章 末 問 題 解 答

1. 対　　数

【1】（1） $\log_2 32 = \log_2 2^5 = 5\log_2 2 = 5$　　（2） $\log_5 125 = \log_5 5^3 = 3\log_5 5 = 3$

（3） $\log_2 \frac{1}{16} = \log_2 2^{-4} = -4\log_2 2 = -4$

（4） $\log_{10} \frac{1}{1000} = \log_{10} 10^{-3} = -3\log_{10} 10 = -3$

（5） $\log_{0.2} 125 = \frac{\log_{10} 125}{\log_{10} 0.2} = \frac{\log_{10} 5^3}{\log_{10}\frac{1}{5}} = \frac{3\mathrm{lo}\ \ {}_{10}\,5}{-\log_{10} 5} = -3$

【2】（1） 対数の定義より $\log 1 = 0$，$\log 10 = 1$

$\log 4 = \log 2^2 = 2\log 2 = 2 \times 0.30 = 0.60$

$\log 5 = \log\frac{10}{2} = \log 10 - \log 2 = 1 - 0.30 = 0.70$

$\log 6 = \log(2 \times 3) = \log 2 + \log 3 = 0.30 + 0.48 = 0.78$

$\log 7$ は計算不能

$\log 8 = \log 2^3 = 3\log 2 = 3 \times 0.30 = 0.90$

$\log 9 = \log 3^2 = 2\log 3 = 2 \times 0.48 = 0.96$

以上より，表の空欄は下記のようになる。

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\log N$	0	0.30	0.48	0.60	0.70	0.78	×	0.90	0.96	1

（2） ①$\log 0.5 = \log\frac{1}{2} = \log 2^{-1} = -\log 2 = -0.30$

②$\log\sqrt{6} = \log 6^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log(2 \times 3) = \frac{1}{2}(\log 2 + \log 3) = \frac{0.78}{2} = 0.39$

③$\log_2 6 = \frac{\log 6}{\log 2} = \frac{\log 2 + \log 3}{\log 2} = \frac{0.78}{0.3} = 2.6$

④$\log_4 27 = \frac{\log 27}{\log 4} = \frac{\log 3^3}{\log 2^2} = \frac{3\log 3}{2\log 2} = \frac{3\times 0.48}{2\times 0.3} = 2.4$

【3】（1） $\log_6 4 + \log_6 9 = \log_6(4 \times 9) = \log_6 36 = \log_6 6^2 = 2\log_6 6 = 2$

（2） $\log_3 18 - \log_3 2 = \log_3\frac{18}{2} = \log_3 9 = \log_3 3^2 = 2\log_3 3 = 2$

（3） $\log_2 6 + \log_2 24 - 2\log_2 3 = \log_2(6 \times 24 \div 3^2) = \log_2 16 = \log_2 2^4 = 4$

（4） $\log_{\sqrt{3}}\frac{1}{3} + \log_3 5\log_5 9 = \frac{\log\frac{1}{3}}{\log\sqrt{3}} + \frac{\log 5}{\log 3}\cdot\frac{\log 9}{\log 5} = \frac{-\log 3}{\frac{1}{2}\log 3} + \frac{2\log 3}{\log 3} = -2 + 2 = 0$

【4】 $\sigma = A\exp\left(-\frac{E}{kT}\right)$ の両辺の自然対数をとると

$\ln\sigma = \ln A + \ln e^{-\frac{E}{kT}} = \ln A - \frac{E}{kT}$ ， $\frac{E}{kT} = \ln A - \ln\sigma$ 　　$\therefore E = kT(\ln A - \ln\sigma) = kT\ln\frac{A}{\sigma}$

【5】（1）$\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} = \frac{5\ \mathrm{V}}{5\ \mathrm{mV}} = 1000 = 10^3$

したがって，増幅器 1 と 2 による全体の増幅利得G_vは

$G_v = G_{v1} + G_{v2} = 20\log\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} = 20\log 10^3 = 60$

$\therefore\quad G_{v1} = G_v - G_{v2} = 60 - 20 = 40\ \mathrm{dB}$

（2）$G_v = G_{v1} + G_{v2} = 30 + 70 = 100 = 20\log\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}}$， $\log\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} = 5$， $\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} = 10^5$

$\therefore\quad V_\mathrm{o} = V_\mathrm{i}\times 10^5 = 2\ \mu\mathrm{V}\times 10^5 = 2\times 10^{-6}\ \mathrm{V}\ \times 10^5 = 0.2\ \mathrm{V} = 200\ \mathrm{mV}$

【6】（1）$G_p = 10\log\frac{P_\mathrm{o}}{P_\mathrm{i}} = 10\log\frac{P_\mathrm{o}}{P_\mathrm{i}} = 10\log\frac{{V_\mathrm{o}}^2/R_\mathrm{o}}{{V_\mathrm{i}}^2/R_\mathrm{i}} = 10\log\frac{{V_\mathrm{o}}^2 R_\mathrm{i}}{{V_\mathrm{i}}^2 R_\mathrm{o}} = 10\left[\log\left(\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}}\right)^2 + \log\frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{o}}\right]$

$\therefore\quad G_p = 20\log\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} + 10\log\frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{o}}$

（2）$G_p = 20\log\frac{V_\mathrm{o}}{V_\mathrm{i}} + 10\log\frac{R_\mathrm{i}}{R_\mathrm{o}} = 20\log\frac{1.0}{0.1} + 10\log\frac{10}{1} = 20\log 10 + 10\log 10 = 30\ \mathrm{dB}$

２． 三 角 関 数

【1】（1）$\sin 150° = \sin(90° + 60°) = \cos 60° = \frac{1}{2}$

（2）$\cos 120° = \cos(90° + 30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$

（3）$\tan 135° = \tan(90° + 45°) = -\cot 45° = -1$

（4）$\tan 300° = \sin(360° - 60°) = -\tan 60° = -\sqrt{3}$

（5）$\sin(-30°) = -\sin 30° = -\frac{1}{2}$ 　　（6）$\sin(-120°) = \sin(-90° - 30°) = \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$

（7）$\sin\frac{2}{3}\pi = \sin\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ 　　（8）$\sin\frac{4}{3}\pi = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\frac{\pi}{3} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

（9）$\cos\frac{7}{3}\pi = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 　　（10）$\tan\frac{3}{4}\pi = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

（11）$\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \cos\frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$ 　　（12）$\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\tan\frac{\pi}{4} = -1$

【2】（1）$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}$ 　　（2）$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}$ 　　（3）$\theta = \tan^{-1}\left(-\sqrt{3}\right) = \frac{2\pi}{3}$

（4）$\theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}$ 　　（5）$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{6}$ 　　（6）$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$

（7）$\sin(-\theta) + 2\sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) + \sin(\pi - \theta) = -\sin\theta + 2\cos\theta + \sin\theta = 2\cos\theta = 1$

$\therefore\quad \theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

（8）$2\cos^2\theta - 5\sin\theta + 1 = 2(1 - \sin^2\theta) - 5\sin\theta + 1 = 3 - 2\sin^2\theta - 5\sin\theta = 0$

$2\sin^2\theta + 5\sin\theta - 3 = 0$ 　　$\therefore\quad \sin\theta = \frac{1}{2}, -3$ 　　$|\sin\theta| \le 1$ より， $\sin\theta = \frac{1}{2}$

$\therefore\quad \theta = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}$

【3】（1）$\sin(270° + \theta) = \sin(90° \times 3 + \theta) = -\cos\theta$

（2）$\cos(\theta + 180°) = \cos(\theta + 90° \times 2) = -\cos\theta$

(3) $\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cot\theta$　　(4) $\cos(2\pi-\theta)=\cos\left(\frac{\pi}{2}\times 4-\theta\right)=\cos\theta$

(5) $\sin(\theta-\pi)=\sin\left(\theta-\frac{\pi}{2}\times 2\right)=-\sin\theta$

【4】(1) $\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{1+3}\sin(\theta+\alpha)=2\sin(\theta+\alpha)$

ここで，$\alpha=\tan^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{1}\right)=\frac{\pi}{3}$　　$\therefore\quad 2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

(2) $\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\sqrt{1+3}\cos(\theta-\beta)=2\cos(\theta-\beta)$

ここで，$\beta=\tan^{-1}\left(\frac{1}{-\sqrt{3}}\right)=\frac{5\pi}{6}$　　$\therefore\quad 2\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{6}\right)$

【5】(1) $\sin^{-1}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\cos^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\tan^{-1}(\sqrt{3})=-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{6}$

(2) $2\cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)+\ \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4\tan^{-1}(1)=2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{3}-4\cdot\frac{\pi}{4}=\pi-\pi=0$

(3) $\tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)=\alpha$，　$\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\beta$ とおくと，　$\tan\alpha=\frac{1}{4}$，　$\tan\beta=\frac{3}{5}$

$$\tan(\alpha+\beta)=\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}}=1$$

$\therefore\quad \tan^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)+\tan^{-1}\left(\frac{3}{5}\right)=\alpha+\beta=\tan^{-1}(1)=\frac{\pi}{4}$

【6】(1) $\sin\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)+\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

$=\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}-\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{2}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{2}+\sin\theta\cos\frac{\pi}{6}+\cos\theta\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta-\frac{1}{2}\cos\theta+\cos\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\theta+\frac{1}{2}\cos\theta=\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{6}\right)$

(2) $\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)+\cos\left(\theta-\frac{\pi}{6}\right)$

$=\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}+\cos\theta\cos\frac{\pi}{2}+\sin\theta\sin\frac{\pi}{2}+\cos\theta\cos\frac{\pi}{6}-\sin\theta\sin\frac{\pi}{6}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta-\frac{1}{2}\sin\theta+\sin\theta+\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta+\frac{1}{2}\sin\theta=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)$

【7】(1) $e_1+\ e_2=RI\sin\omega t+\omega LI\cos\omega t=\sqrt{(RI)^2+(\omega LI)^2}\sin(\omega t+\varphi)$

$=\sqrt{R^2+(\omega L)^2}\,I\sin(\omega t+\varphi)$，ただし，$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L}{R}\right)$

(2) $e_1+\ e_2+\ e_3=RI\sin\omega t+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)I\cos\omega t$

$=\sqrt{R^2+\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)^2}\,I\sin(\omega t+\varphi)$，ただし，$\varphi=\tan^{-1}\left(\frac{\omega L\quad\frac{1}{\omega C}}{R}\right)$

３．複　素　数

【1】(1) $3(2+j3)+j2(1-j)=8+j11$　　(2) $(2+j3)(5-j2)=16+j11$

(3) $|1+j|^2=\left(\sqrt{1+1}\right)^2=2$　　(4) $|(1+j)^2|=|1+j2-1|=|j2|=2$

(5) $|(1-j)^2(1+j)|=\ |(1-j)(1+j)(1-j)|=\ |2(1-j)|=2\sqrt{2}$

(6) $e^{j\frac{\pi}{2}}=\cos\frac{\pi}{2}+j\sin\frac{\pi}{2}=0+j=j$

（7）$e^{j\frac{\pi}{4}}+e^{-j\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}+\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)=2\cos\frac{\pi}{4}=2\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$

（8）$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\frac{1}{2}+2j\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2-\frac{1}{2}=2j\cdot\frac{1}{2}=j$

あるいは，$\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{j\frac{\pi}{4}}$ より，$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2=\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2=e^{j\frac{\pi}{2}}=j$

【2】（1）$\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}=e^{j\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}$　（2）$-\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{j\frac{3\pi}{4}}=\cos\frac{3\pi}{4}+j\sin\frac{3\pi}{4}$

（3）$-j=e^{j\frac{3\pi}{2}}=\cos\frac{3\pi}{2}+j\sin\frac{3\pi}{2}$　（4）$-1=e^{j\pi}=\cos\pi+j\sin\pi$

【3】（1）$1+j=\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$　（2）$\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}=e^{j\frac{\pi}{6}}$　（3）$\frac{1}{\sqrt{2}}-j\frac{1}{\sqrt{2}}=e^{-j\frac{\pi}{4}}$

（4）$1+j\sqrt{3}=2e^{j\frac{\pi}{3}}$

【4】（1）$e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\frac{\pi}{3}}=e^{j\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{3}\right)}=e^{j\frac{5\pi}{6}}=\cos\frac{5\pi}{6}+j\sin\frac{5\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}+j\frac{1}{2}$

（2）$\left(e^{j\frac{\pi}{8}}\right)^2=e^{j\frac{\pi}{4}}=\cos\frac{\pi}{4}+j\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}+j\frac{1}{\sqrt{2}}$

（3）$e^{j\frac{4\pi}{3}}\cdot e^{-j\frac{\pi}{6}}=e^{j\frac{7\pi}{6}}=\cos\frac{7\pi}{6}+j\sin\frac{7\pi}{6}=-\frac{\sqrt{3}}{2}-j\frac{1}{2}$

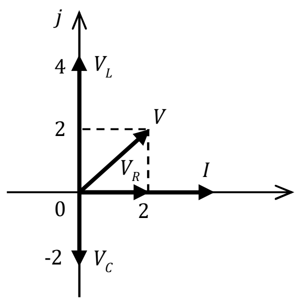
（4）$\left(e^{-j\frac{\pi}{6}}\right)^3=e^{-j\frac{\pi}{2}}=\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+j\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)=0-j\sin\frac{\pi}{2}=-j$

（5）$\left(e^{j\frac{\pi}{4}}\right)^2\left(e^{j\frac{\pi}{3}}\right)^4\left(e^{-j\frac{\pi}{2}}\right)^3=e^{j\frac{\pi}{2}}\cdot e^{j\frac{4\pi}{3}}\cdot e^{-j\frac{3\pi}{2}}=e^{j\frac{\pi}{3}}=\cos\frac{\pi}{3}+j\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+j\frac{\sqrt{3}}{2}$

【5】$V_R=RI=2\,\mathrm{V}$，$V_L=j\omega LI=j4\,\mathrm{V}$，$V_C=-j\frac{1}{\omega C}I=-j2\,\mathrm{V}$，各素子の電圧は**解図 3.1** のようになる。

∴　$V=V_R+V_L+V_C=2+j4-j2=2+j2=2\sqrt{2}e^{j\frac{\pi}{4}}$

したがって，電圧 V は電流 I より$\pi/4$位相が進んでいる。



解図 3.1

【6】(a) $Z_{ab}=\frac{R\cdot j\omega L}{R+j\omega L}+\frac{R\cdot\frac{1}{j\omega C}}{R+\frac{1}{j\omega C}}=\frac{j\omega LR}{R+j\omega L}+\frac{R}{1+j\omega CR}=\frac{j\omega LR(1+j\omega CR)+R(R+j\omega L)}{(R+j\omega L)(1+j\omega CR)}=\frac{R^2(1-\omega^2LC)+j2\omega L}{R(1-\omega^2LC)+j(\omega L+\omega CR^2)}$

