【4】==

今，$x=\overline{a\wedge b}$，$y=\bar{a}\vee\bar{b}$ とおくと，$\bar{x}\vee y$ は，二重否定，結合律，交換律，および分配律を用いれば，

$$\bar{x}\vee y=\left(\overline{\overline{a\wedge b}}\right)\vee\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)=(a\wedge b)\vee\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)=\{(a\wedge b)\vee\bar{a}\}\vee\bar{b}=\{\bar{a}\vee(a\wedge b)\}\vee\bar{b}=\{(\bar{a}\vee a)\wedge(\bar{a}\vee b)\}\vee\bar{b}$$

となる．さらに，交換率，相補律，交換率，および単位元 1 の性質を用いれば，

$$\bar{x}\vee y=\{(\bar{a}\vee a)\wedge(\bar{a}\vee b)\}\vee\bar{b}=\{(a\vee\bar{a})\wedge(\bar{a}\vee b)\}\vee\bar{b}=\{1\wedge(\bar{a}\vee b)\}\vee\bar{b}=\{(\bar{a}\vee b)\wedge 1\}\vee\bar{b}=(\bar{a}\vee b)\vee\bar{b}$$

を得る．従って，これに，結合律，相補律，および零元の性質を用いれば，

$$\bar{x}\vee y=(\bar{a}\vee b)\vee\bar{b}=\bar{a}\vee\left(b\vee\bar{b}\right)=\bar{a}\vee 1=1$$

を得る．

一方，$\bar{x}\wedge y$ は，二重否定，結合律，および分配律を用いれば，

$$\bar{x}\wedge y=\left(\overline{\overline{a\wedge b}}\right)\wedge\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)=(a\wedge b)\wedge\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)=a\wedge\left\{b\wedge\left(\bar{a}\vee\bar{b}\right)\right\}=a\wedge\left\{(b\wedge\bar{a})\vee\left(b\wedge\bar{b}\right)\right\}$$

となる．そこで，相補律，単位元 0 の性質，交換率および結合律を用いると，

$$\bar{x}\wedge y=a\wedge\left\{(b\wedge\bar{a})\vee\left(b\wedge\bar{b}\right)\right\}=a\wedge\{(b\wedge\bar{a})\vee 0\}=a\wedge(b\wedge\bar{a})=a\wedge(\bar{a}\wedge b)=(a\wedge\bar{a})\wedge b$$

を得る．従って，相補律，交換率，零元の性質の性質を用いれば，

$$\bar{x}\wedge y=(a\wedge\bar{a})\wedge b=0\wedge b=b\wedge 0=0$$

を得る．

以上より，$x=\overline{a\wedge b}$，$y=\bar{a}\vee\bar{b}$ のとき，$\bar{x}\vee y=1$ および $\bar{x}\wedge y=0$ が成り立つことが分かる．従って，本に示した補題より，$x=y$ であるから，$\overline{a\wedge b}=\bar{a}\vee\bar{b}$ を得る．