『書き込み式 はじめての構造力学』

穴埋め例題の記入例および章末問題の詳細解答

コロナ社

1. 力のつり合い

穴埋め例題

（p.4）穴埋め例題 **1.1**

$c^2 = 20^2 + 10^2 + 2 \cdot 20 \cdot 10 \cos 45^\circ \approx 782.84$

よって，$c \approx$ 27.98〔kN〕

$$\varphi = \tan^{-1}\frac{a\sin\theta}{b+a\cos\theta} = \tan^{-1}\frac{20\sin 45^\circ}{10+20\cos 45^\circ} \approx 30.4^\circ$$

（p.6）穴埋め例題 **1.2**

$P_x = P\cos 30^\circ = 50$〔kN〕$\times\sqrt{3}/2 = 43.3$〔kN〕

$P_y = P\sin 30^\circ = 50$〔kN〕$\times 1/2 = 25.0$〔kN〕

（p.9）穴埋め例題 **1.3**

$$\sum_i X_i = 30\cos 45^\circ - 50\cos 60^\circ - 30\cos 30^\circ = 15\sqrt{2} - 25 - 15\sqrt{3} = -29.77 \text{〔kN〕}$$

$$\sum_i Y_i = 30\sin 45^\circ + 50\sin 60^\circ - 30\sin 30^\circ = 15\sqrt{2} + 25 + 25\sqrt{3} - 15 = 49.51 \text{〔kN〕}$$

よって，合力の大きさは $R \approx \sqrt{\left(\sum X\right)^2 + \left(\sum Y\right)^2} =$ 57.77〔kN〕となる。

向きは，$\theta \approx 121.02^\circ$（$x$ 軸から反時計まわりに測った角度）

（p.12）穴埋め例題 **1.4**

鉛直方向の力のつり合いから

$V_A + V_B = 80$〔kN〕（1.11）

点 B に関するモーメントのつり合いから

$5V_A - 80$〔kN〕$\times$ 3〔m〕$= 0$（1.12）

式（1.11），（1.12）より

V_A = 48〔kN〕

V_B = 32〔kN〕

（p.13）穴埋め例題 1.5

集中荷重の大きさは

P = (1/2) w_0 l = (1/2) ×5〔kN/m〕 × 3〔m〕 = 7.5〔kN〕

作用させる位置は, 三角形分布の小さいほうから 2/3 の位置なので, 構造物の左端から 5 m の位置ということになる。

章末問題

【1.1】 1 N = 1 kg × 1 m/s^2 = 1 000 g × 100 cm/s^2 = 1×10^5 g･cm/s^2 = 1×10^5 dyne

したがって、1 N は 1 dyne の 10^5 倍である。

【1.2】 水平方向の力のつり合いを考えると

$P_2 \cos 30° = P_3 \cos 30°$

である。よって

$P_2 = P_3$ ・・・①

となる。また、鉛直方向の力のつり合いを考えると

$P_2 \sin 30°$ ＋ $P_3 \sin 30°$ = 100〔kN〕

となる。よって

$\frac{1}{2}(P_2 + P_3)$ = 100〔kN〕・・・②

である。式①, ②より

$P_2 = P_3$ = 100〔kN〕

となる。100 kN の荷重を支えるのに, 合計 200 kN の力を必要とするので少し不思議な気がするかもしれない。

【1.3】 鉛直下向きの等分布荷重を集中荷重に置き換える際, 力のつり合い条件 $\sum V = 0$, $\sum M = 0$ に対する影響が同じように置き換えるなら, 力のつりあいに影響を与えない。

まず, 鉛直方向について集中荷重 P の大きさは

$P = \int_0^l w_0(x)\,dx = w_0 \int_0^l dx = w_0\,[x]_0^l = wl$

である。つぎに, モーメントについては, 左端からの距離を x として

$$\int_0^l w(x)x\,dx = w_0\int_0^l x\,dx = w\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = w_0 l\frac{l}{2} = P\cdot\frac{l}{2}$$

である。すなわち，うでの長さは$\dfrac{l}{2}$となるので，等分布荷重が作用する区間の中央に集中荷重を作用させることになる。

【1.4】　鉛直下向きの等分布荷重を集中荷重に置き換えた際

$$\sum V = 0,\quad \sum M = 0$$

に対する影響が同じように置き換えるなら，力のつりあいに影響を与えない。

まず，鉛直方向について集中荷重 Pは

$$P = \int_0^l w(x)\,dx = \int_0^l \frac{w_0}{l}x\,dx = \frac{w_0}{l}\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^l = \frac{1}{2}w_0 l$$

となり，三角形の面積になっている。

つぎに，モーメントについては左端から x 軸をとって，

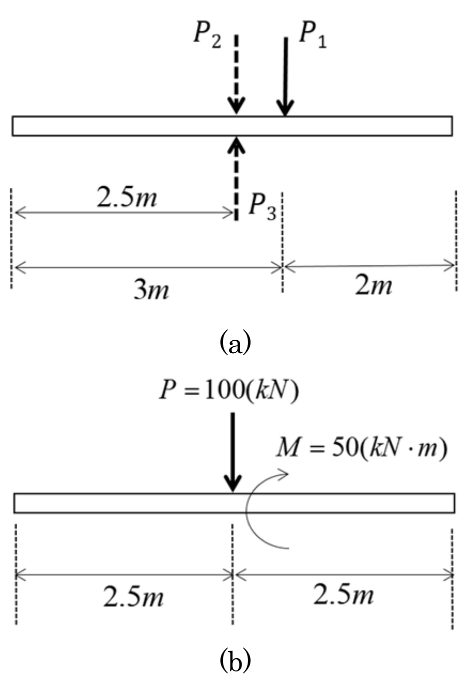
$$\int_0^l w(x)x\,dx = \int_0^l \frac{w_0}{l}x^2\,dx = \frac{w_0}{l}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^l = \frac{w_0}{l}\frac{l^3}{3} = w_0\frac{l^2}{3} = \frac{1}{2}w_0 l\cdot\frac{2}{3}l = P\cdot\frac{2}{3}l$$

である。よって，集中荷重$\dfrac{1}{2}w_0 l$ の大きさの力が，左端から$\dfrac{2}{3}l$ の位置に作用させれば良いことになる.

【1.5】　**解図 1.1**(a)のように，棒の中心に上向きと下向きの 100 kN の荷重 P_2，P_3 を考えても，これらはこの棒の力のつり合いに影響しない。つぎに，これら三つの力のうち，P_1 と P_3 の二つは偶力をなすので，図(b)のように以下のモーメントに置き換えることができる。

$M = P \cdot a = 100$ kN・0.5 m = 50 kN・m

よって，もとの荷重は，中心に作用する集中荷重 100 kN とモーメント 50 kN･m からなることになる。これらの作用を別々に考えると，中心に作用する 100 kN を支える力は，$V_A = V_B = 50$ kN である（なぜなら，偶力の大きさが 10kN で，距離が 5m だから）。モーメントに対しては，$V_A = -10$ kN，$V_B = 10$ kN である。すなわち，$V_A = 40$ kN は，$V_A = 50$ kN という鉛直力を支える力



解図 1.1

と $V_A = -10$ kN なるモーメントを支える成分が合計された結果である。また，$V_B = 60$ kN は，$V_B = 50$ kN という鉛直力を支える成分と $V_B = 10$ kN なるモーメントを支える成分が合計された結果である。

2. 構造材料の性質と強さ

穴埋め例題

（p.16）穴埋め例題 2.1

荷重 $P = 50$ kN $= 50 \times 10^3$ N として

引張応力 $\sigma_t = \frac{P}{A} = 1.59$ N/mm^2 または 1.59 MPa となる。

（p.16）穴埋め例題 2.2

110.7 mm 以上とする。

（p.17）穴埋め例題 2.3

0　圧縮応力　引張応力　曲げ応力

（p.19）穴埋め例題 2.4

・圧縮応力 $\sigma_C = {}^{P}/_{A} = 300 \times 10^3 \ / \ 50^2\pi = 38.2$ MPa

・縦ひずみ $\varepsilon = {}^{(L_1 - L)}/_{L} = (199.8 - 200) / 200 = -0.001 = -1\,000\mu$

・横ひずみ $\varepsilon' = {}^{(D_1 - D)}/_{D} = (100.02 - 100) / 100 = 0.0002 = 200\mu$

・ポアソン比 $\nu = \left| {}^{\varepsilon'}/_{\varepsilon} \right| = |\ 200 / -1000\ | = 0.2$

（p.22）穴埋め例題 2.5

① 応力 $\sigma = P/A = 80 \times 10^3 / (20^2\pi) = 63.7$ N/mm^2

② 縦ひずみ $\varepsilon = \sigma / E = 63.7 / (200 \times 10^3) = 319 \times 10^{-6}$

③ 伸び量 $\lambda = \varepsilon L = 319 \times 10^{-6} \times 10 \times 10^{-3} = 3.19$ mm

④ 横ひずみ $\varepsilon' = -\nu\varepsilon = -0.25 \times 319 \times 10^{-6} = -80 \times 10^{-6}$

（p.23）穴埋め例題 2.6

$\sigma_x = P / A_x$

$d\lambda = \cdots = \dfrac{4P}{\pi E\left(d_1+\frac{d_2+d_1}{l}x\right)^2}\ dx$

伸び総量

$\lambda = \dfrac{4Pl}{\pi E(d_2-d_1)}\left(\dfrac{1}{d_1}-\dfrac{1}{d_2}\right)$

（p.26）穴埋め例題 2.7

$\lambda_A = \dfrac{R_A}{EA} l_A$,

$\lambda_B = \dfrac{R_B}{EA} l_B$ となり，式（2.20）の関係および……

……よって，式（2.19），（2.20）より

$R_A = 40$ kN,　　$R_B = 60$ kN

となる。

……

に数値を代入して，1.2 mm となる。

（p.27）穴埋め例題 2.8

$R = Ea\,(t_2 - t_1)\,A = 2.0 \times 10^5 \times 1.12 \times 10^{-5} \times (60 - 20) \times 50^2\,\pi = 703717$ N $= 703.7$ kN

章末問題

【2.1】　① 圧縮応力 $\sigma_c = \dfrac{P}{A} = \dfrac{P}{\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2} = \dfrac{4P}{\pi d^2}$

② 縦ひずみ $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{l} = \dfrac{l - l_1}{l}$

③ 縦弾性係数 $E = \dfrac{\sigma}{\varepsilon} = \dfrac{4Pl}{\pi d^2 (l - l_1)}$

④ 横ひずみ $\varepsilon' = -\nu \cdot \varepsilon = \dfrac{\nu(l_1 - l)}{l}$

⑤ 長径の増加量 $\delta = \varepsilon' \cdot d = \dfrac{\nu(l_1 - l)}{l} d$

⑥ $d_1 = d + \delta = d + \dfrac{\nu(l_1 - l)}{l} d$

⑦ 体積ひずみ $\varepsilon_V = \varepsilon - 2\varepsilon' = \varepsilon - 2\nu\varepsilon = \dfrac{(1-2\nu)(l-l_1)}{l}$

【2.2】　応力等の計算を行う場合は荷重の単位は N、寸法（長さ）は mm に統一して計算する。すなわち、$P = 35$ kN $= 35\times10^3$ N，$l = 1$ m $= 1\times10^3$ mm として，計算を進める。

① 応力 $\sigma = {}^{P}\!/_{A} = {}^{35 \times 10^3}\!/_{10^2 \pi} = 111.408 = 111.41\ \mathrm{N/mm^2} = 111.42\ \mathrm{MPa}$