$R=\sqrt{L/C}$ より$L=CR^2$を分子と分母の第 2 項に代入すると

∴　$Z_{ab}=\frac{R^2(1-\omega^2LC)+j2\omega CR^3}{R(1-\omega^2LC)+j2\omega CR^2}=\frac{R\{R(1-\omega^2LC)+j2\omega CR^2\}}{R(1-\omega^2LC)+j2\omega C\ ^2}=R$

（b）$Z_{ab} = \dfrac{(R+j\quad)\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)}{(R+j\omega L)+\left(R+\frac{1}{j\omega C}\right)} = \dfrac{R^2+j\omega LR+j\frac{R}{\omega C}+\frac{L}{C}}{2R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)}$　　$R^2 = L/C$ を分子の第 4 項に代入すると

$$\therefore \quad Z_{ab} = \frac{R^2+jR\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)+R^2}{2R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} = \frac{R\left\{2R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)\right\}}{2R+j\left(\omega L-\frac{1}{\omega C}\right)} = R$$

４．　ベ ク ト ル

【1】（1）$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,2) - (0,1) = (3,1)$

$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (3,1) - (0,1) = (3,0)$

$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = (-1,1) - (0,1) = (-1,0)$

（2）$\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right| = \sqrt{3^2+1^2} = 10$

$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = (3,1) - (3,2) = (0,-1)$　　$\therefore$　$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right| = \sqrt{0+(-1)^2} = 1$

$\overrightarrow{\mathrm{CD}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (-1,1) - (3,1) = (-4,0)$　　$\therefore$　$\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right| = \sqrt{(-4)^2+0} = 4$

【2】（1）図 4.24 より$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$と等しいベクトルは，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CF}}$である。

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OE}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{BE}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OG}} = (1,0,0) + (0,1,0) + (0,0,1) = (1,1,1)$

【3】（1）**解図4.1より**，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$，　$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

（2）$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = (1.0) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = (0,0)$

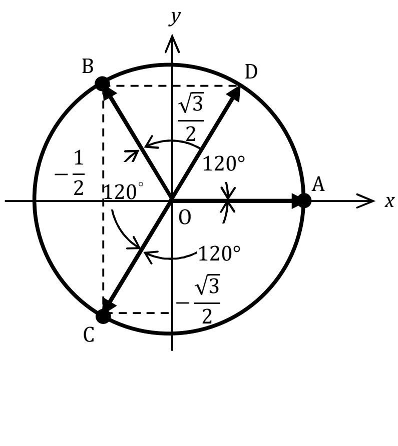
（別解）$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}}$　　$\therefore$　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{0} = (0,0)$

（3）$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right| \cos 120° = 1 \cdot 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2}$

成分では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OB}} = 1 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -\frac{1}{2}$

（4）$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right| \cos 60° = 1 \cdot 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$

成分では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}}\right) = 1 \cdot \frac{1}{2} + 0 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}$



解図 4.1

【4】（1）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cos 30°=\sqrt{3}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=3$

成分では，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\sqrt{3},1\right)$　　∴　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\sqrt{3}\cdot\sqrt{3}+0\cdot 1=3$

（2）$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos 90°=\sqrt{3}\cdot 1\cdot 0=0$

成分では，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(\sqrt{3},0\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,1)$　　∴　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}\cdot 0+0\cdot 1=0$

（3）$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|\cdot\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|\cos 60°=2\cdot 1\cdot\frac{1}{2}=1$

成分では，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\left(\sqrt{3},1\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(0,1)$　　∴　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\sqrt{3}\cdot 0+1\cdot 1=1$

【5】（1）ベクトル$\boldsymbol{C}$は，**解図 4.2** に示すように$\boldsymbol{B}$から$\boldsymbol{A}$に向かうベクトルである。また，三角形 OAB は正三角形となるため，$|\boldsymbol{C}|=10$である。

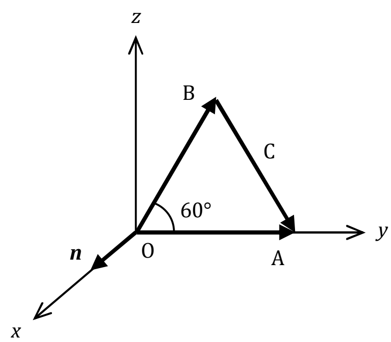
成分では，$\boldsymbol{A}=(0,10,0)$，$\boldsymbol{B}=\left(0,5,5\sqrt{3}\right)$より

$$|\boldsymbol{C}|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}|=\sqrt{0+(10-5)^2+\left(0-5\sqrt{3}\right)^2}=\sqrt{100}=10$$

（2）$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{C}=AC\cos 60°=10\cdot 10\cdot\frac{1}{2}=50$

（3）$\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=AB\sin 60°\boldsymbol{n}=\left(10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{n}=50\sqrt{3}\boldsymbol{n}$

大きさは $50\sqrt{3}$，$\boldsymbol{n}$は図に示すようにx軸の正方向の単位ベクトルである。



解図 4.2

【6】$\boldsymbol{A}=A_x\boldsymbol{i}+A_y\boldsymbol{j}+A_z\boldsymbol{k}$

$\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C}=(B_yC_z-B_zC_y)\boldsymbol{i}+(B_zC_x-B_xC_z)\boldsymbol{j}+(B_xC_y-B_yC_x)\boldsymbol{k}$

$$\therefore\quad \boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=A_x(B_yC_z-B_zC_y)+A_y(B_zC_x-B_xC_z)+A_z(B_xC_y-B_yC_x)$$
$$=A_xB_yC_z+A_yB_zC_x+A_zB_xC_y-A_xB_zC_y-A_yB_xC_z-A_zB_yC_x$$

行列式を用いると

$$\boldsymbol{A}\cdot(\boldsymbol{B}\times\boldsymbol{C})=\begin{vmatrix}A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}$$

【7】$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\times\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right|\sin 60°\right)\boldsymbol{n}=\left(10\cdot 10\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\boldsymbol{n}=50\sqrt{3}\boldsymbol{n}$

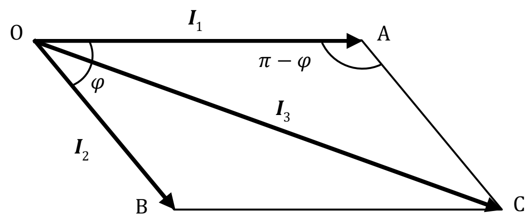
ここで，$\boldsymbol{n}$ は z 軸上の正の向きの単位ベクトルである。

$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \left(\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right| \cos 30°\right) = 10 \cdot 50\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 750$

（別解）**解図 4.3** より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \left(0, 5, 5\sqrt{3}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (0, 10, 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(-5\sqrt{3}, 5, 0\right)$

演習問題【6】の解答より

$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \left(\overrightarrow{\mathrm{OB}} \times \overrightarrow{\mathrm{OC}}\right) = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 5\sqrt{3} \\ 0 & 10 & 0 \\ -5\sqrt{3} & 5 & 0 \end{vmatrix} = 5\sqrt{3} \cdot 10 \cdot 5\sqrt{3} = 750$$



解図 4.3

【8】（1）抵抗 R を流れる電流$I_2 = V/R$，$\boldsymbol{Z} = |Z|e^{j\varphi}$とおくと

$$I_2 = \frac{V}{|Z|e^{j\varphi}} = \frac{V}{|Z|}e^{-j\varphi}$$

I_3=I_1+I_2 より，三電流の関係は**解図 4.3** のようになる。

（2）三角形 OAC で，$\angle\mathrm{A}(= \pi - \varphi)$について余弦定理を適用すると

$$I_3^2 = I_1^2 + I_2^2 - 2I_1I_2\cos(\pi - \varphi)$$

ここで，$\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$より

$$I_3^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1I_2\cos\varphi$$

となる。上式の第 3 項のI_2に$I_2 = V/R$ を代入すると

$$I_3^2 = I_1^2 + I_2^2 + 2I_1\left(\frac{V}{R}\right)\cos\varphi = I_1^2 + I_2^2 + 2VI_1\cos\varphi/R$$

Zでの消費電力は$P = \mathrm{V}I_1\cos\varphi$より

$$P = R(I_3^2 - I_1^2 - I_2^2)/2$$

５．　行列と行列式

【1】（1）$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 6 \end{vmatrix} = 2 \cdot 6 - 1 \cdot 3 \ = 9$　　（2）$\begin{vmatrix} 9 & 6 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 9 \cdot 2 - 6 \cdot 3 \ = 0$

（3）$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1 \cdot 1 \cdot 6 + 2 \cdot 1 \cdot 4 + 3 \cdot 5 \cdot 1 - 1 \cdot 5 \cdot 1 - 2 \cdot 1 \cdot 6 - 3 \cdot 1 \cdot 4$

$$= 6 + 8 + 15 - 12 - 12 - 5 = 0$$

（別解）1 行で展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 4 & 5 & 6 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1 - 4 + 3 = 0$$

（4） $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\cdot 1\cdot 4 + 0\cdot(-1)\cdot 1 + 2\cdot 2\cdot 1 - 2\cdot 2\cdot(-1) - 0\cdot 1\cdot 4 - 2\cdot 1\cdot 1$

$= 8 + 0 + 4 - 2 - 0 + 4 = 14$

（別解）1 行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} - 0\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 12 - 0 + 2 = 14$$

（5）1 行で展開

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 7 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 2 \\ 8 & 4 & -8 \end{vmatrix} - 6\begin{vmatrix} 7 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & -1 \\ 8 & -3 & 4 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} &= 2\left(1\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -3 & -8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad - 4\left(7\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 8 & -8 \end{vmatrix} + 4\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix}\right) \\ &\quad - 6\left(7\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 8 & 4 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 8 & -3 \end{vmatrix}\right) \\ &= 2(0 + 6 + 4) - 4(0 - 0 + 0) - 6(7 - 0 - 6) \\ &= 20 - 0 - 6 = 14 \end{aligned}$$

（別解）1 列に 4 列を加える

$$\begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 & 6 \\ 11 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -8 \end{vmatrix}$$

1 列で展開

$$\begin{vmatrix} 8 & 4 & 0 & 6 \\ 11 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix}$$

3 列に 4×2 列を加え，3 列で展開

$$8\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 8\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 80$$

3 列に 4×2 列を加え，3 列で展開

$$11\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 1 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 11\begin{vmatrix} 0 & 6 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 66$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 2 & 4 & 0 & 6 \\ 7 & 1 & 3 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & 2 \\ 8 & -3 & 4 & -8 \end{vmatrix} = 80 - 66 = 14$$

（6）第 1 列で展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 \\ 4 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= \left(3\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) - \left(2\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right)$$

$$+ \left(2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 7 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) - \left(2\begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 3 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} + 5\begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}\right)$$

$$= (-9 - 92 + 21) - (-6 - 69 + 35) + (44 - 54 + 10) - (34 - 9 - 65)$$

$$= -80 + 40 + 0 + 40 = 0$$

（別解）4 列から 5×1 列を引く

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$$

4 列で展開

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$$

2 列から 2×1 列を引き，1 列で展開

$$-2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = -2\left(\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}\right) = -2(5 - 9) = 8$$

$$2\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 2\left(\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}\right) = 2(-7 + 3) = -8$$

$$\therefore \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 4 & 3 \\ 1 & 4 & 1 & 5 \\ 1 & 1 & 2 & 7 \end{vmatrix} = 8 - 8 = 0$$

（7）2 行，3 行および 4 行の成分から 1 行の成分を引くと三角行列となるため

$$\begin{vmatrix}1&2&1&1\\1&4&2&2\\1&2&5&2\\1&2&1&6\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&1&1\\0&2&1&1\\0&0&4&1\\0&0&0&5\end{vmatrix}=1\times2\times4\times5=40$$

【2】（1） $\begin{vmatrix}\cos\theta&\sin\theta\\-\sin\theta&\cos\theta\end{vmatrix}=\cos\theta\cos\theta-\sin\theta(-\sin\theta)=\cos^2\theta+\sin^2\theta=1$

（2）1 行で展開

$$\begin{vmatrix}0&a&b\\-a&0&c\\-b&-c&0\end{vmatrix}=-a\begin{vmatrix}-a&c\\-b&0\end{vmatrix}+b\begin{vmatrix}-a&0\\-b&-c\end{vmatrix}=-abc+abc=0$$

（3）1 行で展開

$$\begin{vmatrix}0&-\sin\beta&\cos\beta\\\cos\alpha&\sin\alpha\cos\beta&\sin\alpha\sin\beta\\-\sin\alpha&\cos\alpha\cos\beta&\cos\alpha\sin\beta\end{vmatrix}$$

$$=\sin\beta\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\sin\beta\\-\sin\alpha&\cos\alpha\sin\beta\end{vmatrix}+\cos\beta\begin{vmatrix}\cos\alpha&\sin\alpha\cos\beta\\-\sin\alpha&\cos\alpha\cos\beta\end{vmatrix}$$

$$=\sin\beta(\cos^2\alpha\sin\beta+\sin^2\alpha\sin\beta)+\cos\beta(\cos^2\alpha\cos\beta+\sin^2\alpha\cos\beta)$$

$$=\sin^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)+\cos^2\beta(\cos^2\alpha+\sin^2\alpha)=\sin^2\beta+\cos^2\beta=1$$

【3】（1） $\begin{vmatrix}x&2\\2&x\end{vmatrix}=x^2-4=0\qquad\therefore\quad x=\pm2$

（2） $\begin{vmatrix}x&1\\3&x+2\end{vmatrix}=x^2+2x-3=0\qquad\therefore\quad x=1,-3$

（3）1 行に 2，3，4 行を加える

$$\begin{vmatrix}x+1&1&1&1\\2&x+2&2&2\\3&3&x+3&3\\4&4&4&x+4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x+10&x+10&x+10&x+10\\2&x+2&2&2\\3&3&x+3&3\\4&4&4&x+4\end{vmatrix}$$

2 行から 2×1 行を引く

$$=(x+10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\2&x+2&2&2\\3&3&x+3&3\\4&4&4&x+4\end{vmatrix}=(x+10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x&0&0\\3&3&x+3&3\\4&4&4&x+4\end{vmatrix}$$

