Excel で学ぶディジタル信号処理の基礎
章末問題略解（訂正版）

深山 幸穂, 深山 理, 深山 覚

第 1 章

(1)

方形パルス $x(t)$ のフーリエ変換は $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ で与えられ,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t} &= \int_{-\infty}^{-b} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-b}^{b} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t + \int_{b}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\ &= 0 + \int_{-b}^{b} x(t)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t + 0 \\ &= \left[\frac{\mathrm{j}}{\omega}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\right]_{-b}^{b} = \frac{\mathrm{j}}{\omega}\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega b} - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega b}\right) \\ &= \frac{2\sin b\omega}{\omega} = 2b\frac{\sin b\omega}{b\omega} = 2b\,\mathrm{sinc}\,b\omega\end{aligned}$$

となる．フーリエ変換対は 1:1 対応するので, この逆も真である．

また, $b \to \infty$ とした場合, 時間領域では $x(t) \equiv 1$ となる．一方, 周波数領域では $\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t$ となり, これはデルタ関数としての性質を満たすから, $1 \xleftrightarrow{\mathrm{FT}} 2\pi\delta(\omega)$ のフーリエ変換対が導かれる．

(2)

$$
\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-a|t|}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t &= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-at}e^{-j\omega t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{at}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t \\
&= \int_{0}^{\infty} \mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t + \int_{-\infty}^{0} \mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}\omega)t}\mathrm{d}t \\
&= \left[-\frac{1}{a+\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{-(a+\mathrm{j}\omega)t}\right]_{0}^{\infty} + \left[-\frac{1}{a-\mathrm{j}\omega}\mathrm{e}^{(a-\mathrm{j}\omega)t}\right]_{-\infty}^{0} \\
&= \frac{1}{a+\mathrm{j}\omega} + \frac{1}{a-\mathrm{j}\omega} = \frac{(a-\mathrm{j}\omega)+(a+\mathrm{j}\omega)}{(a+\mathrm{j}\omega)(a-\mathrm{j}\omega)} = \frac{2a}{\omega^2+a^2}
\end{aligned}
$$

フーリエ変換対は 1:1 対応するので, この逆も真である.

(3)

1)

$$
\int_{0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{at}e^{-st}\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-(s-a)t}\mathrm{d}t = X(s-a)
$$

2)

$$
\begin{aligned}
-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}X(s) &= -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\int_{0}^{\infty} x(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t \\
&= -\int_{0}^{\infty} x(t)\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\mathrm{e}^{-st}\right)\mathrm{d}t = \int_{0}^{\infty} tx(t)\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t
\end{aligned}
$$

(4)

$t^{\frac{1}{2}} = t \cdot t^{-\frac{1}{2}}$ と変形した上で前問の 2) を利用すると

$$
\mathrm{LT}\left\{t^{\frac{1}{2}}\right\} = \mathrm{LT}\left\{t \cdot t^{-\frac{1}{2}}\right\} = -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\sqrt{\pi}\,s^{-\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}s^{-\frac{3}{2}}
$$

ラプラス変換対は 1:1 対応するので, これらの逆も真である.

(5)

$x(t)$ は偶関数であるから $b(n) = 0$ $(n = 1, 2, \ldots)$ である. $a(n)$ $(n = 2, 3, \ldots)$ について以下に求める:

$$
\begin{aligned}
a(n) &= 2f_0 \int_{-\frac{1}{2f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} |\cos(2\pi f_0 t)| \cos(2\pi f_0 n t) \mathrm{d}t \\
&= 4f_0 \int_0^{\frac{1}{2f_0}} |\cos(2\pi f_0 t)| \cos(2\pi f_0 n t) \mathrm{d}t \\
&= 4f_0 \left\{ \int_0^{\frac{1}{4f_0}} \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 n t) \mathrm{d}t \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} \cos(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 n t) \mathrm{d}t \right\} \\
&= 2f_0 \left\{ \int_0^{\frac{1}{4f_0}} \left(\cos 2\pi f_0 (n+1) t + \cos 2\pi f_0 (n-1) t \right) \mathrm{d}t \right. \\
&\qquad \left. - \int_{\frac{1}{4f_0}}^{\frac{1}{2f_0}} \left(\cos 2\pi f_0 (n+1) t + \cos 2\pi f_0 (n-1) t \right) \mathrm{d}t \right\} \\
&= \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{n+1} \sin(n+1)\frac{\pi}{2} + \frac{1}{n-1} \sin(n-1)\frac{\pi}{2} \right\} \\
&= \begin{cases} 0 & (n : \text{奇数}) \\ \frac{-4(-1)^{n/2}}{\pi(n^2-1)} & (n : \text{偶数}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

$a(n)$ $(n = 0, 1)$ の場合, 同様に計算すれば上式の最後の項の記述で $n = 0, 1$ とした場合に一致する.

