

## 信号とシステム II

## 第 6 章 アナログ信号のデジタル化

電話の音声だけでなく、音楽や映像などあらゆる情報がデジタル化されています。デジタル信号は 0 と 1 を基本とするので扱いやすく安定で、雑音に強く、保存が容易などアナログ信号に比べ多くの利点があります。情報処理や通信機器、制御装置などで使われている電気・電子回路はアナログ回路が基本ですが、これをデジタル化することで誰でも容易に設計・製造することが可能になりました。デジタル化のための信号処理技術は米国生まれがほとんどですが、この技術を強力に推し進めた理由は、米国が日本の製造業を打ち負かすための戦略なのだと言う人もいます（手先の不器用な人が物づくりで優位に立つためには微妙な調整の不要なデジタル方式は最適です）。

デジタル万能の世の中のように、「驕れる人も久しからず、只春の夜の夢の如し」という平家物語の一節が思い浮かびます。現に、LSI の設計では製造プロセスの微細化に伴い、より一層アナログ技術のセンスが必要になっています。我が国の製造技術が再び世界をリードするためにはアナログ技術の見直しが必要に思われます。ただし、デジタル信号処理技術を十分マスターした上で、という条件付です。

## §6.1 標本化

☆シャノン・染谷の標本化定理は常識として知っておくべき基本中の基本定理です。

**Check-1** 標本化定理を理解し、説明できるようになっているか。

**Check-2** 専門用語(エリアス, アンチエリアスフィルタ, PAM 信号, ナイキスト周波数, アパーチャ効果, アパーチャ補正など)の意味を理解しているか。

**Check-3** 離散化した時間信号, 式(6.2)の周波数スペクトルが式(6.3)で表わせることを導くことができるか。

この結果から、離散化した信号の周波数スペクトルは標本化周波数 $f_s = 1/T_s$ を基本周期とする周期関数であることがわかります。→連続信号と離散信号の周波数スペクトル上の重要な相違点。

## §6.2 量子化

**Check-1** 量子化の概念を理解し、説明できるようになっているか。

**Check-2** 量子化ビット, 量子化幅, ダイナミックレンジの意味とそれらの関係を理解しているか。

**Check-3** 量子化雑音の意味を理解しているか。また、Check-2 の変数を用いて量子化雑音電力を表わすことができるか。→雑音の定量化には確率・統計の知識が必要です。

**Check-4** 信号対量子化雑音電力比 $SNR_Q$ を求める手順を理解しているか。また、デシベル表示を使いこなせるか。

## §6.3 数値の符号化

**Check-1** 10 進数(正負の整数及び実数)のバイナリ表現として、極性・絶対値表示, 1 の補数表示, 2 の補数表示を理解しているか。

**Check-2** それぞれの表示形式で、加減乗除演算を実行できるか。

以上の§6.1 から§6.3 までの処理により、アナログ信号がデジタル信号に変換されたこととなります。

## 第7章 離散フーリエ変換

離散フーリエ変換(DFT: Discrete Fourier Transform)は、離散時間信号と離散周波数スペクトルを結びつけるアルゴリズム(算法)です。離散的に表される時間信号(例えば、日々変動する株価)の周波数スペクトルを知りたいときなどにDFTが用いられます。時間データの数 $N$ が多くなるとコンピュータの力を借りざるを得ませんが、DFTの定義式を表層的に眺めると、 $N$ 個の周波数スペクトルを得るためには $N^2$ 回の複素乗算が必要になります。従って、 $N$ が大きくなるとコンピュータをもってしても計算時間を無視できません。このような状況下において、1965年、CooleyとTukeyの2人の数学者はDFTの定義式を深く洞察し、高速に計算するアルゴリズム、高速フーリエ変換(FFT: Fast Fourier Transform)を開発しました。ちなみに、FFTの乗算回数は $(N/2)\log_2 N$ であり、 $N$ が大きい場合、演算量を大幅に低減することができます。この結果、FFTはコンピュータを用いた信号解析に欠かすことのできない手段として、幅広い分野で利用されています。

DFTは第4章で学んだフーリエ変換と似ていますが、大きく異なる点があります。明確な相違は、取り扱う時間信号が標本化された離散関数で表わされることです。また、コンピュータ処理が基本であるため、信号を有限個のデータにより表わさざるを得ないことです(近似せざるを得ない)。これらの相違が周波数スペクトルにどう反映されるか、こういった本質を理解することが、計算手法を覚えるより重要なことです。

DFTはフーリエ変換の近似とみなされることもありますが、本当にそうでしょうか。信号のスペクトルを求めるとき、フーリエ変換は $-\infty \sim +\infty$ までの観測データを必要とします。しかし、現実にはそんなことはできません。我々は有限の世界に生きています。ではDFTが真のスペクトルを表わしているのでしょうか。