② 縦ひずみ $\varepsilon = \dfrac{\lambda}{l} = \dfrac{0.53}{1\times10^3} = 0.53 \times 10^{-3} = 530 \times 10^{-6} = 530\ \mu$

③ 縦弾性係数 $E=\frac{\sigma}{\varepsilon}=\frac{111.41}{530\times10^{-6}}=0.21\times10^{6}=2.1\times10^{5}\mathrm{N/mm^2}$

④ 横ひずみ $\varepsilon'=-\nu\varepsilon=-0.25\times530=132.5\,\mu$

柱が拘束されていない場合に生じる熱ひずみ ε_t は

$$\varepsilon_t=\alpha\cdot\Delta\mathrm{t}=1.2\times10^{-5}\times20=240\times10^{-6}=240\,\mu$$

となる。両端が固定されているため、このひずみの分だけ圧縮された状態となっている。このときに生じる温度応力をσ_tとすると

$$\sigma_t=E\varepsilon_t=200\times10^{3}\times240\times10^{-6}=48\ [\mathrm{N/mm^2}]=48\ [\mathrm{MPa}]$$

の圧縮応力状態となる。

また，反力 R は棒の直径 d = 10 cm = 100 mm として

$$R=A\,\sigma_t=\left(d^2\pi/_4\right)\cdot\sigma_t=\left(100^2\times\pi/_4\right)\times48=376\,800\ [\mathrm{N}]=376.8\ [\mathrm{kN}]$$

【2.3】 図 2.14 に関連する問題である。鉄筋およびコンクリートに生じる応力をσ_s，σ_cとすると、式(2.17)より

$$\sigma_\mathrm{s}=\frac{E_\mathrm{s}}{A_\mathrm{s}E_\mathrm{s}+A_\mathrm{c}E_\mathrm{c}}P,\ \sigma_\mathrm{c}=\frac{E_\mathrm{c}}{A_\mathrm{s}E_\mathrm{s}+A_\mathrm{c}E_\mathrm{c}}P$$

である。問題より、$\sigma_\mathrm{s}\leqq\sigma_\mathrm{as}$，$\sigma_\mathrm{c}\leqq\sigma_\mathrm{ac}$の両条件を満たす P を求める。

$$\frac{E_\mathrm{s}}{A_\mathrm{s}E_\mathrm{s}+A_\mathrm{c}E_\mathrm{c}}P\leqq\sigma_\mathrm{as},\ \frac{E_\mathrm{c}}{A_\mathrm{s}E_\mathrm{s}+A_\mathrm{c}E_\mathrm{c}}P\leqq\sigma_\mathrm{ac}$$

より、それぞれ

$$P\leqq\frac{(A_\mathrm{s}E_\mathrm{s}+A_\mathrm{c}E_\mathrm{c})\sigma_\mathrm{as}}{E_\mathrm{s}}=\frac{(500\times2.0\times10^5+10000\times2.2\times10^4)\times120}{2.0\times10^5}=192000[\mathrm{N}]$$

$$=192.0\ [\mathrm{kN}]$$

$$P\leqq\frac{(A_\mathrm{s}E_\mathrm{s}+A_\mathrm{c}E_\mathrm{c})\sigma_\mathrm{ac}}{E_\mathrm{c}}=\frac{(500\times2.0\times10^5+10000\times2.2\times10^4)\times10}{2.2\times10^4}=145454[\mathrm{N}]$$

$$=145.5\ [\mathrm{kN}]$$

したがって，安全圧縮荷重は 145.5 kN 以下となる。

【2.4】 式(2.23)より、$R\geqq\sigma_\mathrm{t}\,A=E\alpha(t_2-t_1)\cdot\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$ を満たす d を求める。この式を変形すると

$$d^2\leqq\frac{4R}{\pi E\alpha(t_2-t_1)}=\frac{4\times400\times10^3}{\pi\times200\times10^3\times1.2\times10^{-5}\times(40-20)}=10610.3$$

となる。したがって、$\mathrm{d}\leqq103.0\mathrm{mm}$

【2.5】

（数式を用いる場合）

組合せ応力に関する式（2.26）～（2.29）を用いて、問いのσ_x，σ_y，τ_{xy}を代入すると、

① 主応力は式（2.27）を用いて

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2} = \frac{40+10}{2} \pm \sqrt{(\frac{40-10}{2})^2+25^2} = 25 \pm 29.2$$

したがって，$\sigma_{\max} = 54.2$ MPa,　$\sigma_{\min} = -4.2$ MPa となる。

② 主応力面のなす角は式（2.26）を用いて

$$\begin{cases}\varphi_1 = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}\right) = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}\left(\dfrac{2\times 25}{40-10}\right) = 29.5\\ \varphi_2 = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(\dfrac{2\tau_{xy}}{\sigma_x-\sigma_y}) + \dfrac{\pi}{2} = \dfrac{1}{2}\tan^{-1}(\dfrac{2\times 25}{40-10}) + \dfrac{\pi}{2} = 29.5 + \dfrac{\pi}{2} = 120\end{cases}$$

したがって、$\varphi_1 = 29.5°$, $\varphi_2 = 120°$ となる。

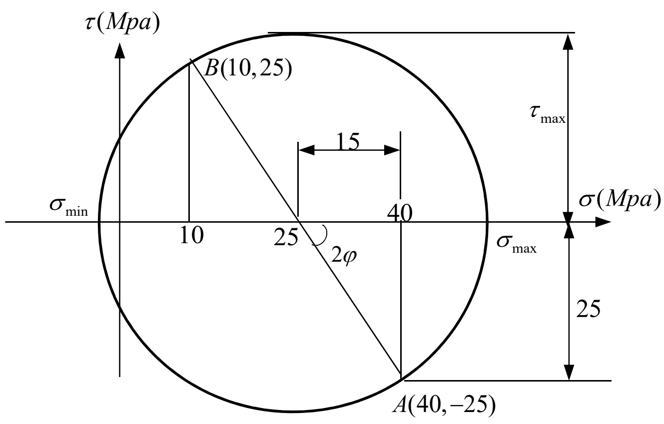
③ 主せん断応力は式（2.29）を用いて

$$\left.\begin{matrix}\tau_{max}\\ \tau_{min}\end{matrix}\right\} = \pm\sqrt{(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2})^2+\tau_{xy}^2} = \pm\sqrt{(\frac{40-10}{2})^2+25^2} = \pm 29.2$$

したがって、$\tau_{\max} = 29.2$ MPa,　　$\tau_{\min} = -29.2$ MPa となる。

【モールの応力円を用いる場合】

横軸を直応力σ と縦軸をせん断応力τとして座標軸を描き、これに座標点 A(σ_x, $-\tau$) = (40, −25)と点 B(σ_y, $+\tau$) = (10, +25)をプロットする。線分 AB と座標軸σ との交点 C($\frac{\sigma_x+\sigma_y}{2}$, 0) = (25, 0)を中心とし、直径 AB のモールの応力円を描く。**解図 2.1** は座標点 A と B をもとに作成したモールの円である。



解図　2.1　モールの応力

モールの応力円において、図には、主応力$\sigma_{\max}$と$\sigma_{\min}$の位置を示してある。

図の円の半径は、$\sqrt{15^2+25^2} = 29.2$となり、円の中点 C は 25 となるので、

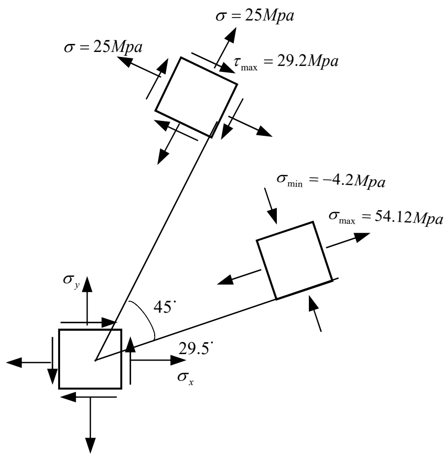
$$\sigma_{\max} = 25 + 29.2 = 54.2 \text{ MPa}, \qquad \sigma_{\min} = 25 - 29.2 = -4.2 \text{ MPa}$$

である。主応力面のなす角φは$2\varphi = \tan^{-1}(25/15) = 59^\circ$となるので、$\varphi = 29.5^\circ$となる。せん断応力の大きさは円の半径に等しく、解図 2.1 より

$$\tau_{\max} = 29.2\ \mathrm{MPa}, \qquad \tau_{\min} = -29.2\ \mathrm{MPa}$$

となる。

解図 2.2 は主応力面の方向と、最大と最小のせん断応力の生ずる方向を示したものである。主応力$\sigma_{\max}$の位置はσ_x(点 A)を反時計回りに29.5°回転させた位置にあり、$\sigma_{\min}$の位置はσ_y(点 B) を反時計回りに29.5°回転させた方向にある。それぞれの主応力面にはせん断応力は作用していない。また最大せん断応力$\tau_{\max}$の働く位置は、$\sigma_{\max}$からさらに45°反時計回りに回転させた位置にある。解図 2.1 と比較しながら解図 2.2 を見ると任意の点での一つの応力状態がわかれば、その点におけるさまざまな方向の応力状態を求めることができることがわかる。



解図　2.2　主応力と最大せん断応の方向

3.　構造物と安定・不安定，静定・不静定

穴埋め例題

（p.36）穴埋め例題 3.1

図 3.5 に示す構造物は，左端，右端ともローラーで支えられた構造である．この構造物は，不安定構造である．なぜなら，はりの水平方向の自由度を拘束していないからである。

（p.38）穴埋め例題 3.2

図（a）は 3 次不静定構造であるが，拘束度を一つ緩めると図（b）のようになり，これは 2 次不静定構造である。さらに一つ緩めると図（c）のようになり，1 次不静定構造となる。さらに一つ緩めると，図（d）のようになり，これは静定構造である。拘束度を三つ緩めて静定構造になったので，もとの構造は，3 次不静定構造である。なお，これ以上，拘束度を緩めると不安定構造になってしまう。

4.　静定トラス

穴埋め例題

（p.42）穴埋め例題 4.1

図 4.10 を参照して、点 C における水平方向の力は

$$S_2 - 20\cos 30^\circ = 10\sqrt{3}\text{-}20\times\sqrt{3}/2=0$$

であり、つり合っている。また、鉛直方向の力も

$$S_3 - 20\sin 30^\circ = 10\text{-}20\times 1/2=0$$

であり、つり合っている。

（p.45）穴埋め例題 4.2

R_A を求めるには、点 B まわりのモーメントのつり合い式を用いる。すなわち

$$R_A \times 4 - 10\times 3 + 2\sqrt{3}\times\sqrt{3} = 0 \qquad \therefore\ R_A = 6\ \text{kN}$$

R_B を求めるには，鉛直方向の力のつり合い式を用いればよい。

$$10 - R_A - R_B = 0 \qquad \therefore\ R_B = 4\ \text{kN}$$

H_A を求めるためには，水平方向の力のつり合い式を用いる。

$$2\sqrt{3} - H_A = 0 \qquad \therefore\ H_A = 2\sqrt{3}\ \text{kN}$$

（p.47）穴埋め例題 4.3

$$R_A \times 6 - 6\times 3 + 2\times 3 = 0 \qquad \therefore\ R_A = 2\ \text{kN}$$