3 行，4 行も同様にすると

$$=(x+10)\begin{vmatrix}1&1&1&1\\0&x&0&0\\0&0&x&0\\0&0&0&x\end{vmatrix}=(x+10)\begin{vmatrix}x&0&0\\0&x&0\\0&0&x\end{vmatrix}=x^3(x+10)=0\quad x=0,-10$$

【4】（1） $\begin{bmatrix}1&2\\0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0\\3&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot1+2\cdot3&1\cdot0+2\cdot2\\0\cdot1+1\cdot3&0\cdot0+1\cdot2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7&4\\3&2\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}1 & 0\\3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2\\0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 2+0\cdot 1\\3\cdot 1+2\cdot 0 & 3\cdot 2+2\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 2\\3 & 8\end{bmatrix}$

(3) $\begin{bmatrix}1 & 0 & 2\\0 & 2 & 1\\-1 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\1 & 1 & 0\\1 & 3 & 1\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}1\cdot 0+0\cdot 1+2\cdot 1 & 1\cdot 1+0\cdot 1+2\cdot 3 & 1\cdot 2+0\cdot 0+2\cdot 1\\0\cdot 0+2\cdot 1+1\cdot 1 & 0\cdot 1+2\cdot 1+1\cdot 3 & 0\cdot 2+2\cdot 0+1\cdot 1\\-1\cdot 0+1\cdot 1+3\cdot 1 & -1\cdot 1+1\cdot 1+3\cdot 3 & -1\cdot 2+1\cdot 0+3\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 7 & 4\\3 & 5 & 1\\4 & 9 & 1\end{bmatrix}$$

(4) $\begin{bmatrix}2 & 0\\-1 & 3\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & 0\\0 & 3 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\cdot 1+0\cdot 0 & 2\cdot 1+0\cdot 3 & 2\cdot 0+0\cdot 2\\-1\cdot 1+3\cdot 0 & -1\cdot 1+3\cdot 3 & -1\cdot 0+3\cdot 2\\1\cdot 1+0\cdot 0 & 1\cdot 1+0\cdot 3 & 1\cdot 0+0\cdot 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2 & 2 & 0\\-1 & 8 & 6\\1 & 1 & 0\end{bmatrix}$

(5) $\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\0 & 1 & -1\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\cdot 3-1\cdot 2-1\cdot 1\\0\cdot 3+1\cdot 2-1\cdot 1\\0\cdot 3+0\cdot 2+1\cdot 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}$

【5】 (1) $\begin{bmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\dfrac{{}^{t}\begin{bmatrix}3 & -2\\2 & 1\end{bmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\2 & 3\end{vmatrix}}=\dfrac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 2\\-2 & 1\end{bmatrix}$

(2) $\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 1 & 3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\1 & 1 & 1\\2 & 1 & 3\end{vmatrix}}\;{}^{t}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\2 & 1\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\1 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}=\dfrac{1}{2}\;{}^{t}\begin{bmatrix}2 & -1 & -1\\-2 & 4 & 0\\0 & -1 & 1\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & -2 & 0\\-1 & 4 & -1\\-1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

(3) $\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -1 & 2\\-1 & 2 & 3\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\1 & -1 & 2\\-1 & 2 & 3\end{vmatrix}}\;{}^{t}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}-1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & -1\\-1 & 2\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}1 & 2\\2 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 1\\-1 & 2\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}1 & 2\\-1 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 2\\1 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}1 & 1\\1 & -1\end{vmatrix}\end{bmatrix}$

$$=\frac{1}{-10}\;{}^{t}\begin{bmatrix}-7 & -5 & 1\\1 & 5 & -3\\4 & 0 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{-10}\begin{bmatrix}-7 & 1 & 4\\-5 & 5 & 0\\1 & -3 & -2\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7 & -1 & -4\\5 & -5 & 0\\-1 & 3 & 2\end{bmatrix}$$

(4) $\begin{bmatrix}2 & 0 & 1\\-1 & 1 & 3\\3 & 0 & 2\end{bmatrix}=\dfrac{1}{\begin{vmatrix}2 & 0 & 1\\-1 & 1 & 3\\3 & 0 & 2\end{vmatrix}}\;{}^{t}\begin{bmatrix}\begin{vmatrix}1 & 3\\0 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 3\\3 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}-1 & 1\\3 & 0\end{vmatrix}\\-\begin{vmatrix}0 & 1\\0 & 2\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 1\\3 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 0\\3 & 0\end{vmatrix}\\\begin{vmatrix}0 & 1\\1 & 3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 1\\-1 & 3\end{vmatrix} & \begin{vmatrix}2 & 0\\-1 & 1\end{vmatrix}\end{bmatrix}={}^{t}\begin{bmatrix}2 & 11 & -3\\0 & 1 & 0\\-1 & -7 & 2\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}2 & 0 & -1\\11 & 1 & -7\\-3 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

【6】（1）$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}$

（クラメルの公式）　$x=\dfrac{\begin{vmatrix}4 & -2\\ 1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}}=\dfrac{14}{7}=2$，$y=\dfrac{\begin{vmatrix}1 & 4\\ 2 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{vmatrix}}=\dfrac{-7}{7}=-1$

（逆行列）演習問題【5】（1）より，$\begin{bmatrix}1 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}$

$$\therefore\quad \begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}3 & 2\\ -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\ 1\end{bmatrix}=\frac{1}{7}\begin{bmatrix}14\\ -7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\ -1\end{bmatrix}$$

（2）$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 4\end{bmatrix}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}6 & 1 & 2\\ 2 & -1 & 2\\ 4 & 2 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{-10}\left(6\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}2 & -1\\ 4 & 2\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{-10}(-42+2+16)=\frac{12}{5}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & 6 & 2\\ 1 & 2 & 2\\ -1 & 4 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{-10}\left(\begin{vmatrix}2 & 2\\ 4 & 3\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{-1}(-2-30+12)=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 6\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 4\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{-10}\left(\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 2 & 4\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}+6\begin{vmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{-10}(-8-6+6)=\frac{4}{5}$$

演習問題【5】（3）より，$\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & -1 & 2\\ -1 & 2 & 3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7 & -1 & -4\\ 5 & -5 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}$

$$\therefore\quad \begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}7 & -1 & -4\\ 5 & -5 & 0\\ -1 & 3 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\ 2\\ 4\end{bmatrix}=\frac{1}{10}\begin{bmatrix}24\\ 20\\ 8\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{12}{5}\\ 2\\ \frac{4}{5}\end{bmatrix}$$

（3）$\begin{bmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ y\\ z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ 3\end{bmatrix}$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 1\\ 3 & 1 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 3\end{vmatrix}-6\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 4\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}(2-3-1)=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & 3 & 3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\left(2\begin{vmatrix}2 & 1\\ 3 & 3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1 & 2\\ -1 & 3\end{vmatrix}+2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 2 & 3\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}(6-1-1)=2$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&2\\2&1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}2&1&1\\1&1&1\\2&1&3\end{vmatrix}}=\frac{1}{2}\left(2\begin{vmatrix}1&2\\1&3\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}1&2\\2&3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1&1\\2&1\end{vmatrix}\right)=\frac{1}{2}(2+1-1)=1$$

演習問題【5】（2）より，$\begin{bmatrix}2&1&1\\1&1&1\\2&1&3\end{bmatrix}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1&-1&0\\1&2&-2\\-1&0&1\end{bmatrix}$

$$\therefore\quad \begin{bmatrix}x\\y\\z\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2&-2&0\\-1&4&-1\\-1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}-2\\4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\\1\end{bmatrix}$$

【7】回路方程式 $\begin{aligned}R_1I_1+R_2(I_1-I_2)=E\\R_2(I_2-I_1)+R_3I_2=0\end{aligned}$ を整理し，$\begin{aligned}(R_1+R_2)I_1-R_2I_2=E\\-R_2I_1+(R_2+R_3)I_2=0\end{aligned}$

各値を代入すると $\begin{aligned}3I_1-2I_2=7\\-2I_1+6I_2=0\end{aligned}$ $\begin{bmatrix}3&-2\\2&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}7\\0\end{bmatrix}$

$$\therefore\quad I_1=\frac{\begin{vmatrix}7&-2\\0&6\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-2\\-2&6\end{vmatrix}}=\frac{42}{14}=3\ \mathrm{A},\quad I_2=\frac{\begin{vmatrix}3&7\\-2&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}3&-2\\-2&6\end{vmatrix}}=\frac{14}{14}=1\ \mathrm{A}$$

【8】（1）回路方程式 $\begin{aligned}\frac{1}{j\omega C}I_1+j\omega L(I_1-I_2)=E\\j\omega L(I_2-I_1)+RI_2=0\end{aligned}$ を整理し，$\begin{aligned}\left(j\omega L+\frac{1}{j\omega C}\right)I_1-j\omega LI_2=E\\-j\omega LI_1+(R+j\omega L)I_2=0\end{aligned}$

$$\begin{bmatrix}j\omega L+\frac{1}{j\omega C}&-j\omega L\\-j\omega L&R+j\omega L\end{bmatrix}\begin{bmatrix}I_1\\I_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}E\\0\end{bmatrix}$$

$$\therefore\quad I_2=\frac{\begin{vmatrix}j\omega L+\frac{1}{j\omega C}&\mathrm{E}\\-j\omega L&0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}j\omega L+\frac{1}{j\omega C}&-j\omega L\\-j\omega L&R+j\omega L\end{vmatrix}}=\frac{j\omega LE}{\frac{L}{C}+jR\left(\omega L\quad\frac{1}{\omega C}\right)}=\frac{E}{R\left(1-\frac{1}{\omega^2LC}\right)+\frac{1}{j\omega C}}$$

（2）（1）の結果から$\left(1-\frac{1}{\omega^2LC}\right)=0$，$\omega^2LC=1$，$\omega=\frac{1}{\sqrt{LC}}$，あるいは$f=\frac{1}{2\pi\sqrt{LC}}$

このとき，$I_2=j\omega CE=j\sqrt{\frac{C}{L}}E=\sqrt{\frac{C}{L}}Ee^{j\frac{\pi}{2}}$ ゆえに，I_2は E より位相が 90° 進んでいる。

６． 微分と積分

【1】（1）$9x^2-4x+6$　（2）$2x+\frac{1}{\sqrt{x}}-\frac{1}{x^2}$　（3）$24(4x-3)^5$　（4）$\frac{6x^2+1}{\sqrt{4x^3+2x-3}}$

（5）$4\sin^3x\cos x$　（6）$\frac{\cos x}{2\sqrt{\sin x}}$　（7）$\cos^2x-\sin^2x=1-2\sin^2x=2\cos^2x-1$

（8）$5\sin^4x(\cos x\cos 5x-\sin x\sin 5x)=5\sin^4x\cos 6x$　（9）$\frac{1}{\cos^2x}=\sec^2x$

（10）$\cos^{-1}x = y$より，$x = \cos y$，$\frac{dx}{dy} = -\sin y = -\sqrt{1-\cos^2 y} = -\sqrt{1-x^2}$

$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (|x| < 1)$

【2】（1）$y = \sin x$ を微分すると

$y' = (\sin x)' = \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$

$y'' = (\sin x)'' = -\sin x = \sin(x+\pi) = \sin\left(x + 2 \times \frac{\pi}{2}\right)$

$y^{(3)} = (\sin x)^{(3)} = -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right) = \sin\left(x + 3 \times \frac{\pi}{2}\right)$

$\cdots\ \cdots$

これより，$\frac{d^n(\sin x)}{dx^n} = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right)$

（2）$y = e^x \sin x$ を微分すると

$y' = e^x \sin x + e^x \cos x = e^x(\sin x + \cos x) = \sqrt{2}e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$

$y'' = e^x(\sin x + \cos x) + e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x \cos x$

$= 2e^x \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \left(\sqrt{2}\right)^2 e^x \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{2\pi}{4}\right)$

$y^{(3)} = 2e^x \cos x - 2e^x \sin x = 2e^x(\cos x - \sin x) = 2e^x\sqrt{2}\sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$= \left(\sqrt{2}\right)^3 e^x \sin\left(x + \frac{3\pi}{4}\right)$

$y^{(4)} = 2e^x(\cos x - \sin x) + 2e^x(-\sin x - \cos x) = 2e^x(-2\sin x)$

$= 4e^x(-\sin x) = 4e^x \sin(x+\pi) = \left(\sqrt{2}\right)^4 e^x \sin\left(x + \frac{4\pi}{4}\right)$

$\cdots\cdots$

これより，$\frac{d^n(e^x \sin x)}{dx^n} = \left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x + \frac{n\pi}{4}\right)$

【3】（1）$\frac{dx}{d\theta} = a(1-\cos\theta)$，$\frac{dy}{d\theta} = a\sin\theta$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\sin\theta}{a(1-\cos\theta)} = \frac{\sin\theta}{(1-\cos\ \ )} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{2\sin^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}} = \cot\frac{\theta}{2}$$

（2）$\frac{dx}{dt} = t-1$，$\frac{dy}{dt} = 4t^3 - 4t$，$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4t^3-4t}{t-1} = \frac{2t(t^2-1)}{t-1} = 2t^2 + 2t$

【4】（1）$\frac{\partial u}{\partial x} = 2 + 2x + 3y$，$\frac{\partial u}{\partial y} = 3 + 3x + 8y$ 　　（2）$\frac{\partial u}{\partial x} = 2e^{2x}\cos 3y$，$\frac{\partial u}{\partial y} = -3e^{2x}\sin 3y$

（3）$\frac{\partial u}{\partial x} = \ln\frac{y}{x} - 1$，$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{x}{y}$

【5】$u = (x-y)(y-z)(z-x) = x^2z + xy^2 + yz^2 - x^2y - xz^2 - y^2z$

$\partial u/\partial x = 2xz - 2xy + y^2 - z^2$，$\partial u/\partial y = 2xy - 2yz - x^2 + z^2$

$\partial u/\partial z = 2yz - 2xz + x^2 - y^2 \qquad \therefore \quad \partial u/\partial x + \partial u/\partial y + \partial u/\partial z = 0$

【6】（1）$\frac{\partial T}{\partial l} = 2\pi\frac{1}{\sqrt{g}}\frac{1}{2\sqrt{l}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\frac{1}{2l} = T\frac{1}{2l}$，$\frac{\partial T}{\partial g} = 2\pi\sqrt{l}\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{1}{\sqrt{g^3}} = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}\left(\frac{-1}{2g}\right) = T\left(\frac{-1}{2g}\right)$

$dT=\frac{\partial T}{\partial \ell}dl+\frac{\partial T}{\partial g}dg=T\left(\frac{dl}{2l}-\frac{dg}{2g}\right)\qquad \therefore\quad \frac{dT}{T}=\frac{1}{2}\left(\frac{dl}{l}-\frac{dg}{g}\right)$