第 2 章

(1)

$$
\begin{aligned}
\mathrm{LT}\left\{h(t)\right\} &= \int_0^\infty \frac{K}{T}\mathrm{e}^{-\frac{t}{T}}\mathrm{e}^{-st}\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{K}{T}\mathrm{e}^{-(s+\frac{1}{T})t}\mathrm{d}t \\
&= \frac{K}{T}\left[-\frac{1}{s+\frac{1}{T}}\mathrm{e}^{-(s+\frac{1}{T})t}\right]_0^\infty = \frac{K}{T}\cdot\frac{1}{s+\frac{1}{T}} = \frac{K}{1+Ts}
\end{aligned}
$$

ラプラス変換対は 1:1 対応するので, 逆もまた真である.

(2)

a)

$$
\begin{aligned}
H(s) &= \frac{1}{s^2+s+1} \\
&= \frac{1}{\left(s-\frac{1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}\right)\left(s-\frac{1-\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}\right)} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{j}}\cdot\left\{\frac{1}{s-\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}}-\frac{1}{s-\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}}\right\}
\end{aligned}
$$

と変形でき, これに逆ラプラス変換 ($\mathrm{LT}^{-1}\left\{\cdot\right\}$) を施すと

$$
\begin{aligned}
h(t) &= \mathrm{LT}^{-1}\left\{H(s)\right\} \\
&= \frac{1}{\sqrt{3}\,\mathrm{j}}\left(\mathrm{e}^{\frac{-1+\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}t}-\mathrm{e}^{\frac{-1-\sqrt{3}\,\mathrm{j}}{2}t}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\left(\frac{\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}t}-\mathrm{e}^{\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{j}t}}{2\mathrm{j}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}t}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}t.
\end{aligned}
$$

b)

$$
H(s) = \frac{1}{s^2+2s+1} = \frac{1}{(s+1)^2}
$$

と変形でき, これに逆ラプラス変換を施すと

$$h(t) = \mathrm{LT}^{-1}\{H(s)\} = t\mathrm{e}^{-t}.$$

c)

$$H(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+2)(s+1)} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+2}$$

と変形でき, これに逆ラプラス変換を施すと

$$h(t) = \mathrm{LT}^{-1}\{H(s)\} = e^{-t} - e^{-2t}.$$

(3)

R から C に流れる瞬時電流を $i(t)$ とおくと, $x(t), y(t), i(t)$ の関係は

$$x(t) = Ri(t) + y(t)$$
$$y(t) = \frac{1}{C}\int i\mathrm{d}t$$

と表される.

各式の両辺をラプラス変換し, $\mathrm{LT}\{x(t)\} = X(s)$, $\mathrm{LT}\{y(t)\} = Y(s)$, $\mathrm{LT}\{i(t)\} = I(s)$ とすると,

$$X(s) = RI(s) + Y(s)$$
$$Y(s) = \frac{1}{sC}I(s)$$

が得られ, $X(s) = (sRC+1)Y(s)$ の関係が導かれる. 従って,

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{1}{sRC+1}$$

であり, 十分に時間が経過した後の定常応答を検討するため s を $\mathrm{j}\omega$ に置き換えると, 角周波数 ω および遮

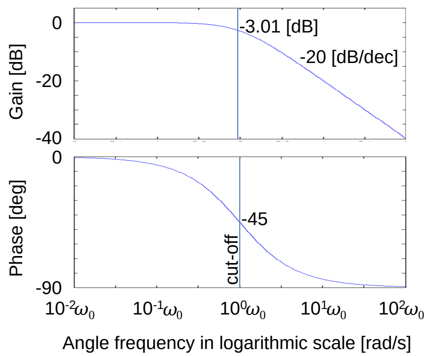

図 1　ボード線図の概形

断周波数 ω_0 に対して

$$\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)} = \frac{1}{\mathrm{j}\omega RC + 1} = \frac{1}{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0} + 1} = \frac{1 - \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

と記述できる．ボード線図は, 同式の対数絶対値 (dB)

$$20\log\left|\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)}\right| = \sqrt{\frac{1 - \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \cdot \frac{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

と偏角 (deg)

$$\angle\frac{Y(\mathrm{j}\omega)}{X(\mathrm{j}\omega)} = \arctan\frac{-\frac{\omega}{\omega_0}}{1} = \arctan\left(-\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

を $0 < \omega < \omega_0$, $\omega = \omega_0$, $\omega_0 < \omega$ の各区間について概型を求めれば描くことができる (図 1).