R_B を求めるには，鉛直方向の力のつり合い式を用いればよい。

$$6 - R_A - R_B = 0 \qquad \therefore\ R_B = 4\ \text{kN}$$

H_A を求めるためには，水平方向の力のつり合い式を用いる。

$$2 - H_A = 0 \qquad \therefore\ H_A = 2\ \text{kN}$$

（水平方向）　$2 - S_2 = 0$

（鉛直方向）　$S_1 + 2 = 0$

$$\therefore\ S_1 = -2\ \text{kN}, \qquad S_2 = 2\ \text{kN}$$

（水平方向）　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}S_3 + S_4 + 2 = 0$

（鉛直方向）　$\dfrac{\sqrt{2}}{2}S_3 - 2 = 0$

$$\therefore\ S_3 = 2\sqrt{2}\ \text{kN}, \qquad S_4 = -4\ \text{kN}$$

（p.49）穴埋め例題 4.4

$2 \times 3.0 - S_2 \times 3.0 = 0$　　$\therefore S_2 = 2\text{kN}$

S_4 を求めるためには、S_2 と S_3 が交わる点 C まわりのモーメントのつり合いを用いる。

$2 \times 3.0 + 2 \times 3.0 + S_4 \times 3.0 = 0$　　$\therefore S_4 = -4\ \text{kN}$

S_3 を求めるためには、鉛直方向の力のつり合いを用いる。

$2 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 = 0$　　$\therefore S_3 = 2\sqrt{2}\text{kN}$

（p.50）穴埋め例題 4.5

$R_A \times 8 - P \times 6 - P \times 4 - P \times 2 = 0$　　$\therefore R_A = \frac{3}{2} P$

（水平方向）　$S_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} S_3 = 0$

（鉛直方向）　$\frac{\sqrt{2}}{2} S_3 + \frac{3}{2} P = 0$

$\therefore S_2 = \frac{3}{2} P,\quad S_3 = -\frac{3\sqrt{2}}{2} P$

（水平方向）　$\frac{\sqrt{2}}{2} S_3 - S_8 = 0$

（鉛直方向）　$\frac{\sqrt{2}}{2} S_3 + S_5 = 0$

$\therefore S_5 = \frac{3}{2} P,\ S_8 = -\frac{3}{2} P$

（水平方向）　$S_2 - \frac{\sqrt{2}}{2} S_7 - S_6 = 0$

（鉛直方向）　$\frac{\sqrt{2}}{2} S_7 + S_5 - P = 0$

$\therefore S_6 = 2P,\ S_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2} P$

（p.52）穴埋め例題 4.6

$\frac{3}{2} P \times 4.0 - P \times 2.0 - S_6 \times 2.0 = 0$　$\therefore S_6 = 2P$

$\frac{3}{2} P \times 2.0 + S_8 \times 2.0 = 0$　$\therefore S_8 = -\frac{3}{2} P$

$\frac{3}{2} P - P + \frac{\sqrt{2}}{2} S_7 = 0$　$\therefore S_7 = -\frac{\sqrt{2}}{2} P$

章末問題

【4.1】　点 C に作用する力を描く（**解図 4.1**）。点 C には外力 9 kN と二つの部材力（S_1, S_2）が作用している。この際，部材力は引張力と仮定して描く。この点における水平方向および鉛直方向の力のつり合いを考える。

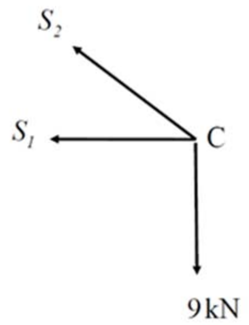
（水平方向）　$S_1 + S_2 \dfrac{4}{5} = 0$

（鉛直方向）　$S_2 \dfrac{3}{5} - 9 = 0$

これより

$$S_1 = -12\ \text{kN}, \qquad S_2 = 15\ \text{kN}$$

が得られる。



解図 4.1　点 C での力のつり合い

【4.2】　点 C に作用する力を描く（**解図 4.2**）。点 C には鉛直方向の外力 $2\sqrt{2}$ kN，水平方向の外力 $\sqrt{2}$ kN，および二つの部材力（S_1, S_2）が作用している。この際，部材力は引張力と仮定して描画する。この点における水平方向および鉛直方向の力のつり合いを考える。

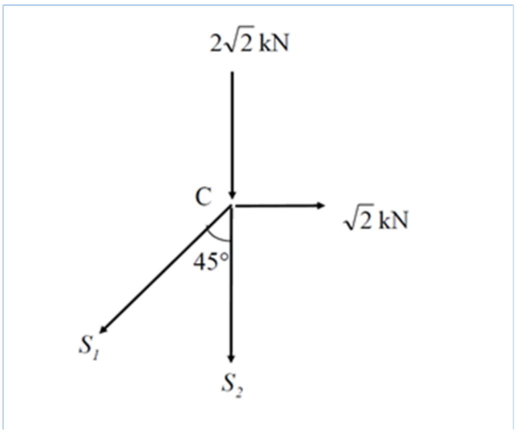
（水平方向）　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} S_1 - \sqrt{2} = 0$

（鉛直方向）　$\dfrac{\sqrt{2}}{2} S_1 + S_2 + 2\sqrt{2} = 0$

これより

$$S_1 = 2\ \text{kN}, \qquad S_2 = -3\sqrt{2}\ \ \text{kN}$$

が得られる。



解図 4.2　点 C での力のつり合い

【4.3】　まず，三つの反力を求める。R_A を求めるには，支点 B まわりのモーメントのつり合い式を用いる。すなわち

$R_A \times 8 - P \times 6 - P \times 4 - P \times 2 = 0 \qquad \therefore R_A = \frac{3}{2}P$

である。つぎに R_B を求めるには，鉛直方向の力のつり合い式を用いればよい。

$P + P + P - R_A - R_B = 0 \qquad \therefore R_B = \frac{3}{2}P$

H_A を求めるためには，水平方向の力のつり合い式を用いる。

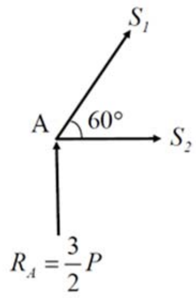
$H_A = 0$

(1)　節点法による求め方

支点 A に作用する力を描く（**解図 4.3**(a)）。支点 A には反力 R_A と二つの部材力 S_1, S_2 が作用している。この際、部材力は引張力と仮定して描画する。この点における水平方向および鉛直方向の力のつり合いを考える。

（水平方向）　$\frac{1}{2}S_1 + S_2 = 0$

（鉛直方向）　$\frac{\sqrt{3}}{2}S_1 + \frac{3}{2}P = 0$



解図 4.3(a) 点 A での力のつり合い

これより

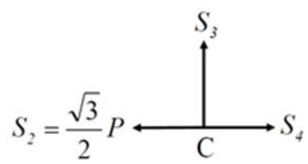
$$S_1 = -\sqrt{3}P, \qquad S_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

が得られる。つぎに、点 C に作用する力を描く（解図 4.3(b)）。未知数は S_3、S_4 の二つであり、水平方向および鉛直方向の二つのつり合い式から求められる。

（水平方向）　$\frac{\sqrt{3}}{2}P - S_4 = 0$

（鉛直方向）　$S_3 = 0$（ゼロ部材）

$$\therefore S_3 = 0, \qquad S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$



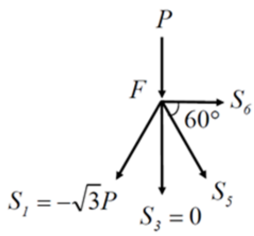
解図 4.3(b) 点 C での力のつり合い

つぎに、点 F に作用する力を描く（解図 4.3(c)）。未知数は S_5、S_6 の二つであり、水平方向および鉛直方向の二つのつり合い式から求められる。

（水平方向）　$\frac{1}{2}(-\sqrt{3}P) - \frac{1}{2}S_5 - S_6 = 0$

（鉛直方向）　$P + \frac{\sqrt{3}}{2}(-\sqrt{3}P) + \frac{\sqrt{3}}{2}S_5 = 0$

$$\therefore S_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}P, \qquad S_6 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}P$$



解図 4.3(c) 点 F での力のつり合い

(2)　断面法による求め方

解図 4.3(d)に示すように S_4，S_5，S_6 を含む断面でトラス全体を切断する。切断した左半分を取り出し，それに作用する外力と反力と部材力を描く（解図 4.3(e)）。S_4 を求めるためには，S_5 と S_6 が交わる点 F まわりのモーメントのつり合いを用いる。

$$\frac{3}{2}P\times 2.0 - S_4\times 2\sqrt{3} = 0 \qquad \therefore S_4 = \frac{\sqrt{3}}{2}P$$

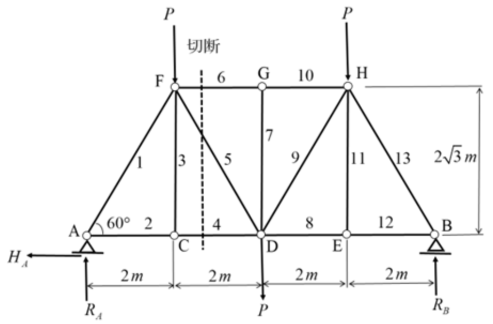
S_6 を求めるためには，S_4 と S_5 が交わる点 D まわりのモーメントのつり合いを用いる。

$$\frac{3}{2}P\times 4.0 - P\times 2.0 + S_6\times 2\sqrt{3} = 0 \qquad \therefore S_6 = -\frac{2\sqrt{3}}{3}P$$

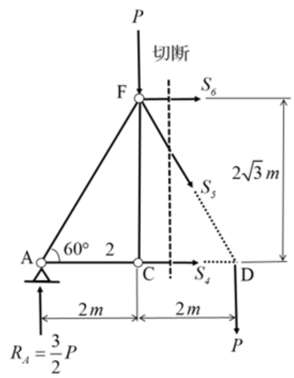
S_5 を求めるためには、鉛直方向の力のつり合いを用いる。

$$P + \frac{\sqrt{3}}{2}S_5 - \frac{3}{2}P = 0 \qquad \therefore S_5 = \frac{\sqrt{3}}{3}P$$

これらの部材力は節点法で求めた値と一致している。



解図 4.3(d)



解図 4.3(e)

【4.4】　(1)　節点法による求め方

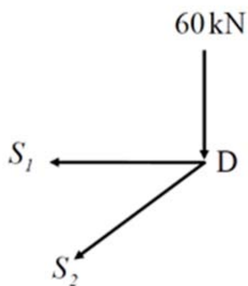
点 D に作用する力を描く（**解図 4.4**(a)）。点 D には外力 60 kN と二つの部材力 S_1，S_2 が作用している。この際，部材力は引張力と仮定して描く。この点における水平方向および鉛直方向の力のつり合いを考える。

（水平方向）　$S_1 + \frac{4}{5}S_2 = 0$

（鉛直方向）　$\frac{3}{5}S_2 + 60 = 0$

これより

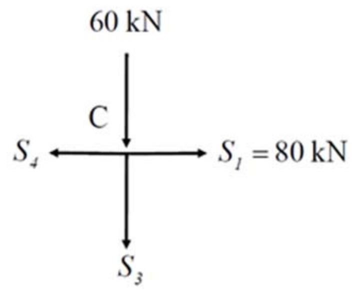
$S_1 = 80$ kN，　$S_2 = -100$ kN



解図 4.4(a)　点 D での力のつり合い

が得られる。

つぎに、点 C に作用する力を描く（解図 4.4(b)）。未知数は S_3，S_4 の二つであり、水平方向および鉛直方向の二つのつり合い式から求められる。



解図 4.4(b) 点 C での力のつり合い

（水平方向）　$80 - S_4 = 0$

（鉛直方向）　$60 + S_3 = 0$

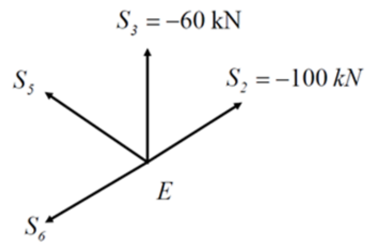
$\therefore S_3 = -60$ kN,　　$S_4 = 80$ kN