$\frac{dl}{l}=4\%$, $\frac{dg}{g}=2\%$より，$\frac{dT}{T}=\frac{1}{2}(4-2)=1\%$

(2) $\frac{\partial \rho}{\partial D}=\frac{2\pi DR}{4l}=\frac{\pi D^2R}{4l}\cdot\frac{2}{D}=\rho\frac{2}{D}$，同様にして$\frac{\partial \rho}{\partial R}=\rho\frac{1}{R}$，$\frac{\partial \rho}{\partial l}=\rho\left(\frac{-1}{l}\right)$

$\therefore\quad \frac{d\rho}{\rho}=2\frac{dD}{D}+\frac{dR}{R}-\frac{dl}{l}\qquad \frac{dD}{D}=\frac{dR}{R}=\frac{dl}{l}=1\%$より，$\frac{d\rho}{\rho}=2+1-1=2\%$

【7】(1) x^4+6x^2-3x+C　　(2) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3}+2x+C$　　(3) $\frac{1}{2}e^{2x}-\frac{1}{4}e^{-4x}+e^{-x}+C$

(4) $\frac{a^{4x}}{4\ln a}+C$

$\left(\begin{array}{c} a^{4x}=e^y\text{とおくと}y=\ln a^{4x}=4x\ln a,\ dy=4\ln a\,dx,\ \text{よって}\ dx=\frac{dy}{4\ln a} \\ \therefore\quad \int a^{4x}\,dx=\int e^y\frac{dy}{4\ln a}=\frac{e^y}{4\ln a}+C=\frac{a^{4x}}{4\ln a}+C \end{array}\right)$

(5) $\int\cos^2 x\,dx=\int\frac{1+\cos}{2}dx=2x+\frac{\sin 2x}{4}+C$

(6) $\int\cos 3x\sin 2x\,dx=\int\frac{1}{2}(\sin 5x-\sin x)\,dx=\frac{\cos x}{2}-\frac{\cos 5x}{10}+C$

【8】(1) $4x-3=X$ とおくと，$\int(4x-3)^5\,dx=\int\frac{X^5}{4}dX=\frac{1}{24}X^6+C=\frac{(4x-3)^6}{24}+C$

(2) $\sin x=X$ とおくと，$\int\sin^4 x\cos x\,dx=\int X^4\,dX=\frac{1}{5}X^5+C=\frac{\sin^5 x}{5}+C$

(3) $\cos x=X$ とおくと

$\int\cos^2 x\sin^3 x\,dx=\int\cos^2 x\,(1-\cos^2 x)\sin x\,dx=\int(\cos^2 x-\cos^4 x)\sin x\,dx$

$=\int(X^2-X^4)\,dX=\frac{1}{5}X^5-\frac{1}{3}X^3+C=\frac{\cos^5 x}{5}-\frac{\cos^3 x}{3}+C$

(4) $\int x\sin x\ dx=\int x(-\cos x)'\ dx=-x\cos x+\int\cos x\ dx=-x\cos x+\sin x+C$

(5) $\int\ln x\,dx=\int\ln x\,(x)'dx=x\ln x-\int\frac{1}{x}x\,dx=x\ln x-\int 1\ dx=x\ln x-x+C$

(6) $I=\int e^x\sin x\,dx=\int e^x(-\cos x)'\,dx=e^x(-\cos x)+\int e^x\cos x\,dx$

ここで，$\int e^x\cos x\,dx=\int e^x(\sin x)'\,dx=e^x\sin x-\int e^x\sin x\,dx=e^x\sin x-I$

$I=-e^x\cos x+e^x\sin x-I\qquad \therefore\quad I=\int e^x\sin x\,dx=\frac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$

(7) $I=e^{-x}\cos x=\int e^{-x}(\sin x)'dx=e^{-x}\sin x+\int e^{-x}\sin x\,dx$

ここで

$\int e^{-x}\sin x\,dx=\int e^{-x}(-\cos x)'\,dx=-e^{-x}\cos x-\int e^{-x}\cos x\,dx=-e^{-x}\cos x-I$

$I=e^{-x}\sin x-e^{-x}\cos x-I\qquad \therefore\quad I=\int e^{-x}\cos x\,dx=\frac{e^{-x}}{2}(\sin x-\cos x)+C$

(8) $I=\int e^{ax}\sin\omega x\,dx=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\sin\omega x\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\sin\omega x-\frac{\omega}{a}\int e^{ax}\cos\omega x\,dx$

ここで

$\int e^{ax}\cos\omega x\,dx=\int\left(\frac{e^{ax}}{a}\right)'\cos\omega x\,dx=\frac{e^{ax}}{a}\cos\omega x+\frac{\omega}{a}\int e^{ax}\sin\omega x\,dx$

$=\frac{e^{ax}}{a}\cos\omega x+\frac{\omega}{a}I$

$I=\frac{e^{ax}}{a}\sin\omega x-\frac{\omega}{a}\left(\frac{e^{ax}}{a}\cos\omega x+\frac{\omega}{a}I\right)=\frac{e^{ax}}{a}\sin\omega x-\frac{\omega}{a^2}e^{ax}\cos\omega x-\frac{\omega^2}{a^2}I$

$$\left(\frac{a^2+\omega^2}{a^2}\right) I = \frac{e^{ax}}{a}\sin\omega x - \frac{\omega}{a^2}e^{ax}\cos\omega x \qquad \therefore \quad I = \frac{e^{ax}}{a^2+\omega^2}(a\sin\omega x - \omega\cos\omega x) + C$$

【9】（1） $\left[\frac{x^4}{4} - x^3 + x^2\right]_0^2 = 4 - 8 + 4 = 0$ （2） $\left[\frac{4}{3}\pi r^3\right]_0^R = \frac{4}{3}\pi R^3$

（3） $\sin x = X$ とおくと， $\int \sin^2 x \cos x\, dx = \int X^2\, dX = \frac{1}{3}X^3$

積分範囲は$(x = 0, \pi/2) \to (X = 0, 1)$ $\quad \therefore \quad \left[\frac{1}{3}X^3\right]_0^1 = \frac{1}{3}$

【10】（1） $6x - x^2 = 0$ より $x = 0, 6$ $\quad \therefore \quad \int_0^6 (6x - x^2)\, dx = \left[3x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^6 = 36$

(2) 第 1 象限の面積$=s$とすると$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$より， $s = \int_0^a y\, dx = \frac{b}{a}\int_0^a \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right) dx$

ここで， $x = a\sin\theta$とおくと$dx = a\cos\theta\, d\theta$, 積分範囲は$(x = 0, a) \to (\theta = 0, \pi/2)$

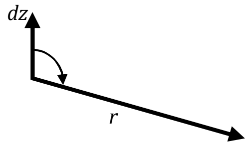
$$s = \frac{b}{a}\int_0^{\frac{\pi}{2}} a\sqrt{1 - \sin^2\theta}(a\cos\theta)d\theta = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2\theta\, d\theta = ab\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 + \cos 2\theta}{2} d\theta$$

$$= ab\left[\frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}ab \qquad \therefore \quad \text{楕円の面積}S = 4s = \pi ab$$

【11】図 6.12 より， $\frac{R}{z} = \tan(\pi - \theta) = -\tan\theta$ $\quad \therefore \quad z = -\frac{R}{\tan\theta} = -R\cot\theta$， $dz = \frac{R}{\sin^2\theta}d\theta$

また， $\frac{R}{r} = \sin(\pi - \theta) = \sin\theta$ $\quad \therefore \quad r = \frac{R}{\sin\theta}$

以上から$dH = \frac{I}{4\pi}\frac{dzr\sin\theta}{r^3} = \frac{I}{4\pi}\frac{dz\sin\theta}{r^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{\left(\frac{R}{\sin^2\theta}d\theta\right)\sin\theta}{\left(\frac{R}{\sin\theta}\right)^2} = \frac{I}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R}d\theta$



解図 6.1

$\therefore \quad H = \int dH = \int_\alpha^{\pi-\beta} \frac{I}{4\pi}\frac{\sin\theta}{R}d\theta = \frac{I}{4\pi R}[-\cos\theta]_{\theta_1}^{\pi-\theta_2}$

$= \frac{I}{4\pi R}(\cos\alpha + \cos\beta)$

また， $\boldsymbol{dz}$を右回りで$\boldsymbol{r}$に重ねるときの右ねじの進む方向から, 磁界$\boldsymbol{H}$の向きは紙面に垂直で手前から奥の向きである。（解図 6.1）

7．関数の展開と近似計算

【1】（1） $f(x) = \frac{1}{1-x}$， $f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$， $f''(x) = \frac{1\cdot 2}{(1-x)^3}$， $f^{(3)}(x) = \frac{1\cdot 2\cdot 3}{(1-x)^4}$， $\cdots$

$f(0) = 1$， $f'(0) = 1$， $f''(0) = 2!$， $f^{(3)}(0) = 3!$， $\cdots$

$\therefore \quad \frac{1}{1-x} = 1 + \frac{x}{1!}1 + \frac{x^2}{2!}2! + \frac{x^3}{3!}3! + \cdots = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots + x^n + \cdots$

$= \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$

（2） $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$， $f'(x) = \frac{2x}{(1-x^2)^2}$， $f''(x) = \frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$， $f^{(3)}(x) = \frac{24\ (1+x^2)}{(1-x^2)^4}$

$f^{(4)}(x) = \frac{24x(1+10x^2+5x^4)}{(1-x^2)^5}$， $\cdots$

$f(0) = 1$， $f'(0) = 0$， $f''(0) = 2!$， $f^{(3)}(0) = 0$， $f^{(4)}(0) = 24 = 4!$， $\cdots$

したがって，$f^{(2n-1)}(0)=0$，$f^{(2n)}(0)=(2n)!$

$$\therefore \quad \frac{1}{1-x^2}=1+\frac{x^2}{2!}2!+\frac{x^4}{4!}4!+\cdots=1+x^2+x^4+\cdots+\ x^{2n}+\cdots=\sum_{n=1}^{\infty}x^{2(n-1)}$$

この結果は，前問（1）のxをx^2と置き換えた式となる。

(3) $\frac{1}{1-3x+2x^2}=\frac{1}{(1-2x)(1-x)}=\frac{2}{1-2x}-\frac{1}{1-x}$

演習問題（1）より

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots+\ x^n+\cdots \qquad (|x|<1)$$

$$\frac{1}{1-2x}=1+2x+(2x)^2+(2x)^3+\cdots+\ (2x)^n+\cdots$$

$$=1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots+\ 2^nx^n+\cdots \qquad (|x|<\tfrac{1}{2})$$

$$\therefore \quad \frac{1}{1-3x+2x^2}=2(1+2x+2^2x^2+2^3x^3+\cdots+\ 2^nx^n+\cdots)$$

$$-(1+x+x^2+x^3+\cdots+\ x^n+\cdots)$$

$$=1+3x+7x^2+15x^3+\cdots+\ (2^n-1)x^{n-1}+\cdots$$

$$=\sum_{n=1}^{\infty}(2^n-1)x^{n-1} \qquad (|x|<\tfrac{1}{2})$$

(4) $f(x)=\frac{1}{\sqrt{1+x}}$，$f'(x)=\frac{2x}{(1-x^2)^2}$，$f''(x)=\frac{2(1+3x^2)}{(1-x^2)^3}$，$f^{(3)}(x)=\frac{24x(1+x^2)}{(1-x^2)^4}$

$f^{(4)}(x)=\frac{24\ (1+10x^2+5x^4)}{(1-x^2)^5}$，…

$f(0)=1$，$f'(0)=0$，$f''(0)=2\cdots$，$f^{(3)}(0)=0$，$f^{(4)}(0)=24=4!$，…

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2^2}\frac{x^2}{2\cdot1}-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3}\frac{x^3}{3\cdot2\cdot1}+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2^4}\frac{x^4}{4\cdot3\cdot2\cdot1}-\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2n)}x^n+\cdots$$

$(|x|<1)$

（別解）$\frac{1}{\sqrt{1+x}}=(1+x)^{-\frac{1}{2}}$として二項定理を適用する。式（7.13）で$m=-\frac{1}{2}$を代入すると

$$(1+x)^{-\frac{1}{2}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{2}-1\right)\left(-\frac{1}{2}-2\right)}{3!}x^3+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{2!}x^2+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\left(-\frac{5}{2}\right)}{3!}x^3+\cdots+\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\cdots\left(-\frac{(2n-1)}{2}\right)}{n!}x^n+\cdots$$

$$=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2^2\cdot2!}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2^3\cdot3!}\cdots x^3+\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdots(2n-1)}{2^nn!}x^n+\cdots$$

$$2^nn!=\ 2^n\cdot n(n-1)\cdots3\cdot2\cdot1=2n\cdot2(n-1)\cdots(2\cdot3)(2\cdot2)(2\cdot1)$$

$$=2\cdot4\cdot6\cdots2(n-1)\cdot2n$$

$$\therefore \quad \frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\frac{1\cdot3}{2\cdot4}x^2-\frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6}x^3+\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8}x^4-\cdots+(-1)^n\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\cdots(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdots(2n)}x^n+\cdots$$

$(|x|<1)$

(5) $f(x)=e^x\sin x$の導関数は6章の演習問題【2】(2) より

$f^{(n)}(x)=\left(\sqrt{2}\right)^n e^x \sin\left(x+\frac{n\pi}{4}\right)$

$f(0)=\sin 0=0$,　$f'(0)=\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)=1$,　$f''(0)=\left(\sqrt{2}\right)^2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)=2$

$f^{(3)}(0)=\left(\sqrt{2}\right)^3\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)=2$,　$f^{(4)}(0)=\left(\sqrt{2}\right)^4\sin\pi=0$

$f^{(5)}(0)=\left(\sqrt{2}\right)^5\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)=-4$,　$f^{(6)}(0)=\left(\sqrt{2}\right)^6\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)=-8$,　$\cdots$

$$\therefore\quad e^x\sin x=0+1\cdot x+2\frac{x^2}{2!}+2\frac{x^3}{3!}+0\frac{x^4}{4!}-4\frac{x^5}{5!}-8\frac{x^6}{6!}+\cdots$$
$$=x+x^2+\frac{2}{3!}x^3-\frac{4}{5!}x^5-\frac{8}{6!}x^6+\cdots+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n!}\sin\left(\frac{n\pi}{4}\right)x^n+\cdots$$

【2】(1) $\sin^2 x=\frac{1-\cos 2x}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x$