現は夢か、夢は現か。難しい問題ですね。

### §7.1 離散信号のフーリエ変換

**Check-1** 標本間隔 $T_s$ で離散化された信号の周波数スペクトルは、基本周期 $1/T_s$ の周期信号であることを理解しているか。周期性を導くことができれば理解したと言えるでしょう。

**Check-2** 離散時間フーリエ変換(DTFT)と離散フーリエ変換(DFT)の相違を理解しているか。フーリエ変換の形態を分類した表7.1を理解することが重要です。

### §7.2 離散フーリエ変換の性質

**Check-1** DFTの各種性質を理解し、導出できるか。

各種の性質を表7.2にまとめています。フーリエ変換の場合(表4.3)と比べてください。基本的に同じ性質ですが、DFTでは信号やスペクトルの周期性に起因して、時間シフトや周波数シフトおよび畳み込みの演算が巡回型になっている点に注意が必要です。

### §7.3 信号のスペクトル解析

この節に示す考え方をよく理解すること。エンジニアが身に付けるべき知識です。

**Check-1** 標本間隔(時間分解能 $T_s$ )とスペクトルの周波数分解能 $\Delta f$ とサンプル数 $N$ の関係を理解しているか。

**Check-2** 有限のサンプル数が周波数スペクトルに与える影響を説明できるか。

**Check-3** スペクトル解析の精度を向上させるための窓関数の意義を理解しているか。

### §7.4 高速フーリエ変換

アルゴリズムそのものではなく、基本的考え方を書いています。定義式を深く掘り下げて考えているからこそ生まれたアルゴリズムだという気がします。味わい深いですね。

## 第8章 z 変換

z 変換はラプラス変換の離散時間バージョンであり、線形・時不変な離散時間システムの解析を容易にする道具です。ラプラス変換が時間領域での微分方程式を周波数領域での代数方程式に変換したように、z 変換も差分方程式を z 領域における簡易な代数方程式に変換することができ、従って離散時間システムの解析を簡易化できます。また、フーリエ変換とラプラス変換の関係と同様、z 変換は離散時間フーリエ変換(DTFT)を持たない信号も扱うことができます。

この講義では因果的なシステムを解析する目的で片側 z 変換しか扱いませんが、現実にはメモリを搭載した非因果的なシステムも存在し、そのときは片側 z 変換を拡張した両側 z 変換が必要になります。両側 z 変換は負の時間を扱うことができるように定義式を拡張しただけですが、片側 z 変換よりも取り扱いが面倒です。逆 z 変換の際に、片側 z 変換では信号の収束領域(ROC)を考えなくても答は 1 つに決まりますが、両側 z 変換では ROC を与えないと逆 z 変換は 1 つに決定できないという不確定性を有します。

### §8.1, 8.2 z 変換の定義と基本的な信号の z 変換

**Check-1** 定義式を書くことができ、それに基づいて表 8.1 に示す代表的な信号の z 変換を導くことができるか。

### §8.3 z 変換の性質

**Check-1** 表 8.2 に示す各種の性質を理解し、それぞれの関係を定義式から導くことができるか。

(これらの性質を知っていると、現実のシステムを解析したり設計したりする際に役に立ちます。)

### §8.4 逆 z 変換

**Check-1** ベキ級数展開, 部分分数展開を実行できるか。

**Check-2** 表 8.1 の z 変換対から逆変換を求めることができるか。(複素積分を用いた難しい逆変換式に頼らずに実行可能な便利さがあると同時に、部分分数展開された基本有理式はシステムを構成するサブシステムを表わしており、それらによってシステム全体の安定性を判定できる特徴があります。)

### §8.5 システムの伝達関数と応答

離散的な線形・時不変システムで、かつ因果的なシステムを扱います。システムの応答は、入力信号とシステムのインパルス応答との線形畳み込み和(DFT は巡回畳み込み)で与えられます。これは教科書の第 2 章で扱っており、十分理解していることを前提にしています。忘れた人は復習してください。2 度目の勉強は理解度が格段に増すと思います。

**Check-1** ブロック図として示されたシステムの時間応答を差分方程式の形で表現できるか。

**Check-2** 差分方程式を z 領域の代数方程式に変換できるか。

**Check-3** 代数方程式からシステムの伝達関数を導き、システムの安定性を評価できるか。

**Check-4** z 領域で得た応答から、逆 z 変換により時間領域の応答に戻せるか。

### §8.6, 8.7 他の変換との関係, z 変換の応用

フィルタの基本構造である移動平均型(FIR, MA), 自己回帰型(IIR, AR)など, 専門用語の意味を理解し, 更にデジタルフィルタの設計手法であるインパルス不変変換や双一次変換などの技術を理解できればすばらしい。