つぎに、点 E に作用する力を描く（解図 4.4(c)）。未知数は S_5，S_6 の二つであり，水平方向および鉛直方向の二つのつり合い式から求められる。

（水平方向）　$\frac{4}{5}(-100) - \frac{4}{5}S_5 - \frac{4}{5}S_6 = 0$

（鉛直方向）　$-60 + \frac{3}{5}(-100) + \frac{3}{5}S_5 - \frac{3}{5}S_6 = 0$

$\therefore S_5 = 50$ kN,　　$S_6 = -150$ kN



解図 4.4(c) 点 E での力のつり合い

⑵　断面法による求め方

解図 4.4(d)に示すように S_4，S_5，S_6 を含む断面でトラス全体を切断する。切断した右半分を取り出し，それに作用する外力と反力と部材力を描画する（解図 4.4(e)）。

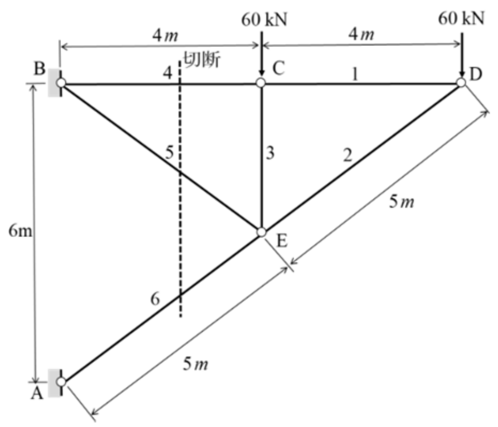


図 4.4(d)

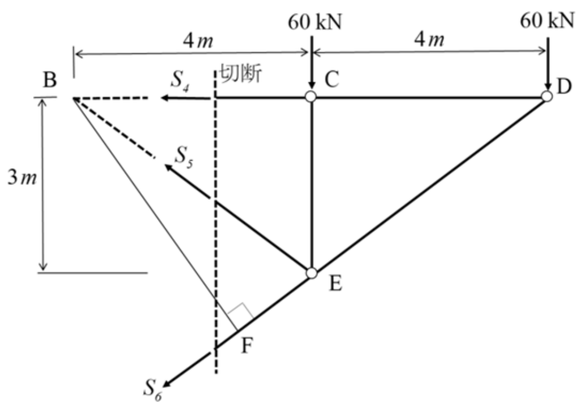


図 4.4(e)

S_4を求めるためには、S_5とS_6が交わる点 E まわりのモーメントのつり合いを用いる。

$$60 \times 4.0 - S_4 \times 3.0 = 0 \qquad \therefore S_4 = 80 \quad \text{kN}$$

S_6を求めるためには，S_4とS_5が交わる点 B まわりのモーメントのつり合いを用いる。

$$60 \times 8.0 + 60 \times 4.0 + S_6 \times \frac{3}{5} \times 8.0 = 0 \qquad \therefore S_6 = -150 \ \text{kN}$$

S_5を求めるためには，鉛直方向の力のつり合いを用いる。

$$\frac{3}{5} S_5 - \frac{3}{5} S_6 - 60 - 60 = 0 \qquad \therefore S_5 = 50 \ \text{kN}$$

これらの部材力は節点法で求めた値と一致している。

5. 静　定　ば　り

穴埋め例題

（p.55）穴埋め例題 **5.1**

$G_{①} = (b - a)\, h^2 / 6$

$G_{②} = a\, h^2 / 2$

$\bar{y} = (b + 2a)\, h / (3(a + b))$

（p.57）穴埋め例題 **5.2**

$$G_{①} = A_{①} \times \frac{30}{2} = 300 \times \frac{30}{2} = 4500\text{cm}^3$$

$$G_{②} = A_{②} \times \left(30 + \frac{10}{2}\right) = 400 \times 35 = 14000\text{cm}^3$$

$$\bar{y} = G_x / (A_{①} + A_{②}) = 185\,000 / 700 = 26.4 \text{ cm}$$

$$I_{①} = \frac{10 \times 30^3}{12} + 300 \times \left(26.5 - \frac{30}{2}\right)^2 = 62175\text{cm}^3$$

$$I_{②} = \frac{40 \times 10^3}{12} + 400 \times \left\{(30 - 26.5) + \frac{10}{2}\right\}^2 = 32200\text{cm}^3$$

$$I_{\text{NA}} = I_{①} + I_{②} = \underline{94400\text{cm}^3}$$

$$C_1 = (10 + 30) - 26.4 = 13.6 \text{ cm}, \qquad C_2 = \bar{y} = 26.4 \text{ cm}$$

$$Z_1 = \frac{94400}{26.4} = \underline{3580 \text{ cm}^3}\ , \qquad Z_2 = \frac{94400}{13.6} = 6940 \text{ cm}^3$$

（p.62）穴埋め例題 **5.3**

$dQ = \text{-}5\,dx$

$Q = \text{-}5x + C_1$

となる。これは $x = 0$ で $Q =$ 15 kN なので，$C_1 = 15$ より，$Q = \text{-}5x + 15$ となる。

また，式（5.20）より，$dM = (\text{-}5x + 15)\,dx$ である。これを積分すると，$M = \text{-}5x^2 / 2 + 15x + C_2$ であり，$x = 0$ で M = 0 なので，$C_2 = 0$ である。したがって