式（7.10）より，$\cos 2x=1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}+\frac{(2x)^6}{6!}\cdots$

$$\therefore\quad \sin^2 x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(1-\frac{(2x)^2}{2!}+\frac{(2x)^4}{4!}-\frac{(2x)^6}{6!}\cdots\right)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+\frac{2x^2}{2!}-\frac{2^3x^4}{4!}+\frac{2^5x^6}{6!}-\cdots$$
$$=\frac{2x^2}{2\cdot 1}-\frac{2^3x^4}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}+\frac{2^5x^6}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}-\cdots\fallingdotseq x^2-\frac{1}{3}x^4+\frac{2}{45}x^6$$

(2) 式（7.15）で，$x=x+x^2$ とおくと

$$\sqrt{1+x+x^2}=1+\frac{1}{2}(x+x^2)-\frac{1}{8}(x+x^2)^2+\ \cdots$$
$$=1+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{8}x^2-\cdots\fallingdotseq 1+\frac{1}{2}x+\frac{3}{8}x^2$$

(3) $e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots$,　$\cos x=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots$を代入して3 次の項までとると

$$e^x\cos x=\left(1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots\right)\left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}\cdots\right)\fallingdotseq 1+x-\frac{x^3}{3}$$

【3】(1) $\sqrt{1-x}\fallingdotseq 1-\frac{1}{2}x-\frac{1}{8}x^2$

$$\sqrt{0.9}=\sqrt{1-0.1}\fallingdotseq 1-\frac{1}{2}(0.1)-\frac{1}{8}(0.1)^2=1-0.05-0.00125=0.94875$$

$$\sqrt{24}=\sqrt{25-1}=\sqrt{25\left(1-\frac{1}{25}\right)}=5\sqrt{1-0.04}$$

$$\fallingdotseq 5\left\{1-\frac{1}{2}(0.04)-\frac{1}{8}(0.04)^2\right\}=5(1-0.02-0.0002)=5\times 0.9798=4.899$$

(2) $\sqrt[3]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{3}}$として二項定理を用いると

$$\sqrt[3]{1+x}\fallingdotseq 1+\frac{1}{3}x+\frac{\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}-1\right)}{2!}x^2=1+\frac{1}{3}x-\frac{1}{9}x^2$$

$$\sqrt[3]{1.1}=\sqrt[3]{1+0.1}\fallingdotseq 1+\frac{0.1}{3}-\frac{0.1^2}{9}=1+0.0333\cdots-0.00111\cdots\fallingdotseq 1.032$$

$$\sqrt[3]{30}=\sqrt[3]{27+3}=\sqrt[3]{27\left(1+\frac{3}{27}\right)}=3\sqrt[3]{1+\frac{3}{27}}\fallingdotseq 3\left[1+\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{27}-\frac{1}{9}\left(\frac{3}{27}\right)^2\right]$$

$$=3+\frac{1}{9}-\frac{1}{9\cdot 27}\fallingdotseq 3.107$$

８． 微分方程式

【1】（1） $\frac{dy}{dx}=x^2$，$\int dy=\int x^2\,dx$　　$\therefore$　$y=\frac{1}{3}x^3+C$

（2） $y\frac{dy}{dx}=-x$，$\int y\,dy=\int -x\,dx$，$\frac{y^2}{2}=-\frac{x^2}{2}+C$

$\therefore$　$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}=C$　あるいは，$2C=r^2$とおけば，　$x^2+y^2=r^2$

（3） $\frac{dy}{dx}=-2y$，$\int\frac{dy}{y}=-\int 2\,dx$，$\ln y=-2x+C$　　$\therefore$　$y=e^{-2x+C}=Ae^{-2x}$

（4） $(1-x^2)\frac{dy}{dx}=-xy$，$\frac{dy}{dx}=-\frac{xy}{1-x^2}$，$\int\frac{dy}{y}=-\int\frac{x}{1-x^2}dx$

$\ln y=\frac{1}{2}\ln(1-x^2)+C=\ln A(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$　（$C=\ln A$）　　$\therefore$　$y=A\sqrt{1-x^2}$

（5） $\frac{dy}{dx}-\frac{1}{x}y=x^3$，$P(x)=-\frac{1}{x}$，$Q(x)=x^3$とおいて公式（8.17）を用いると

$\int P(x)\,dx=-\ln x$ より，$y=e^{\ln x}\left(\int x^3e^{-\ln x}\,dx+C\right)$，$e^{\ln}\ \ =x$ より

$\therefore$　$y=x(\int x^3x^{-1}\,dx+C)=x(\int x^2\,dx+C)=x\left(\frac{x^3}{3}+C\right)=\frac{x^4}{3}+Cx$

(6) $\frac{dy}{dx}+\frac{1}{2}y=1$，$P=\frac{1}{2}$，$Q=1$ とおいて公式(8.20)を用いると　　$\therefore$　$y=Ae^{-\frac{1}{2}x}+2$

【2】（1） $\frac{dv}{dt}=g$，$dv=gdt$，$v=\int g\,dt=gt+C$

$t=0$ で，$v=0$ より，$C=0$　　$\therefore$　$v=gt$

$h=\int_0^t v\,dt=\int_0^t gt\,dt=\frac{1}{2}gt^2$　　$\therefore$　$t=\sqrt{\frac{2h}{g}}$

（2） 運動方程式は，$m\frac{dv}{dt}=mg-kv$ となる。変形すると $\frac{dv}{dt}+\frac{k}{m}v=g$

公式（8.20）より，$v=Ae^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$

$t=0$ で$v=0$ より，$\mathrm{A}=-\frac{mg}{k}$　　$\therefore$　$v=\frac{mg}{k}\left(1-e^{-\frac{k}{m}t}\right)$

（別解） $v=v_s+v_t$とおくと，$\frac{dv_s}{dt}+\frac{k}{m}v_s=g\cdots$（1）　$\frac{dv_t}{dt}+\frac{k}{m}v_t=0\cdots$（2）

式（1）より，$v_s=\frac{mg}{k}$。式（2）より，$\frac{dv_t}{dt}=-\frac{k}{m}v_t$，$\int\frac{dv_t}{v_t}=\int-\frac{k}{m}dt$，$v_t=Ae^{-\frac{k}{m}t}$

$\therefore$　$v=v_s+v_t=Ae^{-\frac{k}{m}t}+\frac{mg}{k}$

【3】（1） $e=E$のとき，$v_L+v_R=L\frac{di}{dt}+Ri=E$，$i=i_s+i_t$とおくと

$L\frac{di_s}{dt}+Ri_s=E\cdots$（1）　$L\frac{di_t}{dt}+Ri_t=0\cdots$（2）

式（1）より，$i_s=\frac{E}{R}$

式（2）より，$\frac{di_t}{dt}=-\frac{R}{L}i_t$，$\int\frac{di_t}{i_t}=-\int\frac{R}{L}dt$，$i_t=Ae^{-\frac{R}{L}t}$

$\therefore$　$i=i_s+i_t=Ae^{-\frac{R}{L}t}+\frac{E}{R}$

$t=0$ で$i=0$ より，$\mathrm{A}=-\frac{E}{R}$　　$\therefore$　$i=\frac{E}{R}\left(1-e^{-\frac{R}{L}t}\right)$

（2）$e=E_m\sin\omega t$ のとき，$v_L+v_R=L\frac{di}{dt}+Ri=E_m\sin\omega t$

変形すると $\frac{di}{dt}+\frac{R}{L}i=\frac{E_m}{L}\sin\omega t$，ここで公式（8.17）を用いると

$i=e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\int\frac{E_m}{L}\sin\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}\,dt+A\right\}=e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{E_m}{L}\int\sin\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}\,dt+A\right\}$

6 章の演習問題【8】（8）の解より

$\int\sin\omega t\cdot e^{\frac{R}{L}t}\,dt=\frac{e^{\frac{R}{L}t}}{\left(\frac{R}{L}\right)^2+\omega^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right)=\frac{e^{\frac{R}{L}t}\cdot L^2}{R^2+\omega^2L^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right)$

$\therefore\quad i=e^{-\frac{R}{L}t}\left\{\frac{E_m}{L}\cdot\frac{e^{\frac{R}{L}t}\cdot L^2}{R^2+\omega^2L^2}\left(\frac{R}{L}\sin\omega t-\omega\cos\omega t\right)+A\right\}$

$=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}(R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t)+Ae^{-\frac{R}{L}t}$

ここで，$R\sin\omega t-\omega L\cos\omega t=\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\sin(\omega t-\varphi)$　　（$\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$）

$i=\frac{E_m}{R^2+\omega^2L^2}\sqrt{R^2+\omega^2L^2}\sin(\omega t-\varphi)+Ae^{-\frac{R}{L}t}=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)+Ae^{-\frac{R}{L}t}$

$t=0$ で $i=0$ より $\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(-\varphi)+A=0$　　$\therefore\quad A=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin\varphi$

$\therefore\quad i=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\left\{\sin(\omega t-\varphi)+\sin\varphi\, e^{-\frac{R}{L}t}\right\}$　　（$\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$）

（別解）$i=i_s+i_t$ とおくと

$L\frac{di_s}{dt}+Ri_s=E_m\sin\omega t\cdots$（1）　$L\frac{di_t}{dt}+Ri_t=0\cdots$（2），式（2）より $i_t=Ae^{-\frac{R}{L}t}$

式（1）を満足する定常解 i_s は交流回路の定常電流 $\boldsymbol{I_s}$ で，次式を満足する。

$(R+j\omega L)\boldsymbol{I_s}=\boldsymbol{E}\cdots$（3）

式（3）より，電流の振幅は $I_s=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}$ となり，位相は電圧に対して $\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$ だけ遅れる。

したがって，$i_s=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)$ となる。

$\therefore\quad i=i_s+i_t=\frac{E_m}{\sqrt{R^2+\omega^2L^2}}\sin(\omega t-\varphi)+Ce^{-\frac{R}{L}t}$　　（$\varphi=\tan^{-1}\frac{\omega L}{R}$）

【4】（1）補助方程式 $2m^2-m-3=0$ の解は，$m=\frac{3}{2},-1$　　$\therefore\quad y=A_1e^{\frac{3}{2}x}+A_2e^{-x}$

（2）$m^2+2m-5=0$ より，$m=-2\pm j3$　　$\therefore\quad y=e^{-2x}(A_1\cos3x+A_2\sin3x)$

（3）$m^2+4m+4=0$ より，$m=-2$　　$\therefore\quad y=e^{-2x}(A_1+A_2x)$

（4）$y''+4y=0$ の一般解は，$m^2+4=0$ の解 $m=\pm j2$ より，$y=A_1\cos2x+A_2\sin2x$

特別解は，$y=C_0+C_1x$ とおくと，$4(C_0+C_1x)=x$ より，$C_0=0$，$C_1=\frac{1}{4}$

$\therefore\quad y=\frac{1}{4}x$

$\therefore\quad y=A_1\cos2x+A_2\sin2x+\frac{1}{4}x$

（5）$y''+y'-6y=0$ の一般解は，$m^2+m-6=0$ の解 $m=2,-3$ より

$y=A_1e^{2x}+A_2e^{-3x}$

特別解は，$y = Ce^{3x}$とおくと，$9Ce^{3x} + 3Ce^{3x} - 6Ce^{3x} = e^{3x}$より

$C = \frac{1}{6}$　　∴　$y = \frac{1}{6}e^{3x}$

∴　$y = A_1 e^{2x} + A_2 e^{-3x} + \frac{1}{6}e^{3x}$

（6）$y'' + 2y' + 4y = 0$ の一般解は，$m^2 + 2m + 4 = 0$ の解 $m = -1 \pm j\sqrt{3}$より

∴　$y = e^{-x}\left(A_1 \sin\sqrt{3}x + A_2 \cos\sqrt{3}x\right)$

特別解は，$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$ とおくと

$y' = 2C_1 \cos 2x - 2C_2 \sin 2x$，$y'' = -4C_1 \sin 2x - 4C_2 \cos 2x$

$y'' + 2y' + 4y = 4C_1 \cos 2x - 4C_2 \sin 2x = \sin 2x$　　$C_1 = 0$，$C_2 = -\frac{1}{4}$

∴　$y = -\frac{1}{4}\cos 2x$

∴　$y = e^{-x}\left(A_1 \sin\sqrt{3}x + A_2 \cos\sqrt{3}x\right) - \frac{1}{4}\cos 2x$

【5】$v_C = \frac{q}{C}$, $v_L = L\frac{di}{dt} = L\frac{d^2q}{dt^2}$，回路方程式は，$v_L + v_C = L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = E \cdots$（1）となる。

$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0$ の一般解は，$Lm^2 + \frac{q}{C} = 0$ の解 $m = \pm j\frac{1}{\sqrt{LC}}$ より

$q_t = A_1 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + A_2 \sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$

式（1）の特別解は $q_s = CE$　　∴　$q = q_s + q_t = CE + A_1 \cos\frac{t}{\sqrt{LC}} + A_2 \sin\frac{t}{\sqrt{LC}}$

$i = \frac{dq}{dt} = -\frac{A_1}{\sqrt{LC}}\sin\frac{t}{\sqrt{LC}} + \frac{A_2}{\sqrt{LC}}\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$

$t = 0$ で$q = 0, i = 0$ より，$CE + A_1 = 0$，$A_2/\sqrt{LC} = 0$

$A_1 = -CE$，$A_2 = 0$　　∴　$q = CE - CE\cos\frac{t}{\sqrt{LC}}$

ここで，$\omega = 1/\sqrt{LC}$ とおくと$q = CE(1 - \cos\omega t)$

∴　$v_C = \frac{q}{C} = E(1 - \cos\omega t)$　　（$\omega = 1/\sqrt{LC}$）

【6】各パラメータの値を代入すると

回転運動の方程式は $\frac{d^2\theta}{dt^2} + 8\frac{d\theta}{dt} + 25\theta = 5 \cdots$（1）となる。

$\theta = \theta_s + \theta_t$とおくと，$\frac{d^2\theta_s}{dt^2} + 8\frac{d\theta_s}{dt} + 25\theta_s = 5 \cdots$（1）　$\frac{d^2\theta_t}{dt^2} + 8\frac{d\theta_t}{dt} + 25\theta_t = 0 \cdots$（2）

式（2）の一般解は，$m^2 + 8m + 25 = 0$ の解$m = -4 \pm j3$ より

$\theta_t = e^{-4t}(A_1 \cos 3t + A_2 \sin 3t)$

式（1）の定常解は，$\theta_s = \frac{1}{5}$　　∴　$\theta = \theta_s + \theta_t = \frac{1}{5} + e^{-4t}(A_1 \cos 3t + A_2 \sin 3t)$

