=0.637$
2	0	0	$\sqrt{0^2+0^2}=0.000$
3	$-\dfrac{2}{3\pi}$	0	$\sqrt{\left(-\dfrac{2}{3\pi}\right)^2+0^2}=\dfrac{2}{3\pi}=0.212$
4	0	0	$\sqrt{0^2+0^2}=0.000$
5	$\dfrac{2}{5\pi}$	0	$\sqrt{\left(\dfrac{2}{5\pi}\right)^2+0^2}=\dfrac{2}{5\pi}=0.127$
6	0	0	$\sqrt{0^2+0^2}=0.000$

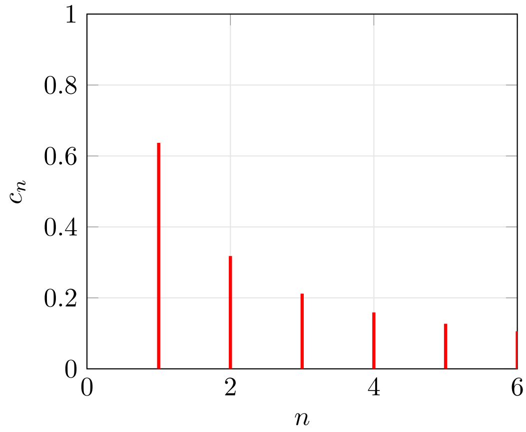
(2) (1) から，次図の通り表示できる．



(3) 【3】から，$1 \leq n \leq 6$ における a_n，b_n，およびそれらから算出される $c_n=\sqrt{a_n^2+b_n^2}$ は次の通りとなる．

n	a_n	b_n	c_n
1	0	$\dfrac{2}{\pi}$	$\sqrt{0^2+\left(\dfrac{2}{\pi}\right)^2}=\dfrac{2}{\pi}=0.637$
2	0	$-\dfrac{1}{\pi}$	$\sqrt{0^2+\left(\dfrac{1}{\pi}\right)^2}=\dfrac{1}{\pi}=0.318$
3	0	$\dfrac{2}{3\pi}$	$\sqrt{0^2+\left(\dfrac{2}{3\pi}\right)^2}=\dfrac{2}{3\pi}=0.212$
4	0	$-\dfrac{1}{2\pi}$	$\sqrt{0^2+\left(\dfrac{1}{2\pi}\right)^2}=\dfrac{1}{2\pi}=0.159$
5	0	$\dfrac{2}{5\pi}$	$\sqrt{0^2+\left(\dfrac{2}{5\pi}\right)^2}=\dfrac{2}{5\pi}=0.127$
6	0	$-\dfrac{1}{3\pi}$	$\sqrt{0^2+\left(\dfrac{1}{3\pi}\right)^2}=\dfrac{1}{3\pi}=0.106$

(4) (3) から，次図の通り表示できる．



第 13 章 ベクトル

【1】

(1) ベクトルのスカラ倍および差によって次式の通り求まる．

$$3\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=3(2,0,-3)-(-1,3,5)=(6,0,-9)-(-1,3,5)=(6-(-1),0-3,-9-5)=(7,-3,-14)$$

(2) ベクトルの長さによって次式の通り求まる．

$$|\boldsymbol{b}|-5=\sqrt{(-1)^2+3^2+5^2}-5=\sqrt{1+9+25}-5=\sqrt{35}-5$$

(3) ベクトルの長さとスカラ倍によって次式の通り求まる．

$$\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}=\frac{1}{\sqrt{2^2+0^2+(-3)^2}}(2,0,-3)=\frac{1}{\sqrt{4+9}}(2,0,-3)=\frac{1}{\sqrt{13}}(2,0,-3)=\left(\frac{2}{\sqrt{13}},0,-\frac{3}{\sqrt{13}}\right)$$

(4) ベクトルのスカラ倍と差によって次式の通り求まる．

$$\boldsymbol{b}-\frac{1}{2}\boldsymbol{a}=(-1,3,5)-\frac{1}{2}(2,0,-3)=(-1,3,5)-\left(1,0,-\frac{3}{2}\right)=\left(-1-1,3-0,5-\left(-\frac{3}{2}\right)\right)=\left(-2,3,\frac{13}{2}\right)$$

なお，略解には紙面の都合上，$(-2,3,6.5)$ と表記した．

【2】

(1) ドット積（内積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(2,7,1)\cdot(8,2,8)=2\cdot 8+7\cdot 2+1\cdot 8=16+14+8=38$$

(2) ドット積（内積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(1,2,3)\cdot(0,-3,2)=1\cdot 0+2\cdot(-3)+3\cdot 2=0-6+6=0$$

ドット積が 0 となる事実から，二つのベクトルが互いに垂直であることがわかる．

(3) ドット積（内積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(5,-2,3)\cdot(0,1,0)=5\cdot 0+(-2)\cdot 1+3\cdot 0=0-2+0=-2$$

(4) ドット積（内積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(0,-2,0)\cdot(1,0,1)=0\cdot 1+(-2)\cdot 0+0\cdot 1=0+0+0=0$$

ドット積が 0 となる事実から，二つのベクトルが互いに垂直であることがわかる．

【3】

(1) クロス積（外積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(2,7,1)\times(8,2,8)=(7\cdot 8-1\cdot 2,1\cdot 8-2\cdot 8,2\cdot 2-7\cdot 8)=(54,-8,-52)$$

(2) クロス積（外積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(1,2,3)\times(0,-3,2)=(2\cdot 2-3\cdot(-3),3\cdot 0-1\cdot 2,1\cdot(-3)-2\cdot 0)=(13,-2,-3)$$

(3) クロス積（外積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(5,-2,3)\times(0,1,0)=((-2)\cdot 0-3\cdot 1,3\cdot 0-5\cdot 0,5\cdot 1-(-2)\cdot 0)=(-3,0,5)$$

(4) クロス積（外積）の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$(0,-2,0)\times(1,0,1)=((-2)\cdot 1-0\cdot 0,0\cdot 1-0\cdot 1,0\cdot 0-(-2)\cdot 1)=(-2,0,2)$$

【4】

(1) 勾配の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2y, 2x, 1)$$

(2) 勾配の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (2xyz, x^2z, x^2y)$$

(3) 勾配の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(-\frac{z}{3}, 0, -\frac{x}{3}\right)$$

(4) 勾配の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla f(x,y,z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = (-e^{-x}, -e^{-y}, -e^{-z})$$

【5】

(1) 発散の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 + xz + 0 = xz$$

(2) 発散の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 2x + 2y + 2z$$

(3) 発散の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = ye^x + 0 + 3z^2 = ye^x + 3z^2$$

(4) 発散の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \cdot \boldsymbol{f}(x,y,z) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 0 + 0 + 1 = 1$$

【6】

(1) 回転の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = (0-0, 0-0, -1-1) = (0, 0, -2)$$

(2) 回転の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = (0-0, 0-0, 0-0) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$$

(3) 回転の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = (0-0, 0-0, 2\cos y - x\cos y) = (0, 0, (2-x)\cos y)$$

(4) 回転の定義にしたがい，次式の通り計算する．

$$\nabla \times \boldsymbol{f}(x,y,z) = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}, \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right) = (x-x, y-y, z-z) = (0, 0, 0) = \mathbf{0}$$