(4)

1) $f_0 = 796[\mathrm{kHz}]$.
2) $Q = 100$ より, $f_2 - f_1 = 7.96[\mathrm{kHz}]$.
3) グラフの概形を図 2 に示す.

(5)

$$y(t) = a\left[x(t)\cos\omega_{\mathrm{c}}t - \tilde{x}(t)\sin\omega_{\mathrm{c}}t\right]$$

第 3 章

(1)

1)

$$X(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k)z^{-k}$$

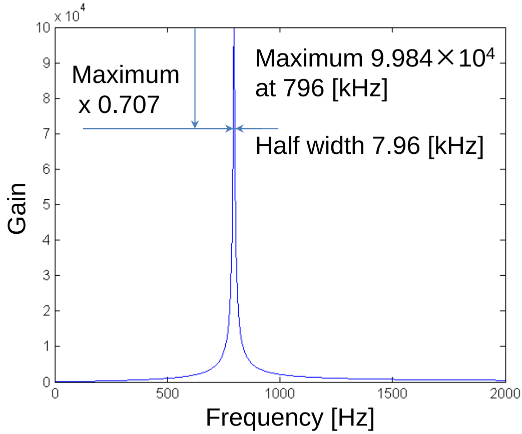

図 2　ゲイン特性 $|H(\mathrm{j}2\pi f)|$ の概形

2)

- $X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})$ は $\{x(k)\}$ の離散時間フーリエ変換,
- $\theta = 2\pi\frac{f}{f_\mathrm{s}}$ は正規化角周波数,

ただし f_s はサンプリング周波数.

(2)

1)　サンプリング周波数が十分に高くないため, 原波形を正しく復元できない現象.

2)　（信号の周波数帯域）$< f$ として,

$$2f < \frac{1}{\varDelta t} \Longleftrightarrow f < \frac{1}{2\,\varDelta t}$$

(3)

畳み込み　$x(t) * y(t) = \mathrm{LT}^{-1}\left\{X(s)Y(s)\right\}, \qquad \xi(k) * \eta(k) = \mathrm{Z}^{-1}\left\{\varXi(z)H(z)\right\}.$

スペクトラム　$|X(s)|\Big|_{s=\mathrm{j}\omega}, \quad |\varXi(z)|\Big|_{z=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}},$　ただし θ は正規化角周波数.

(4)

周波数領域のベクトル $\boldsymbol{F}$ を構成する任意の要素 $F(n)$ $(n=0,\dots,N-1)$ は時間領域のベクトル $\boldsymbol{f}$ の要素 $f(k)$ $(k=0,\dots,N-1)$ を用いて,

$$\begin{aligned} F(n) &= \sum_{k=0}^{N-1} f(k) w_N^{-kn} \\ &= \left(f(0) + f(1) w_N^{-n} + f(2) w_N^{-2n} + \cdots + f(N-1) w_N^{-(N-1)n} \right) \end{aligned}$$

と書き表すことができる. これを行列表現すると

$$\begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^{-1} & w_N^{-2} & \cdots & w_N^{-(N-1)} \\ 1 & w_N^{-2} & w_N^{-4} & \cdots & w_N^{-2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & w_N^{-(N-1)} & w_N^{-2(N-1)} & \cdots & w_N^{-(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

と記述され, 行列部分が W の要素を表す.

同様に,

$$\begin{aligned} f(n) &= \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(k) w_N^{kn} \\ &= \frac{1}{N} \left\{ F(0) + F(1) w_N^{n} + F(2) w_N^{2n} + \cdots + F(N-1) w_N^{(N-1)n} \right\} \end{aligned}$$

と書き表すことができ, これを行列表現すると

$$\begin{pmatrix} f(0) \\ f(1) \\ \vdots \\ f(N-1) \end{pmatrix}$$

$$
= \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & w_N^1 & w_N^2 & \cdots & w_N^{N-1} \\ 1 & w_N^2 & w_N^4 & \cdots & w_N^{2(N-1)} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & w_N^{N-1} & w_N^{2(N-1)} & \cdots & w_N^{(N-1)(N-1)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F(0) \\ F(1) \\ \vdots \\ F(N-1) \end{pmatrix}
$$

と記述され, 行列部分が W^{-1} の要素を表す.