$M = (\text{-}5/2)\,x^2 + 15x$

となる。

Q 図と M 図は、図 5.11 の下部に示す。

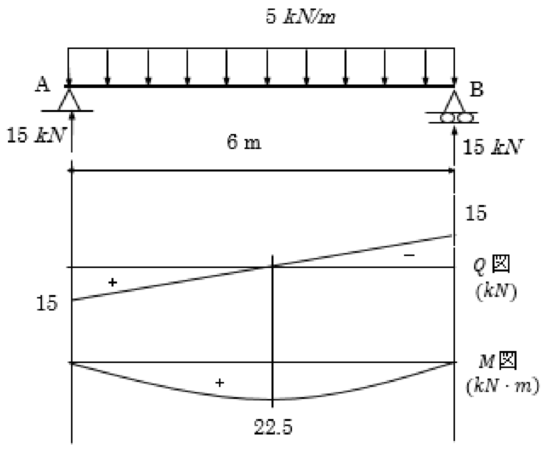


図 5.11　等分布荷重 q を載荷した単純ばり

（p.63）穴埋め例題 **5.4**

$\stackrel{+}{\curvearrowright}\sum M = 0 \quad at \quad A$ より

$M_A + 10 \times 5 - 25 = 0 \quad \Rightarrow \quad M_A = -25$ kN・m

$+\uparrow \sum V = 0$ より

$V_A - 10 = 0 \quad \Rightarrow \quad V_A = 10$ kN

Q 図と M 図は、図 5.13 の下部に示す。

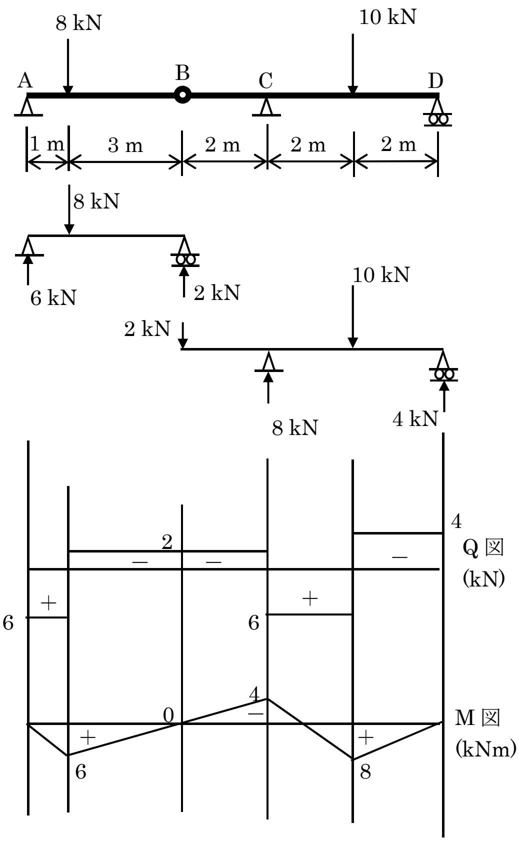


図 5.13　片持ちばり

（p.64）穴埋め例題 **5.5**

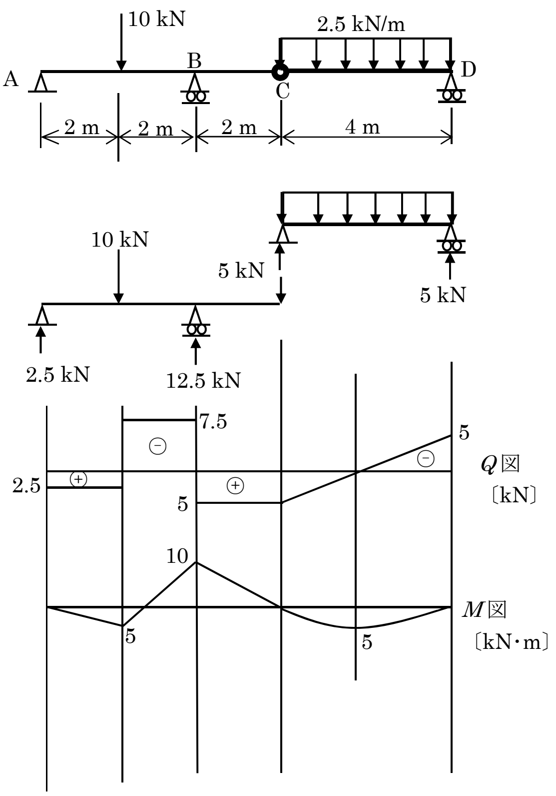


図 5.15　ゲルバーばり

（p.67）穴埋め例題 5.6

図（a）に本問の Q 図と M 図を示す。

曲げモーメントの最大値はPlである。

図（b）は共役ばり AB に弾性荷重を載荷したもので，最大値が $Pl/(EI)$となっている。

図（c）は全弾性荷重が$Pl^2/(2EI)$となることを示している。このことから……

$$\theta_A = Pl^2/(2EI)$$

たわみ v_A は全弾性荷重が……

$$v_A = Pl^2/(2EI) \times (2/3)l = Pl^3/(3EI)$$

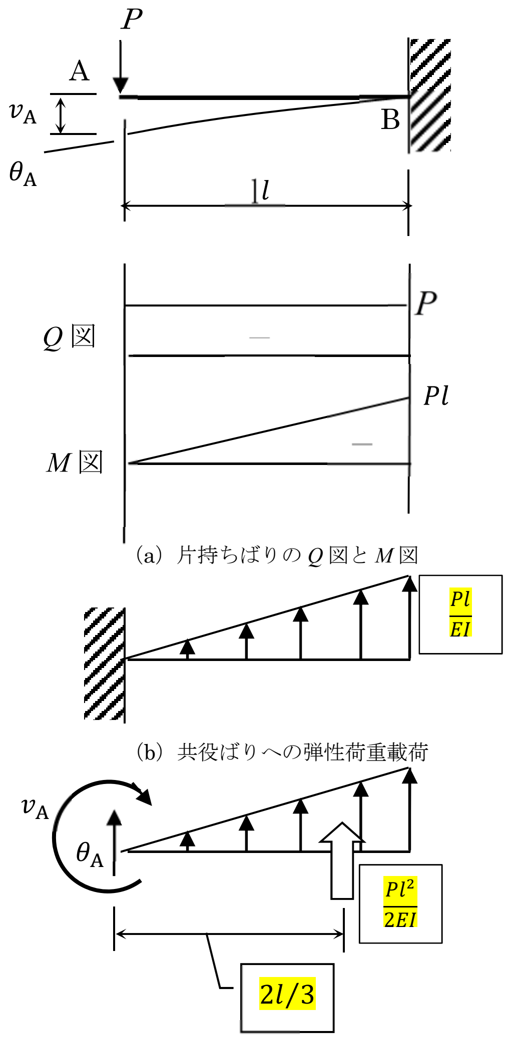


図 5.17　片持ちばり

（p.67）穴埋め例題 5.7

$Q_{max} = ql/2$　　　$M_{max} = ql^2/8$

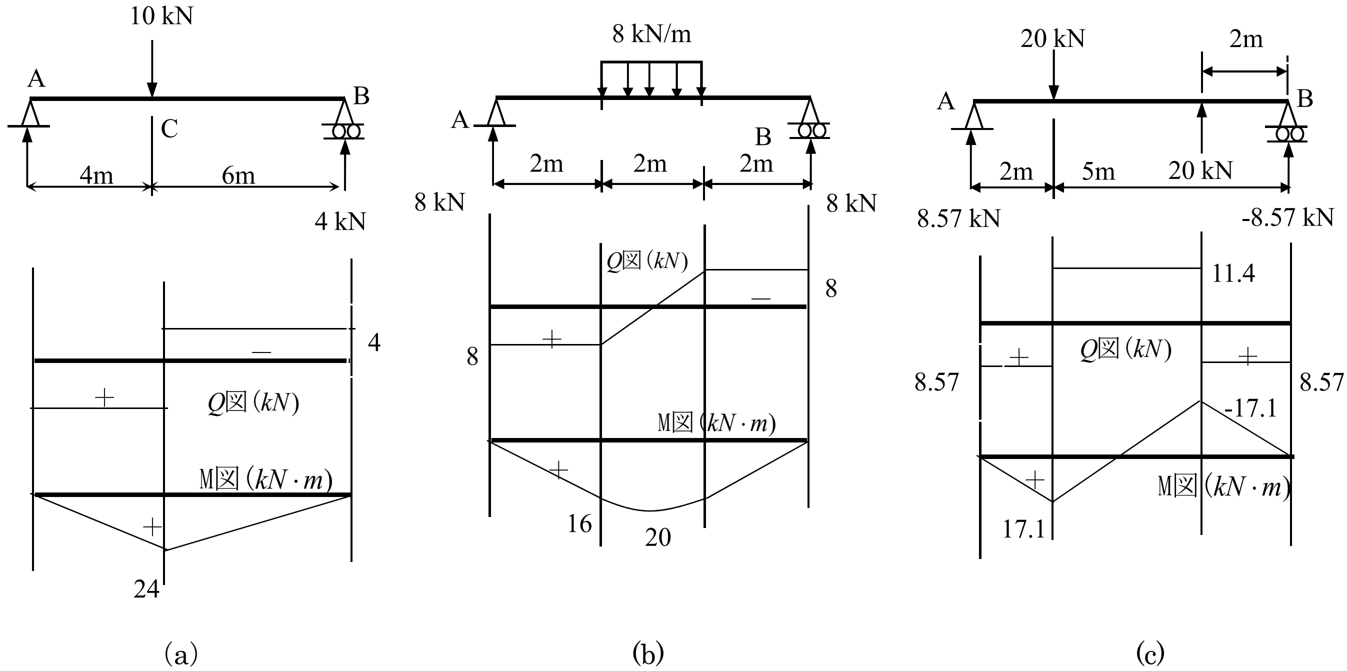
$I = bh^3/12$　　　$Z = Z_1 = Z_2 = bh^2/6$

$G_{NA} = bh^2/8$　　　$\sigma_{max} = M_{max}/Z$　　　$\tau_{max} = (Q_{max} \times G_{NA})/(Ib)$

$h = 39$ cm（製作の都合上，例えば 40cm もありえる）

章末問題

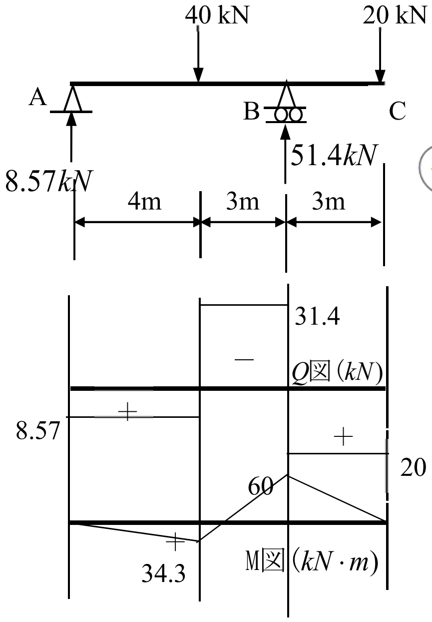
【5.1】　**解図 5.1** のとおり。



解図 5.1

【5.2】

解図 5.2 のとおり。

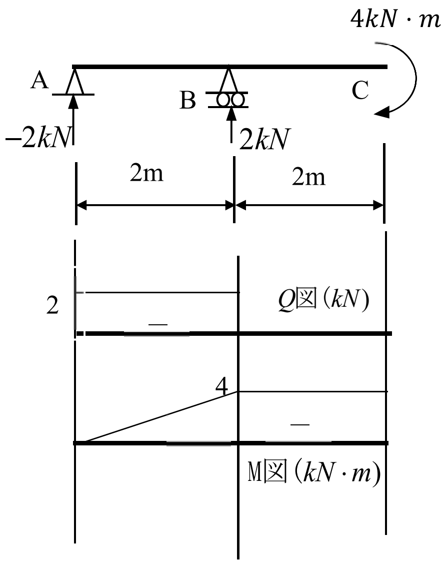


$+\sum M=0\ at$ 点 A; $40\times 4-V_{\mathrm{B}}\times 7+20\times 10=0$

$V_{\mathrm{B}}=51.4\mathrm{kN}$

$+\uparrow\sum V=0; V_{\mathrm{A}}+V_{\mathrm{B}}=0\Rightarrow V_{\mathrm{A}}=8.57\mathrm{kN}$

(a)



$+\sum M=0\ at$ 点A; $-V_{\mathrm{B}}\times 2+4=0$

$V_{\mathrm{B}}=2\mathrm{kN}$

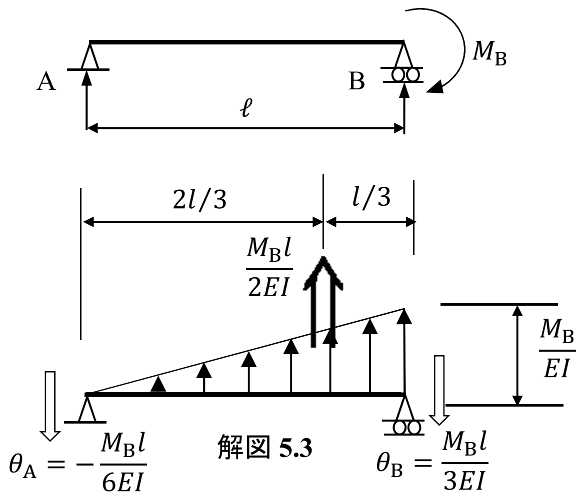
$+\uparrow\sum V=0; V_{\mathrm{A}}+V_{\mathrm{B}}=0\Rightarrow V_{\mathrm{A}}=-2\mathrm{kN}$

(b)

解図 5.2

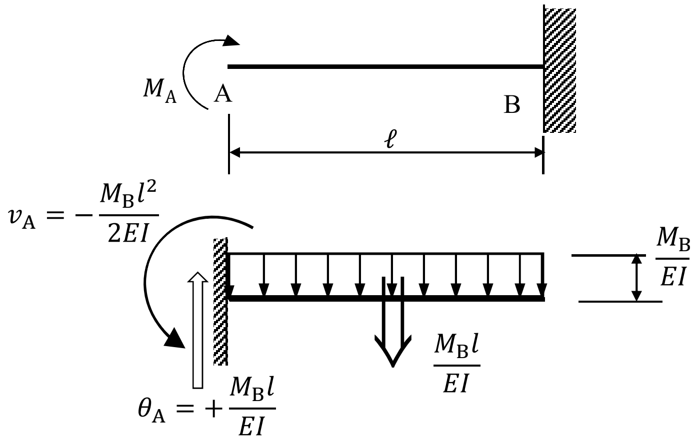
【5.3】

（1）解図 5.3 のとおり。



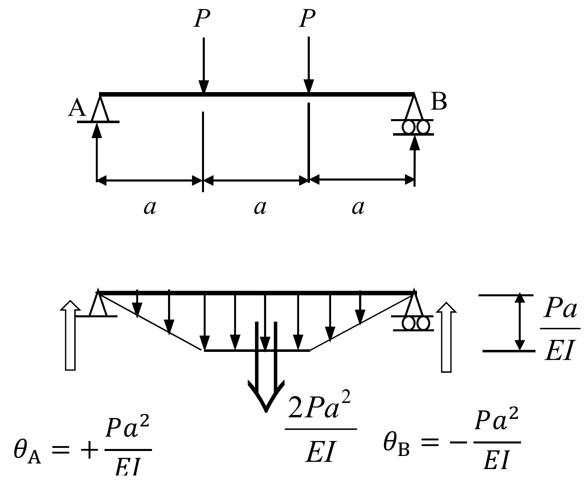
解図 5.3

（2）解図 5.4 のとおり。



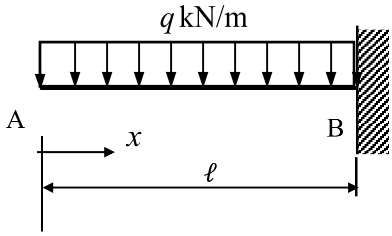
解図 5.4

（3）解図 5.5 のとおり。



解図 5.5

（4）**解図 5.6** のとおり。



$$M_x = -\frac{qx^2}{2}$$

$$\frac{d^2 v}{dx^2} = -\frac{M_x}{EI} = \frac{qx^2}{2EI} : \quad EI\frac{d^2 v}{dx^2} = \frac{qx^2}{2}$$

$$EI\frac{dv_x}{dx} = EI\theta_x = \frac{qx^3}{2\cdot 3} + C_1$$

$$EIv_x = \frac{qx^4}{2\cdot 3\cdot 4} + C_1 x + C_2$$

$$when\ x = \ l, \theta_{\mathrm{A}} = 0\ \mathrm{C}_1 = -\frac{ql^3}{2\cdot 3}$$

$$EI\theta_x = \frac{qx^3}{2\cdot 3} - \frac{ql^3}{2\cdot 3}$$

$$when\ x = l, v_{\mathrm{A}} = 0\ \mathrm{C}_2 = \frac{ql^4}{8}$$

$$EIv_x = \frac{q}{24}x^4 - \frac{ql^3}{6} + \frac{ql^4}{8}$$

$$\boxed{EI\theta_{\mathrm{A}(x=0)} = -\frac{ql^3}{6},\ EIv_{\mathrm{A}(x=0)} = \frac{ql^4}{8}}$$