$t = 0$ で$\theta = 0$，$\frac{d\theta}{dt} = 0$ より，$\frac{1}{5} + A_1 = 0$，$-4A_1 + 3A_2 = 0$　　$A_1 = -\frac{1}{5}$，$A_2 = -\frac{4}{15}$

∴　$\theta = \frac{1}{5} - e^{-4t}\left(\frac{1}{5}\cos 3t + \frac{4}{15}\sin 3t\right) = \frac{1}{5} - \frac{1}{15}e^{-4t}(3\cos 3t + 4\sin 3t)$

$3\cos 3t + 4\sin 3t = 5\sin(3t + \varphi)$　$\left(\tan\varphi = \frac{4}{3}\right)$より　∴　$\theta = \frac{1}{5} - \frac{1}{3}e^{-4t}\sin(3t + \varphi)$

９．フーリエ級数

【1】（1）半波整流波$f(\theta)$は

$$f(\theta)=\begin{cases}V\sin\theta & (0\le\theta\le\pi)\\ 0 & (\pi\le\theta\le 2\pi)\end{cases}$$

まず，直流成分は

$$a_0=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)d\theta=\frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}V\sin\theta\,d\theta=2\frac{V}{\pi}[-\cos\theta]_0^{\pi}=\frac{V}{\pi}$$

つぎに，係数a_nは

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\cos n\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}V\sin\theta\cos n\theta\,d\theta$$
$$=\frac{V}{\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}d\theta$$
$$=\frac{V}{\pi}\left\{-\left[\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}\right]_0^{\pi}+\left[\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\right]_0^{\pi}\right\}$$
$$=\frac{V}{\pi}\left\{\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}-\frac{\cos(n+1)\pi-1}{n+1}\right\}$$
$$=\frac{V}{\pi}\left\{\frac{(-1)^{n-1}-1}{n-1}-\frac{(-1)^{n+1}-1}{n+1}\right\}$$

ここで

$$(-1)^{n\pm1}=\begin{cases}-1 & (n=2m)\\ 1 & (n=2m-1)\end{cases}\qquad (m=1,2,3,\cdots)$$

であるから，a_nは n が奇数のとき 0 となり，偶数のとき

$$a_n=a_{2m}=\frac{V}{\pi}\left(\frac{-2}{2m-1}-\frac{-2}{2m+1}\right)=\frac{-2V}{\pi(4m^2-1)}$$

となる。一方，係数b_nは

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}V\sin\theta\sin n\theta\,d\theta$$
$$=\frac{V}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\cos(n-1)\theta-\cos(n+1)\theta\}d\theta$$

上式は$n=1$以外は 0 となり

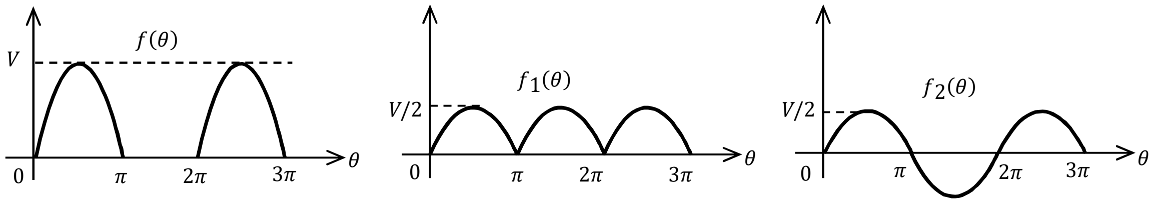
$$b_1=\frac{V}{2\pi}\int_0^{\pi}(1-\cos2\theta)d\theta=\frac{V}{2\pi}\left[\theta-\frac{\sin 2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{V}{2}$$

したがって，半波整流のフーリエ級数は

$$f(\theta)=a_n+\ b_1\sin\theta+\sum_{m=1}^{\infty}a_{2m}\cos2m\theta$$
$$=\frac{V}{\pi}+\frac{V}{2}\sin\theta-\frac{2V}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos2\theta+\frac{1}{15}\cos4\theta+\frac{1}{35}\cos6\theta+\cdots+\frac{\cos2m\theta}{(4m^2-1)}+\ \cdots\right)$$
$$=\frac{V}{\pi}+\frac{V}{2}\sin\theta-\frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\mathrm{co}}{(4m^2-1)}$$

となる。

（別解）**解図 9.1** のように，半波整流波$f(\theta)$は振幅が半分の全波整流波$f_1(\theta)$と正弦波$f_2(\theta)$の和で表される。



解図 9.1

$$f(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta)$$

ここで，$f_1(\theta)$は式(9.50)でV を$V/2$とおくことにより

$$f_1(\theta) = \frac{V}{\pi} - \frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\theta}{(4m^2-1)}$$

また，振幅$V/2$の正弦波$f_2(\theta)$は

$$f_2(\theta) = \frac{V}{2}\sin\theta$$

となる。したがって

$$f(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta)$$
$$= \frac{V}{\pi} - \frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m}{(4m^2-1)} + \frac{V}{2}\sin\theta = \frac{V}{\pi} + \frac{V}{2}\sin\theta - \frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos 2m\theta}{(4m^2-1)}$$

（2）方形波$f(\theta)$は

$$f(\theta) = \begin{cases} V & (0 \le \theta \le \pi) \\ 0 & (\pi \le \theta \le 2\pi) \end{cases}$$

まず，直流成分は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} V d\theta = \frac{V}{2\pi}[\theta]_0^{\pi} = \frac{V}{2}$$

つぎに，係数a_nは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi}\cos n\theta\, d\theta = 0$$

一方，係数b_nは

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\sin n\theta\, d\theta = \frac{V}{\pi}\int_0^{\pi}\sin n\theta\, d\theta = \frac{V}{\pi}\left[-\frac{\cos n\theta}{n}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{n\pi}(1-\cos n\pi)$$

となり，b_nは n が偶数のとき 0 となり，奇数のとき

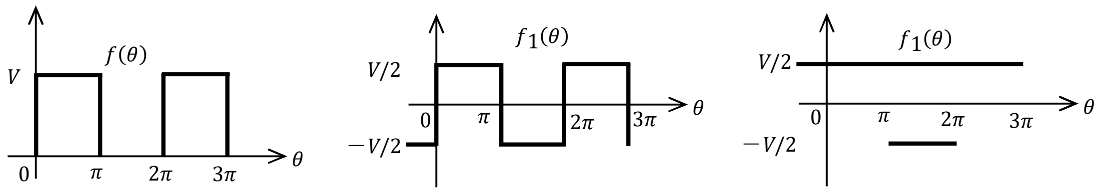
$$b_{2m-1} = \frac{2V}{(2m-1)\pi}$$

したがって，フーリエ級数は

$$f(\theta) = a_0 + \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m-1}\sin(2m-1)\theta = \frac{V}{2} + \sum_{m=1}^{\infty}\frac{2V}{(2m-1)\pi}\sin(2m-1)\theta$$
$$= \frac{V}{2} + \frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\theta}{(2m-1)}$$

となる。

（別解）**解図 9.2** より，方形波$f(\theta)$は振幅が V/2 の方形波$f_1(\theta)$と振幅が V/2 の直流成分の和となる。



解図 9.2

$f_1(\theta)$は，式(9.39)より

$$f_1(\theta) = \frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\theta}{(2m-1)}$$

一方，直流成分 $f_2(\theta) = V/2$。

よって，$f(\theta)$は

$$f(\theta) = f_1(\theta) + f_2(\theta) = \frac{V}{2} + \frac{2V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\theta}{(2m-1)}$$

【2】（1）三角波$f(\theta)$は

$$f(\theta) = \begin{cases} \frac{V}{\pi}\theta + V & (-\pi \le \theta \le 0) \\ -\frac{V}{\pi}\theta + V & (0 \le \theta \le \pi) \end{cases}$$

直流成分a_0は

$$a_0 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\theta)d\theta = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\left(-\frac{V}{\pi}\theta + V\right)d\theta = \frac{V}{\pi}\left[\theta - \frac{\theta^2}{2\pi}\right]_0^{\pi} = \frac{V}{\pi}\left(\pi - \frac{\pi}{2}\right) = \frac{V}{2}$$

また，a_nは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\theta)\cos n\theta\, d\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(V - \frac{V}{\pi}\theta\right)\cos n\theta\, d\theta$$
$$= \frac{2V}{\pi}\left\{\int_0^{\pi}\cos n\theta\, d\theta - \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\, d\theta\right\} = -\frac{2V}{\pi^2}\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\, d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}\theta\left(\frac{\sin n\theta}{n}\right)' d\theta = \left[\theta\ \frac{\sin n\theta}{n}\right]_0^{\pi} - \int_0^{\pi}\frac{\sin n\theta}{n}d\theta$$

$$= \left[\frac{\theta\sin}{n}\right]_0^{\pi} + \left[\frac{\cos n\theta}{n^2}\right]_0^{\pi} = \frac{\cos n\pi - 1}{n^2}$$

また

$$\cos n\pi = \begin{cases} 1 & (n = 2m) \\ -1 & (n = 2m-1) \end{cases} \qquad (m = 1,2,3,\cdots)$$

であるから，a_nは n が奇数$(2m-1)$のときのみ存在し

$$a_{2m-1} = -\frac{2V}{\pi^2}\frac{-2}{(2m-1)^2} = \frac{4V}{(2m-1)^2\pi^2}$$

一方，$f(\theta)$は偶関数だから$b_n = 0$である。

したがって，フーリエ級数は

$$f(\theta)=a_0+\sum_{m=1}^{\infty}a_{2m-1}\cos(2m-1)\theta=\frac{V}{2}+\frac{4V}{\pi^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\cos(2m-1)\theta}{(2m-1)^2}$$

（2）のこぎり波$f(\theta)$は奇関数より$a_n=0$である。また，1 周期にわたる平均値は 0 となるので，$a_n=0$である。一方，$f(\theta)$は

$$f(\theta)=\frac{V}{\pi}\theta \qquad (-\pi\leq\theta\leq\pi)$$

であるから，b_nは

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}f(\theta)\sin n\theta\,d\theta=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}\left(\frac{V}{\pi}\theta\right)\sin n\theta\,d\theta=\frac{2V}{\pi^2}\int_0^{\pi}\theta\cos n\theta\,d\theta$$

ここで

$$\int_0^{\pi}\theta\sin n\theta\,d\theta=\int_0^{\pi}\theta\left(\frac{-\cos n}{n}\right)'d\theta=\left[\frac{-\theta\cos n\theta}{n}\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\frac{\cos n\theta}{n}d\theta=\frac{-\pi\cos n\pi}{n}$$

$-\cos n\pi=(-1)^{n-1}$であるから

$$\therefore \quad b_n=\frac{2V}{\pi}\cdot\frac{(-1)^{n-1}}{n}$$

したがって，フーリエ級数は

$$f(\theta)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\theta=\frac{2V}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin n\theta}{n}$$

【3】方形波$f(\theta)$は

$$f(\theta)=\begin{cases}-V & (-\pi\leq\theta\leq0)\\ V & (0\leq\theta\leq\pi)\end{cases}$$

であるから，複素フーリエ級数の係数c_nは

$$c_n=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(\theta)e^{-jn\theta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{0}-Ve^{-jn\theta}d\theta+\int_0^{\pi}Ve^{-jn\theta}d\theta\right)$$

$$=\frac{2}{2\pi}\int_0^{\pi}Ve^{-jn\theta}d\theta=\frac{V}{\pi}\left[-\frac{e^{-jn\theta}}{jn}\right]_0^{\pi}=j\frac{V}{\pi}\left(\frac{e^{-jn\pi}-1}{n}\right)$$

ここで

$$e^{-jn\pi}=\begin{cases}1 & (n=2m)\\ -1 & (n=2m-1)\end{cases} \qquad (\mathrm{m}=1,2,3,\cdots)$$

より，c_nはnが奇数のときのみ存在し

$$c_{2m-1}=-j\frac{2V}{(2m-1)\pi}$$

したがって，複素フーリエ級数は次式となる。

$$\begin{aligned}f(\theta)&=\sum_{n=-\infty}^{\infty}c_n e^{-jn\theta}=-j\frac{2V}{\pi}\sum_{m=-\infty}^{\infty}\frac{e^{-j(2m-1)\theta}}{2m-1}\\&=-j\frac{2V}{\pi}e^{-j\theta}-j\frac{2V}{3\pi}e^{-j3\theta}-j\frac{2V}{5\pi}e^{-j5\theta}-j\frac{2V}{7\pi}e^{-j7\theta}-\cdots\\&\quad+j\frac{2V}{\pi}e^{j\theta}+j\frac{2V}{3\pi}e^{j3\theta}+j\frac{2V}{5\pi}e^{j5\theta}+j\frac{2V}{7\pi}e^{j7\theta}+\cdots\end{aligned} \qquad (1)$$

ところで，式（9.27）より，三角関数によるフーリエ級数の係数を求めると

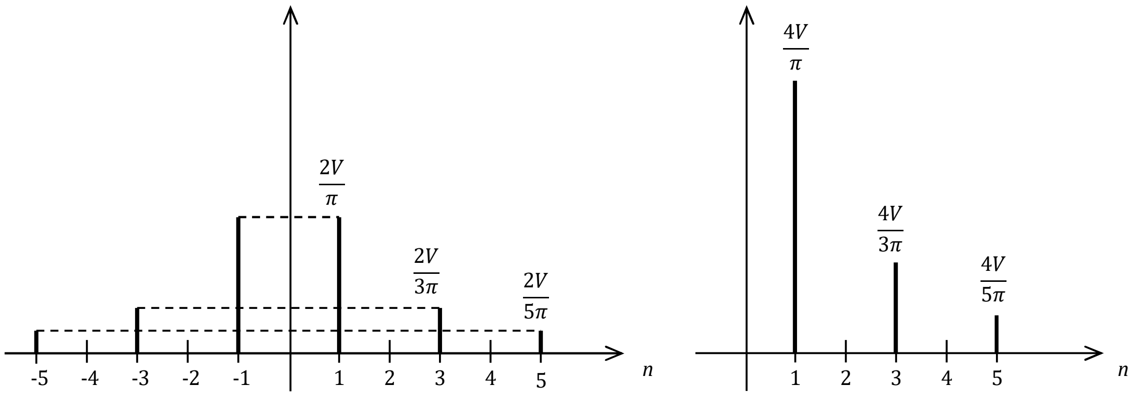
$$a_{2m-1} = c_{2m-1} + c_{-(2m-1)} = -j\frac{2V}{(2m-1)\pi} + j\frac{2V}{(2m-1)\pi} = 0$$
$$b_{2m-1} = j\left(c_{2m-1} - c_{-(2m-1)}\right) = j\left(-j\frac{2V}{(2m-1)\pi} - j\frac{2V}{(2m-1)\pi}\right) = \frac{4V}{(2m-1)\pi}$$