第 4 章

(1)

階差フィルタ

$$
y(k) = \frac{1}{2} \left[x(k) - x(k-1) \right]
$$

について, $x(k)$, $y(k)$ の Z 変換をそれぞれ $X(z)$, $Y(z)$ とすると

$$
Y(z) = \frac{1}{2} \left(X(z) - z^{-1} X(z) \right) = \frac{1}{2} \left(1 - z^{-1} \right) X(z)
$$

の関係が得られることから, 同フィルタの伝達関数は

$$
H(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{1}{2} \left(1 - z^{-1} \right)
$$

であり, ゲイン特性は正規化角周波数 θ に対して

$$
\begin{aligned}
\left| H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta}) \right|^2 &= \frac{1}{2} \left(1 - \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\theta} \right) \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta} \right) \\
&= \frac{1}{4} \left(2 - 2\cos\theta \right) = \frac{1}{2} \left(1 - \cos\theta \right)
\end{aligned}
$$

である. 正規化角周波数は $\theta = 2\pi \mathit{\Delta} t f$ と与えられるから, f $(0 \le f \le 1[\mathrm{kHz}])$ の範囲で $(1 - \cos 2\pi \mathit{\Delta} t f)/2$ を図示すれば良い.

(2)

遮断周波数 f_{c} の FIR 高域通過フィルタは, まず遮断周波数 $f'_{\mathrm{c}} = f_{\mathrm{s}}/2 - f_{\mathrm{c}}$ (正規化周波数 $\theta'_{\mathrm{c}} = 2\pi f'_{\mathrm{c}}/f_{\mathrm{s}}$) の低域通過フィルタを設計し, これを $f_{\mathrm{s}}/2$ (正規化周波

数 $\theta_0 = 2\pi(f_\mathrm{s}/2)/f_\mathrm{s} = \pi)$ だけ周波数シフトすれば良い．このときフィルタ係数は

$$
\begin{aligned}
b(m) &= \frac{\theta_\mathrm{c}'}{\pi}\mathrm{sinc}(m\theta_\mathrm{c}') \cdot \cos m\theta_0 \\
&= (-1)^m \frac{2\pi(f_\mathrm{s}/2 - f_\mathrm{c})}{\pi f_\mathrm{s}}\mathrm{sinc}\left\{m\frac{2\pi(f_\mathrm{s}/2 - f_\mathrm{c})}{f_\mathrm{s}}\right\} \\
&= (-1)^m \left(1 - \frac{2f_\mathrm{c}}{f_\mathrm{s}}\right)\mathrm{sinc}\left\{m\pi\left(1 - \frac{2f_\mathrm{c}}{f_\mathrm{s}}\right)\right\}
\end{aligned}
$$

で与えられる．いま $f_\mathrm{s} = 1200[\mathrm{Hz}]$, $f_\mathrm{c} = 300[\mathrm{Hz}]$ であるから

$$
b(m) = (-1)^m \frac{1}{2}\mathrm{sinc}\frac{m\pi}{2}
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
m = \pm 1, \ldots, 7 \text{ のとき} \qquad & b(m) = (-1)^m \frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{2} \\
m = 0 \text{ のとき} \qquad & b(m) = \frac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

(3)

遮断周波数 f_c (正規化周波数 $\theta_\mathrm{c} = 2\pi f_\mathrm{c}/f_\mathrm{s}$) の FIR 低域通過フィルタは,

$$
\begin{aligned}
b(m) &= \frac{\theta_\mathrm{c}}{\pi}\mathrm{sinc}\, m\theta_\mathrm{c} \\
&= \frac{2f_\mathrm{c}}{f_\mathrm{s}}\mathrm{sinc}\left(m\pi\frac{2f_\mathrm{c}}{f_\mathrm{s}}\right)
\end{aligned}
$$