解図 5.6

6.　簡単な静定ばりの影響線

穴埋め例題

（p.76）穴埋め例題 **6.1**

（V_A の計算）

①の長さ ＝ 5/6

②の長さ ＝ 3/6

③の長さ ＝ 1/6

$V_A = 20 \times 5/6 + 2 \times (3/6 + 1/6) \times 2/2$

$= 18.0$〔kN〕

（V_B の計算）

④の長さ= 1/6

⑤の長さ= 3/6

⑥の長さ= 5/6

$V_B = 20 \times 1/6 + 2 \times (3/6 + 5/6) \times 2/2$

$= 6.0$〔kN〕

（Q_C の計算）

⑦の長さ ＝ −1/6　　⑧の長さ ＝ 1　　⑨の長さ ＝ 1/3

$Q_C = 20 \times (-1/6) + 2 \times (3/6 + 1/6) \times 2/2 = -2$

（M_C の計算）

⑩の長さ ＝ 4/6　　⑪の長さ ＝ 1　　⑫の長さ ＝ 2/6

$M_C = 20 \times 4/6 + 2 \times (1 + 1/3) \times 2/2 = 16$

（p.78）穴埋め例題 **6.2**

（V_B の計算）

$V_B = 10 \times 1.25 + 15 \times 1 \times 8/2$

$= 72.5$〔kN〕

（V_C の計算）

$V_C = 10 \times (-0.25) + 15 \times 1 \times 8/2$

$= 57.5$〔kN〕

（Q_D の計算）

$Q_D = 10 \times 0.25 + 15 \times 0$

$= 2.5$ 〔kN〕

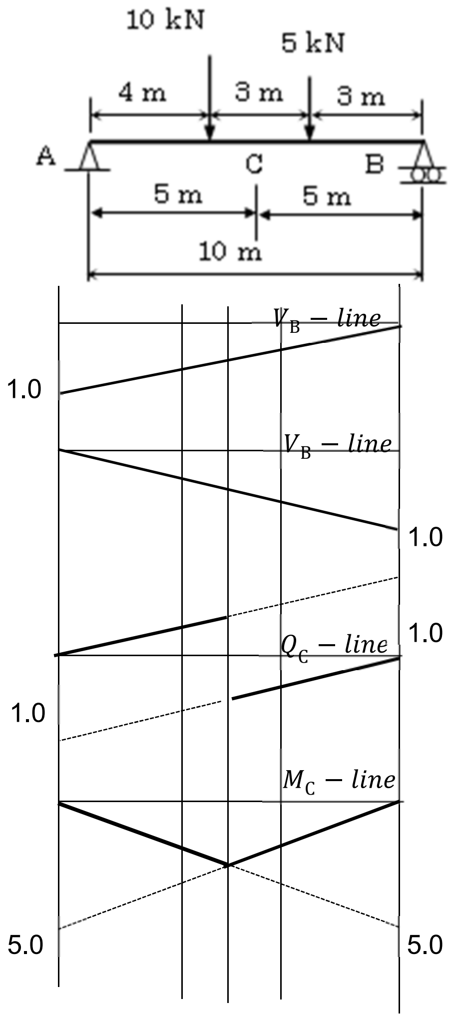
（M_Dの計算）

$M_D = 10 \times (-1) + 15 \times 8 \times 2/2$

$= 110$ 〔kN〕

章末問題

【6.1】 **解図 6.1** のとおり。



$V_A = 10 \times 0.6 + 5 \times 0.3 = 7.5$kN

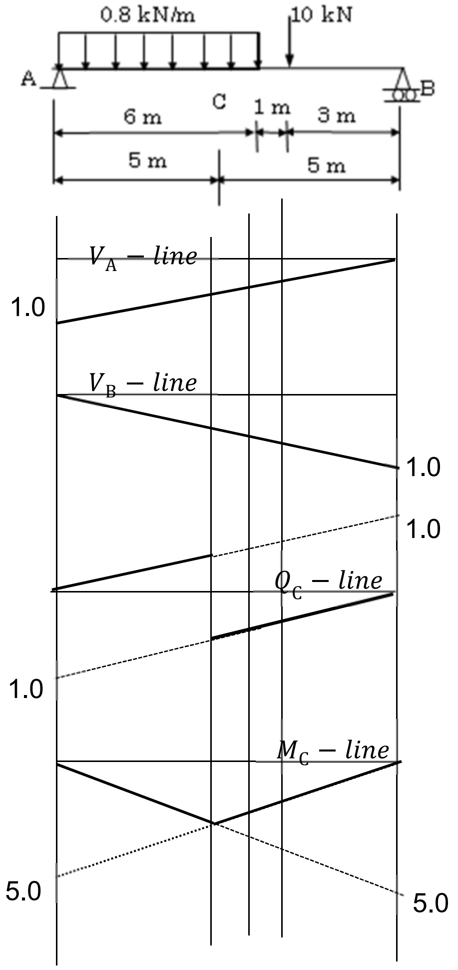
$V_B = 10 \times 0.4 + 5 \times 0.7 = 7.5$kN

$Q_c = -10 \times 0.4 + 5 \times 0.3 = -2.5$kN

$M_c = -10 \times 0.4 + 5 \times 0.3 = 27.5$kN・m

解図 6.1

【6.2】　**解図 6.2** のとおり。



$V_A = 0.8 \times \{(1 + 0.4) \times 6/2\} + 10 \times 0.3 = 6.36\text{kN}$

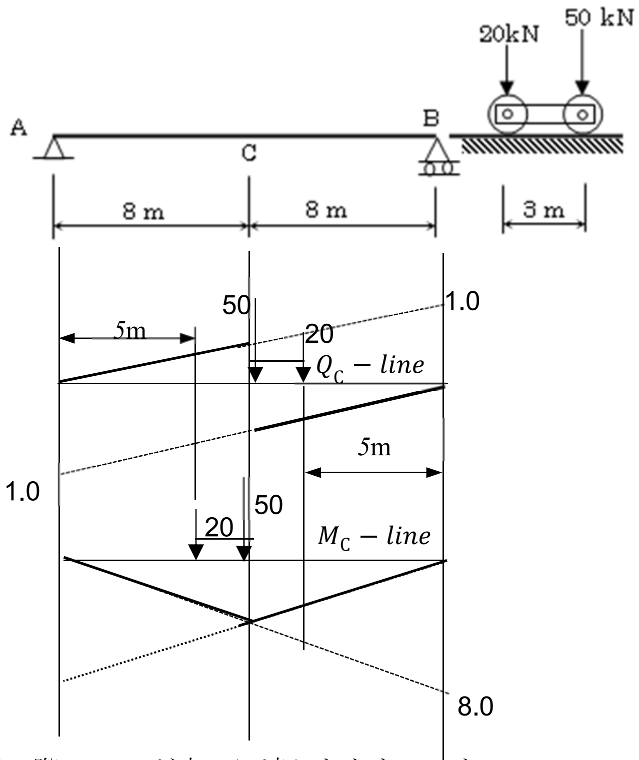
$V_B = 0.8 \times (6 \times 0.6/2) + 10 \times 0.7 = 8.44\text{kN}$

$Q_C = 0.8 \times \{-(5 \times 0.5)/2 + (0.5 + 0.4)/2\} + 10 \times 0.3 = 2.36\text{kN}$

$M_C = 0.8 \times (6.25 + 2.25) + 10 \times 1.5 = 21.8\text{kN} \cdot \text{m}$

解図 6.2

【6.3】 **解図 6.3** のとおり。



往復の際，50kN が点 C に達したとき max と min

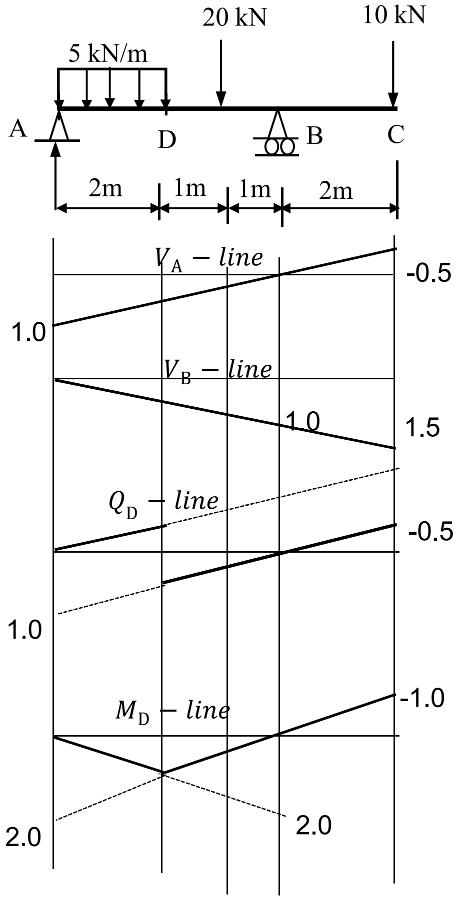
$Q_{\mathrm{MAX}} = 50 \times 8/16 + 20 \times 5/16 = 31.25\mathrm{kN}$

$Q_{\mathrm{MIN}} = 50 \times (-8/16) + 20 \times (-5/16) = -31.25\mathrm{kN}$

$M_{\mathrm{MAX}} = 50 \times (4) + 20 \times (8/16) \times 5 = 250\mathrm{kN \cdot m}$

解図 6.3

【6.4】　解図 6.4 のとおり。



$V_A = 5 \times (1 + 0.5) \times 2/2 + 20 \times (1/4) + 10 \times (-0.5) = 7.5\text{kN}$

$V_B = 5 \times (2 \times 0.5)/2 + 20 \times (3/4) + 10 \times 1.5 = 32.5\text{kN}$

$Q_D = 5 \times (-2 \times 0.5)/2 + 20 \times (1/4) + 10 \times (-0.5) = -2.5\text{kN}$

$M_D = 5 \times (2 \times 1)/2 + 20 \times (2/4) + 10(-1) = 5\text{kN} \cdot \text{m}$

解図 6.4

7. 構造物の弾性変形

穴埋め例題

（p.83）穴埋め例題 7.1

$$M = -\frac{1}{2}wx^2$$

$$U = \int_l \frac{M^2}{2EI}dx = \int_0^l \frac{1}{2EI}\left(-\frac{1}{2}wx^2\right)^2 dx = \frac{w^2}{8EI}\int_0^l x^4 dx = \frac{w^2}{8EI}\left[\frac{x^5}{5}\right]_0^l = \frac{w^2 l^5}{40EI}$$

（p.88）穴埋め例題 7.2

部材	実荷重による部材力 N	仮想荷重による部材力 $\bar{N}$	部材の長さ	$\frac{N\bar{N}}{EA}l$
AC	P	1	l	$\frac{Pl}{EA}$
BC	$-\sqrt{2}P$	$-\sqrt{2}$	$\sqrt{2}l$	$\frac{\sqrt{2}Pl}{EA}$

$$v = \sum \frac{N\bar{N}}{EA}l = = \frac{Pl}{EA} + \frac{2\sqrt{2}Pl}{2EA} = \frac{Pl}{EA} + \frac{\sqrt{2}Pl}{EA} = \frac{Pl}{EA}(1+\sqrt{2})$$

（p.90）穴埋め例題 7.3

$$M = -Px$$

$$\bar{M} = -x - \frac{l}{2}$$

$$1 \cdot \delta_A = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EL}dx =$$

$$\int_0^{l/2} \frac{1}{EI}(-Px)\left(-x-\frac{l}{2}\right)dx = \frac{P}{EI}\int_0^{l/2}\left(x^2 + \frac{l}{2}x\right)dx = \frac{P}{EI}\left[\frac{x^3}{3} + \frac{l}{4}x^2\right]_0^{l/2} = \frac{P}{EI}\left(\frac{l^3}{24} + \frac{l^3}{16}\right)$$

$$= \frac{5Pl^3}{48EI}$$

（p.91）穴埋め例題 7.4

まず，支点反力を求めると

$$V_{\mathrm{A}} = -\frac{M_{\mathrm{A}}}{l}\ , \qquad V_{\mathrm{B}} = \frac{M_{\mathrm{A}}}{l}$$