したがって，フーリエ級数を展開すると

$$f(\theta) = \frac{4V}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\sin(2m-1)\theta}{(2m-1)} = \frac{4V}{\pi}\left(\sin\theta + \frac{1}{3}\sin 3\theta + \frac{1}{5}\sin 5\theta + \frac{1}{7}\sin 7\theta + \cdots\right) \quad (2)$$

となり，式(9. 36)と同じになる。

複素素フーリエ級数（1）の係数と三角関数によるフーリエ級数（2）の係数を，横軸に次数 n をとって表すと**解図 9.3** のようになり，これを線スペクトルという。複素フーリエ級数の線スペクトルは n が正と負の両方で存在し，その両者の係数を加えると，三角関数によるフーリエ級数の係数になる。



(1)複素フーリエ級数　　(2)三角関数によるフーリエ級数

解図 9.1

【4】まず，回路にコンデンサが直列に接続されているため，直流電流$I_0 = 0$となる。

つぎに，交流電圧の場合

①基本波電圧：

電圧の実効値は$V_{1e} = \frac{V_1}{\sqrt{2}} = \frac{12\sqrt{2}}{\sqrt{2}} = 12\ \mathrm{V}$

インピーダンス$Z = R + j\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) = 2 + j\left(100 \cdot 20 \times 10^{-3} - \frac{1}{100 \cdot 5\,000 \times 10^{-6}}\right)$

$= 4 + j(2-2) = 4$

$\therefore \quad |Z| = 4\ \Omega,\quad \cos\theta_1 = 1$

したがって，電流の実効値は　$I_{1e} = V_{1e}/|Z| = 12/4 = 3\ \mathrm{A}$

また，電力は$P_{1e} = V_{1e} I_{1e}\cos\theta_1 = 12 \cdot 3 \cdot 1 = 36\ \mathrm{W}$

②第 2 高調波電圧：

電圧の実効値は$V_{2e}=\frac{V_2}{\sqrt{2}}=\frac{20\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=20\ \mathrm{V}$

インピーダンス$Z=R+j\left(2\omega L-\frac{1}{2\omega C}\right)=2+j\left(2\cdot 100\cdot 20\times 10^{-3}-\frac{1}{2\cdot 100\cdot 5\ 000\times 10^{-6}}\right)$

$$=4+j(4-1)=4+j3\ \Omega$$

$$\therefore\quad |Z|=\sqrt{4^2+3^2}=5\ \Omega,\quad \cos\theta_2=4/5=0.8$$

したがって，電流の実効値は $I_{2e}=V_{2e}/|Z|=20/5=4\ \mathrm{A}$

また，電力は $P_{2e}=V_{2e}I_{2e}\cos\theta_2=20\cdot 4\cdot 0.8=64\ \mathrm{W}$

以上より，回路電流I_eは

$$I_e=\sqrt{{I_{1e}}^2+\ {I_{2e}}^2}=\sqrt{3^2+\ 4^2}=5\ \mathrm{A}$$

また，消費電力Pは

$$P=P_{1e}+P_{2e}=36+64=100\ \mathrm{W}$$

となる。なお，消費電力Pは抵抗 R での電力となるため

$$P=R{I_e}^2=4\cdot 5^2=100\ \mathrm{W}$$

としても求められる。

10. ラプラス変換

【1】（1）$\mathcal{L}\left[e^{j\omega t}\right]=\int_0^\infty e^{j\omega t}e^{st}dt=\int_0^\infty 1\cdot e^{-(s-j\omega)t}dt=\frac{1}{s-j\omega}$

（2）$\mathcal{L}[e^{-2t}]=\int_0^\infty e^{-2t}e^{st}dt=\int_0^\infty 1\cdot e^{-(s+2)t}dt=\frac{1}{s+2}$

あるいは，推移定理 $\mathcal{L}[e^{-at}f(t)]=F(s+a)$で，$f(t)=1$ とすると

$F(\mathrm{s})=\frac{1}{s}$　　$a=2$ より，$\mathcal{L}[e^{-2t}]=\frac{1}{s+2}$

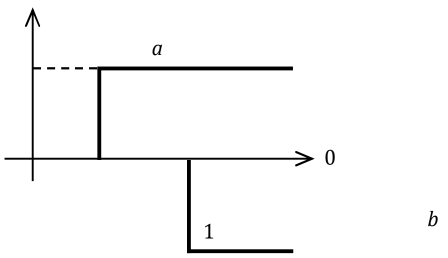
（3）$\mathcal{L}[\sin 2t]=\mathcal{L}\left[\frac{e^{j2t}-e^{-j2t}}{2j}\right]=\frac{1}{2j}\left[\frac{1}{s-2j}-\frac{1}{s+2j}\right]=\frac{1}{2j}\cdot\frac{4j}{s^2+4}=\frac{2}{s^2+4}$

（4）$f(t)=\sin 2t$ として 推移定理より，$\mathcal{L}[e^{-t}\sin 2t]=\frac{2}{(s+1)^2+4}=\frac{2}{s^2+2s+5}$

【2】（1）解図 10.1 より，$f(t)=u(t-a)-u(t-b)$となる。

したがって，推移定理$\mathcal{L}[f(t-a)]=e^{-as}F(s)$より

$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[\ u(t-a)]-\mathcal{L}[u(t-b)]\ =\frac{e^{-as}}{s}-\frac{e^{-bs}}{s}=\frac{e^{-as}-e^{-bs}}{s}$

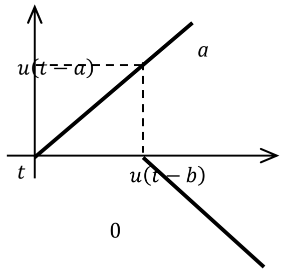


（2）解図 10.2 より

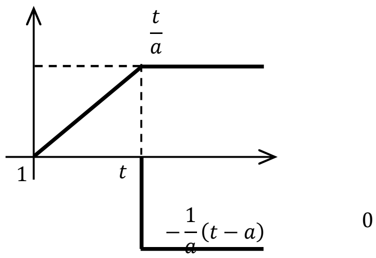
$f(t)=\frac{t}{a}-\frac{1}{a}(t-a)-u(t-a)$となるから

$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}\left[\frac{t}{a}\right]-\mathcal{L}\left[\frac{1}{a}(t-a)\right]-\mathcal{L}[\,u(t-a)]=\frac{1}{as^2}-\frac{e^{-as}}{as^2}-\frac{e^{-as}}{s}$

$=\frac{1}{as^2}(1-e^{-as})-\frac{e^{-a}}{s}$



解図 10.1



【3】（1）最初の 1 周期(0～T)の波形を$g(t)$とすると，$f(t)$は$g(t)$をTずつずらして加え合わせたものとなるから

$$f(t)=g(t)+g(t-T)+g(t-2T)+\cdots$$

したがって，推移定理より

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[g(t)]+\mathcal{L}[g(t-T)]+\mathcal{L}[g(t-2T)]+\cdots$$

$$=G(s)+e^{-Ts}G(s)+e^{-2Ts}G(s)+\cdots$$

$$=G(s)(1+e^{-Ts}+e^{-2Ts}+\cdots)$$

ここで，演習問題【2】（2）の解より，$G(s)=\frac{1}{Ts^2}(1-e^{-T}\ )-\frac{e^{-T}}{s}$

また，$\frac{1}{1-e^{-T}}=1+e^{-T}\ \ +e^{-2Ts}+\cdots$

$$\mathcal{L}[f(t)]=\left\{\frac{1}{Ts^2}(1-e^{-Ts})-\frac{e^{-Ts}}{s}\right\}\frac{1}{1-e^{-T}}=\frac{1}{Ts^2}-\frac{e^{-Ts}}{s(1-e^{-Ts})}$$

（2）最初の 1 周期$(0～T\ )$の波形を$g(t)$とすると，$f(t)$は$g(t)$を 1 周期ごとに交互に反転しながら加え合わせたものとなるから

$$f(t)=g(t)-g(t-T)+g(t-2T)-g(t-3T)+\cdots$$

したがって，推移定理より

$$\mathcal{L}[f(t)]=\mathcal{L}[g(t)]-\mathcal{L}[g(t-T)]+\mathcal{L}[g(t-2T)]-\cdots$$

$$=G(s)-e^{-T}\ G(s)+e^{-2Ts}G(s)-e^{-3Ts}G(s)+\cdots$$

$= G(s)(1 - e^{-Ts} + e^{-2Ts} - e^{-3Ts} + \cdots)$

ここで，$g(t)$は演習問題【2】（1）で$a = 0, b = a$の場合に相当するので

$G(s) = \frac{1-e^{-as}}{s}$

また，$\frac{1}{1+e^{-Ts}} = 1 - e^{-Ts} + e^{-2T} \ - e^{-3Ts} + \cdots$

$\therefore \quad \mathcal{L}[f(t)] = \left(\frac{1-e^{-a}}{s}\right)\frac{1}{1+e^{-Ts}} = \frac{1-e^{-as}}{s(1+e^{-Ts})}$

【4】（1）部分分数展開

$F(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{s+2}$

$a = \ F(s)(s+1)]_{s=-1} = \left.\frac{1}{s+2}\right]_{s=-1} = 1$，$b = \ F(s)(s+2)]_{s=-2} = \left.\frac{1}{s+1}\right]_{s=-2} = -1$

$F(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2} \qquad \therefore \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right] = e^{-t} - e^{-2t}$

留数演算

$F(s)$は$\mathrm{s} = -1, -2$ の 1 位の極を持つので

$f(t) = (s+1)F(s)e^{st}]_{s=-1} + (s+2)F(s)e^{st}]_{s=-2} = \left.\frac{e^{st}}{s+2}\right]_{s=-1} + \left.\frac{e^{st}}{s+1}\right]_{s=-2}$

$= e^{-t} - e^{-2t}$

（2）部分分数展開

$F(s) = \frac{2s+1}{s^2+2s+1} = \frac{2s+1}{(s+1)^2} = \frac{a}{s+1} + \frac{b}{(s+1)^2}$

両辺に$(s+1)^2$ を掛けると

$2s + 1 = a(s+1) + b = as + a + b \qquad \therefore \quad a = 2$，$\mathrm{b} = -1$

$F(s) = \frac{2}{s+1} - \frac{1}{(s+1)^2} \qquad \therefore \quad f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{2}{s+1}\right] - \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+1)^2}\right] = 2e^{-t} - te^{-t}$

留数演算

$(s+1)^2 = 0$ より，$F(s)$は$\mathrm{s} = -1$ の 2 位の極を持つので

$f(t) = \left.\frac{d}{ds}\{(s+1)^2F(s)e^{st}\}\right]_{s=-1} = \left.\frac{d}{ds}\{(2s+1)e^{st}\}\right]_{s=-1}$

$= \{2e^{st} + (2s+1)te^{st}\}]_{s=-1} = 2e^{-t} - te^{-t}$

（3）部分分数展開

$F(s) = \frac{3s^2-4}{(s^2+4)(s+2)^2} = \frac{as+b}{s^2+4} + \frac{c}{s+2} + \frac{d}{(s+2)^2}$

右辺$= \frac{(a+c)s^3+(4a+b+2c+d)s^2+4(a+b+c)s+4(b+2c+d)}{(s^2+4)(s+2)^2}$となり

a，b，c，dは以下の連立方程式の解である。

$a + c = 0$ ①

$4a + b + 2c + d = 3$ ②

$4(a + b + c) = 0$ ③

$4(b + 2c + d = -4$ ④

上式を解くと $a=1$, $\mathrm{b}=0$, $\mathrm{c}=-1$, $\mathrm{d}=1$ となり，$F(s)=\frac{s}{s^2+4}-\frac{1}{s+2}+\frac{1}{(s+2)^2}$

$$\therefore \quad f(t)=\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+4}\right]-\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+2}\right]+\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s+2)^2}\right]=\cos 2t-e^{-2t}+te^{-2t}$$

留数演算

$(s^2+4)(s+2)^2=0$ より，$F(s)$は $s=\pm j2$（1 位の極），$s=-2$（2 位の極）を持つので

$$F(s)=\frac{3s^2-4}{(s+j2)(s-j2)(s+2)^2}$$

$$f(t)=(s+j2)F(s)e^{st}\big]_{s=-j2}+(s-j2)F(s)e^{st}\big]_{s=j2}+\frac{d}{ds}\{(s+2)^2F(s)e^{st}\}\Big]_{s=-2}$$

$$=\frac{3s^2-4}{(s-j2)(s+2)^2}e^{st}\Big]_{s=-j2}+\frac{3s^2-4}{(s+j2)(s+2)^2}e^{st}\Big]_{s=j2}+\frac{d}{ds}\left\{\frac{3s^2-4}{s^2+4}e^{st}\right\}\Big]_{s=-2}$$

$$=\frac{1}{2}e^{-j2t}+\frac{1}{2}e^{j2t}+\frac{32s}{s^2+4}e^{st}\Big]_{s=-2}+\frac{3s^2-4}{s^2+4}te^{st}\Big]_{s=-2}$$

$$=\frac{e^{-j2t}+e^{j2t}}{2}-e^{-2t}+te^{-2t}=\cos 2t-e^{-2t}+te^{-2t}$$

【5】回路方程式は

$Ri(t)+\frac{1}{C}\int i\,dt=e(t)$　ここで，$\mathcal{L}[i]=I(s)$，$\mathcal{L}[e]=E(s)$とおくと

$RI(s)+\frac{1}{C}\left[\frac{I(s)}{s}+\frac{1}{s}\int i\,dt\right]_{t=0}=E(s)$，$RI(s)+\frac{I(s)}{Cs}+\frac{q(0)}{Cs}=E(s)$

$I(s)\left(R+\frac{1}{Cs}\right)=E(s)-\frac{q(0)}{Cs}$，$I(s)=\frac{Cs}{CRs+1}E(s)-\frac{q(0)}{CRs+1}$

$$\therefore \quad I(s)=\frac{s}{s+\frac{1}{CR}}\cdot\frac{E(s)}{R}-\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\cdot\frac{q(0)}{C}\cdot\frac{1}{R} \quad \cdots ①$$