で与えられる．いま $f_\mathrm{s} = 1200[\mathrm{Hz}]$, $f_\mathrm{c} = 200[\mathrm{Hz}]$ であるから

$$
b(m) = \frac{1}{3}\mathrm{sinc}\frac{m\pi}{3}
$$

である．したがって

$$
\begin{aligned}
m = \pm 1, \ldots, 7 \text{ のとき} \qquad & b(m) = \frac{1}{m\pi}\sin\frac{m\pi}{3} \\
m = 0 \text{ のとき} \qquad & b(m) = \frac{1}{3}.
\end{aligned}
$$

(4)

$H(s)=\frac{s}{1+s}$ に対して双一次変換を施すとフィルタの伝達関数

$$
\begin{aligned}
H(s)\Big|_{s\leftarrow\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})}} &= \frac{\left(\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})}\right)}{1+\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})}} \\
&= \frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})+2(1-z^{-1})} \\
&= \frac{2(1-z^{-1})}{(2+\Delta t)-(2-\Delta t)z^{-1}}
\end{aligned}
$$

が得られる．よって $x(t)$, $y(t)$ の関係を

$$
(2+\Delta t)y(k)-(2-\Delta t)y(k-1)=2\left\{x(k)-x(k-1)\right\}
$$

と記述でき, $\Delta t=1/f_0=1\times10^{-3}$ を与えると

$$
y(k)=0.9990y(k-1)+0.9995\left\{x(k)-x(k-1)\right\}.
$$

2.1.6 例, 2.2.3 例より, この伝達関数は $T=1$ の不完全微分であるから, 遮断周波数 $f_{\mathrm{s}}=\frac{1}{2\pi T}=0.1592[\mathrm{Hz}]$ である.

(5)

$H(s)=\frac{1}{1+Ts}$ に対して双一次変換を施すとフィルタの伝達関数

$$
\begin{aligned}
H(z) &= \frac{1}{1+T\frac{2(1-z^{-1})}{\Delta t(1+z^{-1})}} \\
&= \frac{\Delta t(1+z^{-1})}{2T+\Delta t-(2T-\Delta t)z^{-1}}
\end{aligned}
$$

が得られる．よって入力 $x(k)$ に対する出力を

$$
y(k)=\frac{2T-\Delta t}{2T+\Delta t}y(k-1)+\frac{\Delta t}{2T+\Delta t}\left\{x(k)+x(k-1)\right\}
$$

と記述でき, $T=1/(2\pi f_{\mathrm{c}})$, $\Delta t=1/f_{\mathrm{s}}$ を代入すると

$$
y(k)=\frac{f_{\mathrm{s}}-\pi f_{\mathrm{c}}}{f_{\mathrm{s}}+\pi f_{\mathrm{c}}}y(k-1)+\frac{\pi f_{\mathrm{c}}}{f_{\mathrm{s}}+\pi f_{\mathrm{c}}}\left\{x(k)+x(k-1)\right\}
$$

の関係が得られる．ここで，$f_\mathrm{s} = 44.1[\mathrm{kHz}]$，$f_\mathrm{c} = 3[\mathrm{kHz}]$ を与えると

$$y(k) \approx 0.6478 y(k-1) + 0.1761 \{x(k) + x(k-1)\}$$

となる．

第 5 章

(1)

$$\begin{aligned}
\mu_R &= \int_{-\infty}^{\infty} x f_R(x) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x-k) \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k \\
&= \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \mathrm{e}^{\lambda} = \lambda \\
\sigma_R^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} x^2 f_R(x) \mathrm{d}x - {\mu_R}^2 = \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k^2 - {\mu_R}^2 \\
&= \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} k - {\mu_R}^2 = \lambda \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} (k+1) - {\mu_R}^2 \\
&= \lambda \left[\mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} k + \mathrm{e}^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} \right] - {\mu_R}^2 = \lambda(\lambda+1) - \lambda^2 = \lambda
\end{aligned}$$

(2)

1)

$$\eta_X(k) = \mathrm{E}\left\{A \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta}\right\} = \mathrm{E}\{A\} \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta} = \alpha e^{\mathrm{j}k\theta}$$

2)

$$r_{XX}(k,l) = \mathrm{E}\left\{A \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta} A^* \mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\theta}\right\} = \mathrm{E}\{AA^*\} \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-l)\theta} = a^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-l)\theta}$$

3)

$$\begin{aligned}
c_{XX}(k,l) &= r_{XX}(k,l) - \eta_X(k) \eta_X^*(l) \\
&= a^2 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-l)\theta} - \alpha \mathrm{e}^{\mathrm{j}k\theta} \alpha^* e^{-\mathrm{j}k\theta} = \left(a^2 - |\alpha|^2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{j}(k-l)\theta}
\end{aligned}$$

4) $\eta_X(k)$ が定数でないため, 広義定常性ではない.