である。……

となる。……を作用させると，$\bar{M} = 1 - \frac{x}{l}$となるので

$$1 \cdot \theta_{\mathrm{A}} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{M_{\mathrm{A}}}{EI}\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)^2 dx = \frac{M_{\mathrm{A}} l}{3EI}$$

と求まる。点 B での……を作用させると，$\bar{M} = \frac{x}{l}$となるので

$$1 \cdot \theta_{\mathrm{B}} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{M_{\mathrm{A}}}{EI}\int_0^l \left(1 - \frac{x}{l}\right)\frac{x}{l} dx = \frac{M_{\mathrm{A}} l}{6EI}$$

と求まる。

（p.92）穴埋め例題 7.5

$$\int_0^l M\bar{M}\, dx = \int_0^l (-M_{\mathrm{A}})(-x)\, dx = \frac{1}{2} M_{\mathrm{A}} l^2$$

のようになる。……係数$\frac{1}{2}$に積分区間長 l を……の高さの積$(-M_{\mathrm{A}}) \times (-l)$を掛けて計算……

（p.94）穴埋め例題 7.6

$$U = \int_0^l \frac{M^2}{2EI} dx = 2\int_0^{l/2} \frac{M^2}{2EI} dx = 2\int_0^{l/2} \frac{1}{2EI}\left(\frac{P}{2}x\right)^2 dx = \frac{P^2}{4EI}\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{l/2} = \frac{P^2 l^3}{96EI}$$

$$v = \frac{\partial U}{\partial P} = \frac{\partial}{\partial P}\left(\frac{P^2 l^3}{96EI}\right) = \frac{Pl^3}{48EI}$$

章末問題

【7.1】 実荷重に対する部材力を N，仮想荷重として，点 B に鉛直下向きに 1 を与え，そのときの部材力を $\bar{N}$ とすると，各部材力は**解表 7.1** のようになる。

解表 7.1

部材	N	$\bar{N}$	l	$N\bar{N}l$
AB	0	0	l	0
AC	0	0	l	0
BD	$-P$	-1	l	Pl
CD	$-P$	-1	l	Pl
AD	$\sqrt{2}P$	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}l$	$2\sqrt{2}Pl$
			$\sum$	$2(1+\sqrt{2})Pl$

よって，点 B での鉛直変位は，$v_{\mathrm{B}}=\frac{2(1+\sqrt{2})Pl}{EA}$ となる。

【7.2】 実荷重に対する部材力を N，仮想荷重として，点 A に鉛直方向（下向き）に 1 を与え，そのときの部材力を $\bar{N}$ とすると，各部材力は**解表 7.2** のようになる。

解表 7.2

部材	N	$\bar{N}$	l	$N\bar{N}l$
AB	$-\sqrt{2}P/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}Pl/2$
BC	$P/2$	$1/2$	l	$Pl/4$
AC	0	0	l	0
CD	$P/2$	$1/2$	l	$Pl/4$
AD	$-\sqrt{2}P/2$	$-\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}l$	$\sqrt{2}Pl/2$
			$\sum$	$(1+2\sqrt{2})Pl/2$

よって，点 A での鉛直変位は，$v_{\mathrm{A}}=\frac{(1+2\sqrt{2})Pl}{2EA}$ となる。

【7.3】 仮想仕事の原理を用いる。仮想荷重は，点 B に鉛直方向（下方向）に 1 を載荷する。

$$1\cdot v=\int_0^l\left(\frac{M\bar{M}}{EI}\right)dx$$

ただし，x 座標を B 点から左方向にとることにする。

$$M=-\frac{1}{2}wx^2,\quad \bar{M}=-x$$

とすると，点 B 点の鉛直変位は

$$1\cdot v=\frac{1}{EI}\int_0^l\left(-\frac{1}{2}wx^2\right)(-x)\,dx=\frac{w}{2EI}\left[\frac{1}{4}x^4\right]_0^l=\frac{wl^4}{8EI}$$

となる。

【7.4】 仮想仕事の原理を用いる. 仮想荷重は, 点 B に時計方向に 1 のモーメント載荷する。

$$1\cdot v=\int_0^l\left(\frac{M\bar{M}}{EI}\right)dx$$

ただし，x 座標を B 点から左方向にとることにする。

$$M=-\frac{1}{2}wx^2,\quad \bar{M}=-1$$

とすると，点 B のたわみ角は

$$1\cdot\theta=\frac{1}{EI}\int_0^l\left(-\frac{1}{2}wx^2\right)(-1)\,dx=\frac{w}{2EI}\left[\frac{1}{3}x^3\right]_0^l=\frac{wl^3}{6EI}$$

となる。

【7.5】 仮想仕事の原理を用いる．仮想荷重は，はり中央の C 点に鉛直方向（下方向）に 1 を載荷する。

$$1\cdot v=\int_0^l\left(\frac{M\bar{M}}{EI}\right)dx$$

において

$$M=\frac{1}{2}wlx-\frac{1}{2}wx^2,\quad \bar{M}=\frac{1}{2}x\qquad \left(0\leqq x\leqq\frac{l}{2}\right)$$

とすると，点 C の鉛直変位は

$$1\cdot v=\int_0^l\left(\frac{M\bar{M}}{EI}\right)dx=\frac{2}{EI}\int_0^{l/2}\left(\frac{1}{2}wlx-\frac{1}{2}wx^2\right)\left(\frac{1}{2}x\right)dx=\frac{w}{2EI}\int_0^{l/2}\left(lx^2-x^3\right)dx$$

$$=\frac{w}{2EI}\left[\frac{1}{3}lx^3-\frac{1}{4}x^4\right]_0^{l/2}=\frac{w}{2EI}\left(\frac{1}{24}l^4-\frac{1}{64}l^4\right)=\frac{w}{2EI}\frac{8-3}{192}l^4=\frac{5wl^4}{384EI}$$

となる。

8. 不 静 定 ば り

穴埋め例題

（p.100）穴埋め例題 8.1

$$\delta_{B1} = \frac{P}{3EI}\left(\frac{2l}{3}\right)^3 + \frac{P}{2EI}\left(\frac{2l}{3}\right)^2 \frac{l}{3} = \frac{8Pl^3}{81EI} + \frac{4Pl^3}{54EI} = \frac{14Pl^3}{81EI}$$

$$\delta_{B2} = -\frac{Xl^3}{3EI}$$

変形の拘束条件は，……

よって

$$\frac{14Pl^3}{81EI} - \frac{Xl^3}{3EI} = 0$$

これから

$$X = \frac{14P}{27}$$

（p.102）穴埋め例題 8.2

$$\theta_{A1} = \frac{wl^3}{24EI}$$

$$\theta_{A2} = -\frac{Xl}{3EI}$$

変形の拘束条件は，……

よって

$$\frac{wl^3}{24EI} - \frac{Xl}{3EI} = 0$$

これから

$$X = \frac{wl^2}{8}$$

点 A 点でのモーメントの値は，$-\dfrac{wl^2}{8}$となる。そのほかの……つり合いから

$$-\frac{wl^2}{8} + \frac{wl^2}{2} - V_B l = 0$$

よって

$$V_B = \frac{3wl}{8}, \qquad V_A = \frac{5wl}{8}$$

（p.105）穴埋め例題 8.3

$$\delta_{B1} = \frac{5w(2l)^4}{384EI} = \frac{5wl^4}{24EI}$$

$$\delta_{B2} = -\frac{X(2l)^3}{48EI} = -\frac{Xl^3}{6EI}$$

…よって

$$\frac{5wl^4}{24EI} - \frac{Xl^3}{6EI} = 0$$

…これから

$$X = \frac{5wl}{4}$$

したがって，点 A，点 C での上向き支点反力は，$\frac{3wl}{8}$ となる。

左側から…のように表される。

$$Q = -wx + \frac{3wl}{8}$$

曲げモーメント M は，つぎのようになる。

$$M = -\frac{1}{2}wx^2 + \frac{3wl}{8}x$$

これは放物線であり、…として与えられる。

$$M' = -wx + \frac{3wl}{8} = 0$$

よって，$x = \frac{3l}{8}$ で極値をとり…

$$M\left(\frac{3l}{8}\right) = -\frac{1}{2}w\frac{9}{64}l^2 + \frac{3wl}{8}\frac{3}{8}l = \frac{9}{128}wl^2$$

章末問題

【8.1】 点 B の移動支点を取り除いた系を静定基本系に考える。P のみが作用したときの点 B でのたわみは

$$\delta_{B1} = \frac{Pa^3}{3EI} + \frac{Pa^2}{2EI}b = \frac{Pa^2}{6EI}(2a+3b) = \frac{Pa^2}{6EI}(3l-a)$$

X のみが作用したときの点 B でのたわみは

$$\delta_{B2} = -\frac{Xl^3}{3EI}$$

$\delta_{B1} + \delta_{B2} = 0$ より

$$\frac{Pa^2}{6EI}(3l-a) - \frac{Xl^3}{3EI} = 0$$

よって

$$X=\frac{Pa^2}{2l^3}(3l-a)$$

【8.2】　点 B の支点反力（上向き）を X とする。支点 B を取り除いた系において M のみが作用したときの点 B の変位は，下向き変位を正とすると

$$\delta_{\mathrm{B1}}=-\frac{Ml^2}{2EI}$$

である。一方，X による変位は

$$\delta_{\mathrm{B2}}=-\frac{Xl^3}{3EI}$$

である。よって，点 B での変位の拘束条件を適用して

$$\delta_{\mathrm{B}}=\delta_{\mathrm{B1}}+\delta_{\mathrm{B2}}=-\frac{Ml^2}{2EI}-\frac{Xl^3}{3EI}=0$$

を得る。よって

$$X=-\frac{3M}{2l}$$

【8.3】　両端の曲げモーメントを不静定力に選ぶ。単純ばり AB に対し，集中荷重のみが作用する系と両端の曲げモーメントのみが作用する系を考え，両者を重ね合わせたときの両端のたわみ角が 0 であるという変位の拘束条件を考慮する。

集中荷重のみが作用する系（**解図 8.1**(a)）の両端のたわみ角は

$$\theta_{\mathrm{A1}}=\theta_{\mathrm{B1}}=\frac{Pl^2}{16EI}$$

である。両端の曲げモーメントのみが作用する系（図(b)）のたわみ角は

$$\theta_{\mathrm{A2}}=\theta_{\mathrm{B2}}=\frac{Ml}{2EI}$$

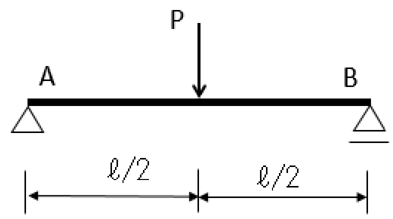
である。変位の拘束条件をあてはめると

$$\theta_{\mathrm{A}}=\theta_{\mathrm{A1}}+\theta_{\mathrm{A2}}=\frac{Pl^2}{16EI}+\frac{Ml}{2EI}=0$$

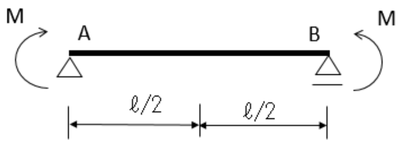
となる。よって

$$M=-\frac{Pl}{8}$$ （マイナスがついているので，仮定した向きと逆向き）

となる。鉛直反力は，両端とも上向き $\frac{P}{2}$ になる。



(a)



(b)

