【16】==

$\mathrm{N} = \left(0.\dot{2}1\dot{1}\right)_3$ とすると，次式が成り立つから，

$$\mathrm{N} = \sum_{i=1}^{\infty} (2 \cdot 3^2 + 1 \cdot 3 + 1) \cdot 3^{-3 \cdot i} = \lim_{n \to \infty} \left[\sum_{i=1}^{n} 22 \cdot 3^{-3 \cdot i} \right]$$

右辺の級数を S とおいて計算すると，

$$\mathrm{S} = \sum_{i=1}^{n} 3^{-3 \cdot i} = \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3 \cdot n}}$$

$$3^3 \cdot \mathrm{S} = 1 + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{3^6} + \cdots + \frac{1}{3^{3 \cdot (n-1)}} = \sum_{i=0}^{n-1} 3^{-3 \cdot i}$$

より，

$$(1 - 3^3) \cdot \mathrm{S} = \frac{1}{3^{3 \cdot n}} - 1 \ , \qquad \mathrm{S} = \frac{1}{26} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{3 \cdot n}}\right)$$

を得る．従って，

$$\mathrm{N} = \lim_{n \to \infty} \left[22 \cdot \sum_{i=1}^{n} 3^{-3 \cdot i} \right] = \lim_{n \to \infty} \left[22 \cdot \frac{1}{26} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{3 \cdot n}}\right) \right] = \lim_{n \to \infty} \left[11 \cdot \frac{1}{13} \cdot \left(1 - \frac{1}{3^{3 \cdot n}}\right) \right] = 11 \cdot \frac{1}{13}$$

であるから，13 進数で表すと，

$$\mathrm{N} = (0.\mathrm{B})_{13}$$

と書ける．