(3)

1)

$$\sigma_X^2 = r_{XX}(0) = \mathrm{DTFT}^{-1}\left[S_{XX}(\theta)\right]|_{m=0} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} S_{XX}(\theta)\mathrm{d}\theta$$

2)

$$r_{XX}(m) \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}:\Delta t} S_{XX}(\theta) = S_{XX}^*(-\theta)$$

かつ

$$r_{XX}(m) = r_{XX}(-m) \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}:\Delta t} S_{XX}(\theta) \in \mathbb{R}$$

より.

3)

$$S_{XX}(\theta) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{2N+1}\mathrm{E}\left\{\left|\sum_{k=-N}^{N} X(k)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}k\theta}\right|^2\right\} > 0$$

4)

$$r_{XY}(m) \in \mathbb{R} \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}:\Delta t} S_{XY}(\theta) = S_{XY}^*(-\theta)$$

かつ

$$r_{XY}(m) = r_{YX}(-m) \xleftrightarrow{\mathrm{DTFT}:\Delta t} S_{XY}(\theta) = S_{XY}^*(\theta) = S_{YX}(-\theta)$$

より.

(4)

求めるフィルタは

$$\hat{\boldsymbol{S}}(k) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Y}(k) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left[\boldsymbol{S}(k) + \boldsymbol{N}(k)\right],$$

ただし $\boldsymbol{c} = (c_0\ c_1)^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{Y}(k) = (Y(k)\ Y(k-1))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{S}(k) = (S(k)\ S(k-1))^{\mathrm{T}}$, $\boldsymbol{N}(k) = (N(k)\ N(k-1))^{\mathrm{T}}$ と記述できるから, 推定誤差の期待値 J は以下となる.

$$
\begin{aligned}
J &= \mathrm{E}\left\{\left[\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{S}(k)+\boldsymbol{N}(k)\right)-S(k)\right]\left[\boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left(\boldsymbol{S}(k)+\boldsymbol{N}(k)\right)-S(k)\right]^{\mathrm{T}}\right\} \\
&= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\mathrm{E}\left\{\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{S}(k)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{N}(k)\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(k)+\boldsymbol{N}(k)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(k)\right\}\boldsymbol{c} \\
&\quad -2\mathrm{E}\left\{S(k)\boldsymbol{S}^{\mathrm{T}}(k)+S(k)\boldsymbol{N}^{\mathrm{T}}(k)\right\}\boldsymbol{c}+\mathrm{E}\left\{S^2(k)\right\} \\
&= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\left[\begin{pmatrix} r_{SS}(0) & r_{SS}(1) \\ r_{SS}(1) & r_{SS}(0) \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} r_{NN}(0) & r_{NN}(1) \\ r_{NN}(1) & r_{NN}(0) \end{pmatrix}\right]\boldsymbol{c} \\
&\quad -2\begin{pmatrix} r_{SS}(0) \\ r_{SS}(1) \end{pmatrix}\boldsymbol{c}+r_{SS}(0) \\
&= \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\begin{pmatrix} 1.0+0.5 & 0.2-0.05 \\ 0.2-0.05 & 1.0+0.5 \end{pmatrix}\boldsymbol{c}-2\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.2 \end{pmatrix}\boldsymbol{c}+1.0
\end{aligned}
$$

このとき J の勾配は, つぎのとおり求められる.

$$
\frac{1}{2}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{c}} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.15 \\ 0.15 & 1.5 \end{pmatrix}\boldsymbol{c}-\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.2 \end{pmatrix}
$$

さらに, J のヘッシアンは次式である.

$$
\frac{\partial^2 J}{\partial \boldsymbol{c}\,\partial \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}} = 2\begin{pmatrix} 1.5 & 0.15 \\ 0.15 & 1.5 \end{pmatrix} > 0
$$

よって J 最小となす $\boldsymbol{c}$ を求める.

$$
\boldsymbol{c} = \begin{pmatrix} 1.5 & 0.15 \\ 0.15 & 1.5 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2.2275}\begin{pmatrix} 1.5 & -0.15 \\ -0.15 & 1.5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1.0 \\ 0.2 \end{pmatrix}
$$

すなわち, 求めるフィルタの係数 $c_0 = 0.66$ および $c_1 = 0.067$.