（1）$e(t)=Eu(t)$より，$E(s)=\mathcal{L}[Eu(t)]=\frac{E}{s}$，また，$\frac{q(0)}{C}=V_0$

これらを式①へ代入すると

$$I(s)=\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\cdot\frac{E}{R}-\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\cdot\frac{V_0}{R}=\frac{E-V_0}{R}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}$$

$$\therefore \quad i(t)=\mathcal{L}^{-1}[I(s)]=\frac{E-V_0}{R}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{1}{CR}}\right]=\frac{E-V_0}{R}e^{-\frac{t}{CR}}$$

（2）$e(t)=E\sin\omega t$ より，$E(s)=\mathcal{L}[E\sin\omega t]=\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}$，$q(0)=0$，$\alpha=\frac{1}{CR}$ とおく

これらを式①へ代入すると

$$I(s)=\frac{s}{s+\alpha}\cdot\frac{1}{R}\frac{E\omega}{s^2+\omega^2}=\frac{E\omega}{R}\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)}$$

$\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)}=\frac{a}{s+\alpha}+\frac{bs+c}{s^2+\omega^2}$ とおくと，$a=\frac{-\alpha}{\alpha^2+\omega^2}, b=\frac{\alpha}{\alpha^2+\omega^2}, c=\frac{\omega^2}{\alpha^2+\omega^2}$

したがって

$$\frac{s}{(s+\alpha)(s^2+\omega^2)}=\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\left(\frac{-\alpha}{s+\alpha}+\frac{\alpha s}{s^2+\omega^2}+\frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right)$$

$$\therefore \quad i(t) = \mathcal{L}^{-1}[I(s)] = \frac{\omega E}{R}\frac{1}{\alpha^2+\omega^2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-\alpha}{s+\alpha} + \frac{\alpha s}{s^2+\omega^2} + \frac{\omega^2}{s^2+\omega^2}\right]$$
$$= \frac{\omega E}{R(\alpha^2+\omega^2)}(-\alpha e^{-\alpha t} + \alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t)$$

ここで，$\alpha\cos\omega t + \omega\sin\omega t = \sqrt{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t + \varphi)$　　　（$\varphi = \tan^{-1}\frac{\alpha}{\omega}$）

$$i(t) = \frac{\omega E}{R(\alpha^2+\omega^2)}\left\{-\alpha e^{-\alpha} + \sqrt{\alpha^2+\omega^2}\sin(\omega t+\varphi)\right\}$$
$$= \frac{E\omega}{R\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi) - \frac{E\omega\alpha}{R(\alpha^2+\omega^2)}e^{-\alpha t}$$

$$\frac{E\omega}{R\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{R^2}{\omega^2}\left[\left(\frac{1}{CR}\right)^2+\omega^2\right]}} = \frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\frac{\omega\alpha}{R(\alpha^2+\omega^2)} = \frac{\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\omega^2}}\cdot\frac{\omega}{R\sqrt{\alpha^2+\omega^2}} = \sin\varphi\frac{1}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}$$

$$\therefore \quad i(t) = \frac{E}{\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{\omega C}\right)^2}}\left\{\sin(\omega t+\varphi) - e^{-\frac{t}{CR}}\sin\varphi\right\} \qquad \left(\varphi = \tan^{-1}\frac{1}{\omega CR}\right)$$

【6】z 変換すると，$Y(z) = \frac{1}{2}\{X(z) - X(z)\}z^{-1} = \frac{1}{2}(1-z^{-1})\,X(z)$　$\therefore$　$H(z) = \frac{1}{2}(1-z^{-1})$

$$H(j\omega) = H(z)|_{z=e^{j\omega T}} = \frac{1}{2}\left(1-e^{-j\omega T}\right) = \frac{1}{2}\{1+\cos\omega T - j\sin\omega T\} = G(\omega)e^{j\phi(\omega)}$$

これより

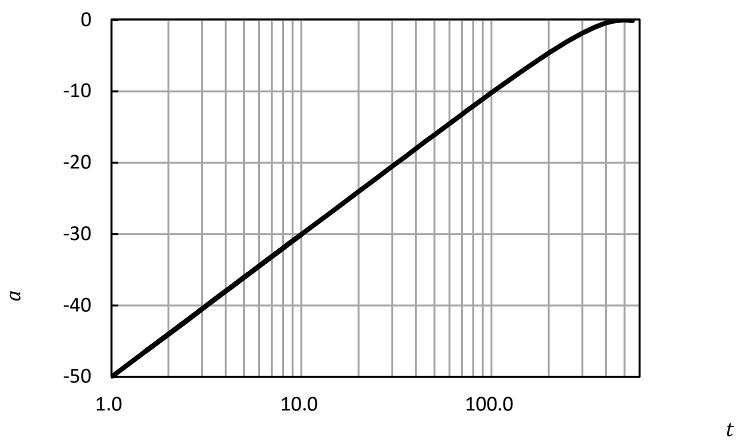
$$g(\omega) = 20\log G(\omega) = 20\log\left\{\frac{1}{2}\sqrt{(1-\cos\omega T)^2+\sin^2\omega T}\right\} = 20\log\left\{\frac{1}{2}\sqrt{2(1-\cos\omega T)}\right\}$$
$$= 20\log\left(\sin\frac{\omega T}{2}\right)$$

一方，$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\omega T}{1-\cos\omega T}\right) = \tan^{-1}\left(\frac{\sin\frac{\omega T}{2}\cos\frac{\omega T}{2}}{\sin^2\frac{\omega T}{2}}\right) = \tan^{-1}\left(\cot\frac{\omega T}{2}\right)$

ここで，T = 0.001(s)，$\omega = 2\pi f$ を代入すると

$g(f) = 20\log\left(\sin\frac{\pi f}{1000}\right)$ [dB]，$\phi(\omega) = \tan^{-1}\left(\cot\frac{\pi f}{1000}\right)$ [rad]

$g(f)$を図示すると**解図 10.3** となり，高域通過フィルタ（high pass filter，HPF）となる。



1

11．双曲線関数

【1】（1）$\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y = \frac{e^x+e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y+e^{-y}}{2} + \frac{e^x-e^{-x}}{2}\cdot\frac{e^y-e^{-y}}{2}$

$$= \frac{e^{x+y}+e^{x-y}+e^{x-y}+e^{-x-y}}{4} + \frac{e^{x+y}-e^{x-y}-e^{x-y}+e^{-x-y}}{4}$$

$$= \frac{2e^{x+y}+2e^{-x-y}}{4} = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \cosh(x+y)$$

（別解）

$$\cosh(x+y) = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \frac{e^x e^y + e^{-x}e^{-y}}{2}$$

$e^{\pm x} = \cosh x \pm \sinh x$ より

$$e^x e^y = (\cosh x + \sinh x)(\cosh y + \sinh y)$$

$$= \cosh x \cosh y + \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y + \sinh x \sinh y \qquad (1)$$

同様にして

$$e^{-x}e^{-y} = \cosh x \cosh y - \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y + \sinh x \sinh y \qquad (2)$$

（1）＋（2）より

$$e^x e^y + e^{-x}e^{-y} = 2(\cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y)$$

$$\therefore \quad \cosh(x+y) = \frac{e^{x+y}+e^{-(x+y)}}{2} = \cosh x \cosh y + \sinh x \sinh y$$

（2）$2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2} = 2\frac{e^{\frac{x+y}{2}}-e^{-\frac{x+y}{2}}}{2}\cdot\frac{e^{\frac{x-y}{2}}+e^{-\frac{x-y}{2}}}{2} = \frac{1}{2}(e^x - e^{-y} + e^y - e^{-x})$

$$= \frac{1}{2}(e^x - e^{-y} + e^y - e^{-x}) = \frac{e^x-e^{-x}}{2} + \frac{e^y-e^{-y}}{2} = \sinh x + \sinh y$$

（別解）加法定理より

$$\sinh(x+y) = \sinh x \cosh y + \cosh x \sinh y$$
$$\sinh(x-y) = \sinh x \cosh y - \cosh x \sinh y$$

ここで，$x+y=X$，$x-y=Y$ とおくと$x=(X+Y)/2$，$y=(X-Y)/2$ より

$$\sinh X = \sinh\frac{X+Y}{2}\cosh\frac{X-Y}{2} + \cosh\frac{X+Y}{2}\sinh\frac{X-Y}{2} \qquad (1)$$
$$\sinh Y = \sinh\frac{X+Y}{2}\cosh\frac{X-Y}{2} - \cosh\frac{X+Y}{2}\sinh\frac{X-Y}{2} \qquad (2)$$

（1）＋（2）より

$$\sinh X + \sinh Y = 2\sinh\frac{X+Y}{2}\cosh\frac{X-Y}{2}$$

ここで，x，y をX，Yにおきかえれば

$$\sinh x + \sinh y = 2\sinh\frac{x+y}{2}\cosh\frac{x-y}{2}$$

【2】（1）$\sinh^2 x - \sinh^2 y = \frac{\cosh 2x - 1}{2} - \frac{\cosh 2y - 1}{2} = \frac{1}{2}(\cosh 2x - \cosh 2y)$

$$= \frac{1}{2}\cdot 2\sinh\frac{2x+2y}{2}\sinh\frac{2x-2y}{2} = \sinh(x+y)\sinh(x-y)$$

(2) $\sinh^3 x = \sinh^2 x \cdot \sinh x = \frac{\cosh 2x - 1}{2} \cdot \sinh x = \frac{\cosh 2x \sinh x - \sin}{2}$

$$= \frac{\frac{1}{2}(\sinh 3x + \sinh \quad) - \sinh x}{2} = \frac{\sinh 3x + \sinh x - 2\sinh}{4} = \frac{\sinh 3x - \sinh x}{4}$$

(3) $\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right)$より

$$\cosh^{-1}\sqrt{x^2+1} = \ln\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2 - 1}\right)$$

$$= \ln\left(\sqrt{x^2+1} + \sqrt{x^2+1-1}\right) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) = \sinh^{-1} x$$

【3】(1) $\frac{d}{dx}\tanh x = \left(\frac{\sinh x}{\cosh x}\right)' = \frac{\cosh x \cosh x - \sinh x \sinh x}{\cosh^2 x} = \frac{\cosh^2 x - \sin\ ^2 x}{\cosh^2 x} = \frac{1}{\cosh^2 x} = \mathrm{sech}^2 x$

(2) $\frac{d}{dx}\sinh^{-1} x = \left[\ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)\right]' = \frac{1 + \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{\left(\sqrt{x^2+1} + x\right)/\sqrt{x^2+1}}{x + \sqrt{x^2+1}} = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$

(3) $\frac{d}{dx}\tanh^{-1} x = \left(\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x}\right)' = \frac{1}{2}[\ln(1+x) - \ln(1-x)]' = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) = \frac{1}{1-x^2}$

【4】$e^{\pm x}$ はマクローリン展開すると

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$e^{-x} = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots$$

$$\therefore \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2(n-1)}}{n!}$$

【5】

$$\left.\begin{aligned} V(x) &= C_1 \cosh \gamma x - C_2 \sinh \gamma x \\ I(x) &= \frac{1}{Z_0}(-C_1 \sinh \gamma x + C_2 \cosh \gamma x) \end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

上式に $x=l$ のとき $V(l)=V_2$, $I(l)=I_2$ なる条件を代入すると

$$\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -\sinh \gamma l \\ -\frac{1}{Z_0}\sinh \gamma l & \frac{1}{Z_0}\cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} \qquad \therefore \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -\sinh \gamma l \\ -\frac{1}{Z_0}\sinh \gamma l & \frac{1}{Z_0}\cosh \gamma l \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

ここで

$$\begin{vmatrix} \cosh \gamma l & \sinh \gamma l \\ -\frac{1}{Z_0}\sinh \gamma l & \frac{1}{Z_0}\cosh \gamma l \end{vmatrix} = \frac{1}{Z_0}(\cosh^2 \gamma l - \sinh^2 \gamma l) = \frac{1}{Z_0} \text{ より}$$

$$\begin{bmatrix} \cosh \gamma l & -\sinh \gamma l \\ -\frac{1}{Z_0}\sinh \gamma l & \frac{1}{Z_0}\cosh \gamma l \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0}\cosh \gamma l & \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0}\sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix}$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = Z_0 \begin{bmatrix} \frac{1}{Z_0}\cosh \gamma l & \sinh \gamma l \\ \frac{1}{Z_0}\sinh \gamma l & \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh \gamma l & Z_0 \sinh \gamma l \\ \sinh \gamma l & Z_0 \cosh \gamma l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} V_2 \cosh \gamma l + Z_0 I_2 \sinh \gamma l \\ V_2 \sinh \gamma l + Z_0 I_2 \cosh \gamma l \end{bmatrix}$$

となり，式(11.37)，(11.38)が得られる。この係数C_1，C_2を式(1)に代入すると

$$V(x) = (V_2 \cosh\gamma l + Z_0 I_2 \sinh\gamma l)\cosh\gamma x - (V_2 \sinh\gamma l + Z_0 I_2 \cosh\gamma l)\sinh\gamma x$$

$$= V_2(\cosh\gamma l \cosh\gamma x - \sinh\gamma l \sinh\gamma x) + Z_0 I_2(\sinh\gamma l \cosh\gamma x - \cosh\gamma l \sinh\gamma x)$$

$$= V_2 \cosh(\gamma l - \gamma x) + Z_0 I_2 \sinh(\gamma l - \gamma x) = V_2 \cosh\gamma(l - x) + Z_0 I_2 \sinh\gamma(l - x)$$

$$I(x) = -\frac{1}{Z_0}(V_2 \cosh\gamma l + Z_0 I_2 \sinh\gamma l)\sinh\gamma x + \frac{1}{Z_0}(V_2 \sinh\gamma l + Z_0 I_2 \cosh\gamma l)\cosh\gamma x$$

$$= \frac{V_2}{Z_0}(\sinh\gamma l \cosh\gamma x - \cosh\gamma l \sinh\gamma x) + I_2(\cosh\gamma l \cosh\gamma x - \sinh\gamma l \sinh\gamma x)$$

$$= \frac{V_2}{Z_0}\sinh(\gamma l - \gamma x) + I_2 \cosh(\gamma l - \gamma x) = \frac{V_2}{Z_0}\sinh\gamma(l - x) + I_2 \cosh\gamma(l - x)$$

$$\therefore \quad \begin{bmatrix} V(x) \\ I(x) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cosh\gamma(l - x) & Z_0 \sinh\gamma(l - x) \\ \frac{1}{Z_0}\sinh\gamma(l - x) & \cosh\gamma(l - x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix}$$

となり，式(11.41)が得られる。