解図 8.1

【8.4】　両端の曲げモーメントを不静定力に選ぶ。単純ばり AB に対し，等分布荷重のみが

作用する系と両端の曲げモーメントのみが作用する系を考え，両者を重ね合わせたときの両端のたわみ角が 0 であるという変位の拘束条件を考慮する。

等分布荷重のみが作用する系（**解図 8.2**(a)）の両端のたわみ角は

$$\theta_{A1} = \theta_{B1} = \frac{wl^3}{24EI}$$

である。両端の曲げモーメントのみが作用する系（図（b)）のたわみ角は

$$\theta_{A1} = \theta_{B2} = \frac{Ml}{2EI}$$

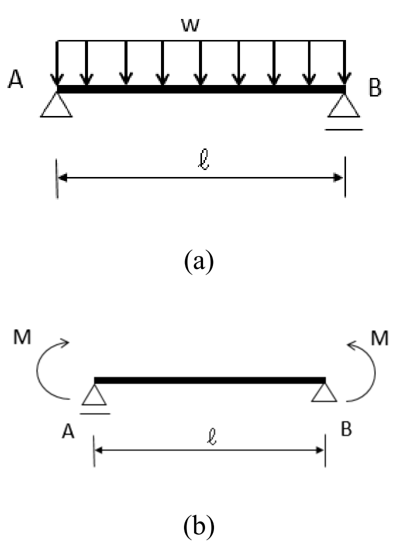
である。変位の拘束条件をあてはめると

$$\theta_A = \theta_{A1} + \theta_{A2} = \frac{wl^3}{24EI} + \frac{Ml}{2EI} = 0$$

となる。よって

$$M = -\frac{wl^2}{12}$$ （マイナスがついているので，仮定した向きと逆向き）

となる。鉛直反力は，両端とも上向き $\dfrac{wl}{2}$ になる。



解図 8.2

左端から x での曲げモーメントのつり合いを考えると

$$-\frac{wl^2}{12} + \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2} - M = 0$$

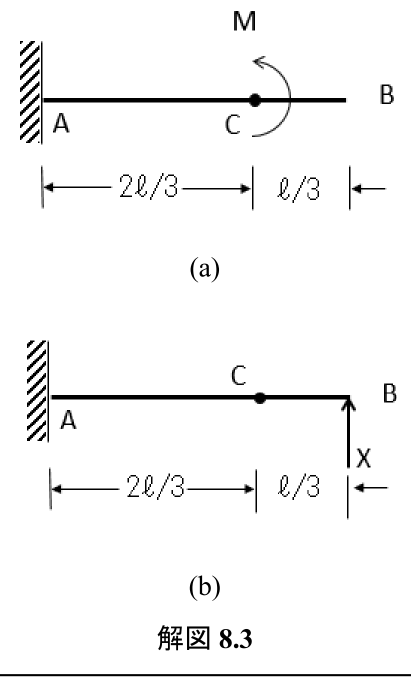
である。よって

$$M = -\frac{wl^2}{12} + \frac{wl}{2}x - \frac{wx^2}{2}$$

である。$\dfrac{dM}{dx} = \dfrac{wl}{2} - wx = 0$ より，$x = \dfrac{l}{2}$ でピーク値をとり，その値は

$$M\left(\frac{l}{2}\right) = -\frac{wl^2}{12} + \frac{wl}{2}\frac{l}{2} - \frac{w}{2}\frac{l^2}{4} = \frac{wl^2}{24}$$

【8.5】　点 B における支点反力 X を不静定力に選ぶ。まず片持ちばりに実荷重のみが作用する場合（**解図 8.3**(a)）の点 B の上向き変位 δ_{B1} を仮想仕事の原理を使って求める。仮想荷重は，点 B に上向きに 1 を載荷する。



解図 8.3

$$\delta = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx$$

を用いるにあたり，点 C から左向きに x 軸をとると

$$M(x) = M$$

である。ただし， $0 \leqq x \leqq \frac{2}{3}l$ である。また

$$\bar{M}(x) = \frac{1}{3}l + x$$

である。

よって

$$\delta_{\mathrm{B1}} = \int_0^l \frac{M\bar{M}}{EI} dx = \frac{I}{EI}\int_0^{2l/3} M\left(\frac{1}{3}l + x\right) dx = \frac{M}{EI}\left[\frac{l}{3}x + \frac{1}{2}x^2\right]_0^{2l/3} = \frac{4Ml^2}{9EI}$$

となる。一方，片持ちばりに X のみが作用した場合（図 (b)）の点 B での変位は

$$\delta_{\mathrm{B2}} = \frac{Xl^3}{3EI}$$

となる。これに変位の拘束条件を適用すると

$$\delta_{\mathrm{B}} = \delta_{\mathrm{B1}} + \delta_{\mathrm{B2}} = \frac{4Ml^2}{9EI} + \frac{Xl^3}{3EI} = 0$$

となる。よって

$$X = -\frac{4M}{3l}$$

9. 不静定トラス

穴埋め例題

（p.112）穴埋め例題 9.1

$m = 37$， $j = 20$ であり， $m + 3 = 2j$ を満足するが，…

（p.112）穴埋め例題 9.2

$m = 10$ ， $j = 6$ ， $m + 3 - 2j = 1$ となり…

（p.114）穴埋め例題 9.3

表 9.1　計算結果のまとめ

部材	l	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	$S_1 X_1$	S
1	5	-5	5	-125	125	3.140	0.080
2	6	3	-3	-54	54	-1.884	-0.048
3	5	5	-5	-125	125	-3.140	-0.080
4	6	-6	6	-216	216	3.768	0.096
5	5	-5	5	-125	125	3.140	0.080
6	6	9	-9	-486	486	-5.652	-0.144
7	5	5	-5	-125	125	-3.140	-0.080
8	6	-12	12	-864	864	7.536	0.192
9	5	-5	-5	125	125	-3.140	-0.705
10	6	15	-9	-810	486	-5.652	0.231
11	5	5	5	125	125	3.140	0.705
12	6	-18	6	-648	216	3.768	-0.654
13	5	15	-5	-375	125	-3.140	0.545
14	6	9	-3	-162	54	-1.884	0.327
15	5	-15	5	-375	125	3.140	-0.545
Σ	—	—	—	-4240	3376	—	—
単位	m	P / 16	1 / 8	P / 128EA	1 / 64EA	P / 8	P

$$R_{\mathrm{B}} = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(-4240\times\frac{P}{128EA}\right)}{3376\times\left(\frac{1}{64EA}\right)} = \frac{265}{422}P = 0.628P$$

（p.116）穴埋め例題 9.4

表 9.2　計算結果のまとめ

部材	l	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	$S_1 X_1$	S
1	5	-5	5	-125	125	6.280	-0.465
2	6	3	-3	-54	54	-3.768	0.279
3	5	5	-5	-125	125	-6.280	0.465
4	6	-6	6	-216	216	7.536	-0.558
5	5	0	5	0	125	6.280	0.785
6	6	6	-9	-324	486	-11.303	0.087
7	5	0	-5	0	125	-6.280	-0.785
8	6	-6	12	-432	864	15.071	0.384
9	5	0	-5	0	125	-6.280	-0.785
10	6	6	-9	-324	486	-11.303	0.087
11	5	0	5	0	125	6.280	0.785
12	6	-6	6	-216	216	7.536	-0.558
13	5	5	-5	-125	125	-6.280	0.465
14	6	3	-3	-54	54	-3.768	0.279
15	5	-5	5	-125	125	6.280	-0.465
Σ	—	—	—	-2120	3376	—	—
単位	m	$P/4$	$1/8$	$P/32EA$	$1/64EA$	$P/8$	P

$$R_{\mathrm{B}} = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(-2120 \times \frac{P}{32EA}\right)}{3376 \times \left(\frac{1}{64EA}\right)} = \frac{265}{211}P = 1.256P$$

（p.117）穴埋め例題 9.5

表 9.3　計算結果のまとめ

部材	ρ	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	$S_1 X_1$	S
1	1	0	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$
2	1	-1	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$
3	1	-1	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	$1/2$	$-1/2$
4	1	0	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/2$	$1/2$	$1/2$
5	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	2	$\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$
6	$\sqrt{2}$	—	1	—	$\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$
Σ	—	—	—	$2+\sqrt{2}$	$2(1+\sqrt{2})$	—	—
単位	a/EA	P	—	Pl/EA	l/EA	P	P

$$S_6 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{2+\sqrt{2}}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}P = -\frac{P}{\sqrt{2}}$$

（p.119）穴埋め例題 9.6

表 9.4　計算結果のまとめ

部材	ρ	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	$S_1 X_1$	S
1	1	0	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/2$	0.603	0.603
2	1	-1	$-1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{2}$	$1/2$	0.603	-0.397
3	1	-2	$-1/\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	$1/2$	0.603	-1.397
4	1	0	$-1/\sqrt{2}$	0	$1/2$	0.603	0.603
5	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	1	2	$\sqrt{2}$	-0.854	0.560
6	$\sqrt{2}$	—	1	0	$\sqrt{2}$	-0.854	-0.854
Σ	—	—	—	$(4+\sqrt{3})/2$	$2+2\sqrt{2}$	—	—
単位	a/EA	P	—	Pl/EA	l/EA	P	P

$$S_6 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(4+3\sqrt{2}\right)/2}{2\left(1+\sqrt{2}\right)}P = -0.854\,P$$

(p.121) 穴埋め例題 **9.7**

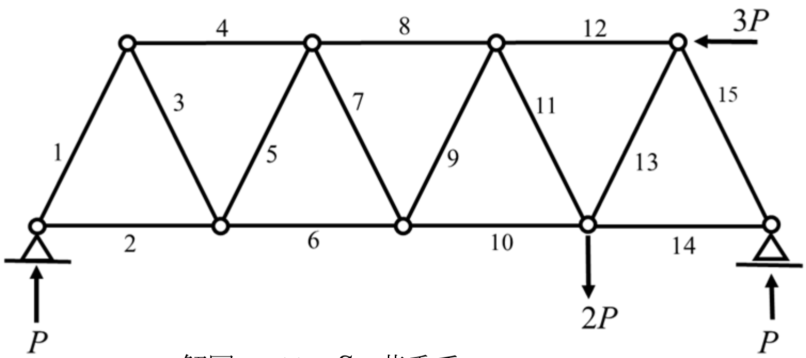
表 9.5　計算結果のまとめ

部材	l	A	ρ	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	$S_1 X_1$	S
1 2 3	$3\sqrt{2}$ 3 5	$3\sqrt{2}$ 3 5	1 1 1	$3\sqrt{2}/7$ — -5/7	$-4\sqrt{2}/7$ 1 -5/7	-24/ 49 — 25 / 49	32 / 49 1 25 / 49	$2\sqrt{2}/371$ -1 / 106 5 / 742	$23\sqrt{2}/53$ -1 / 106 -75 / 106
Σ	—	—	—	—	—	1 / 49	106 / 49	—	—
単位	m	A	m/EA	P	—	P/EA	$1/EA$	P	P

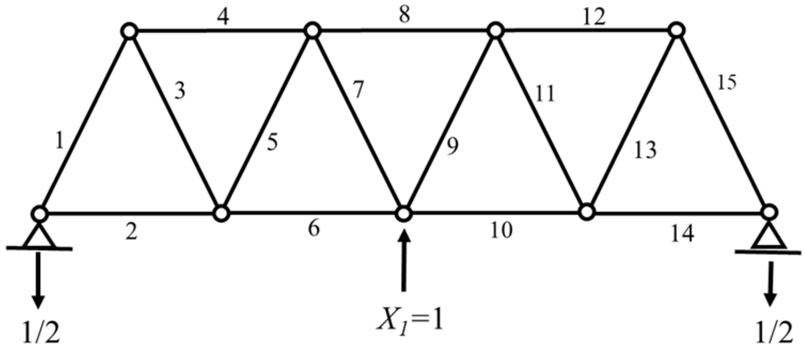
$$S_2 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{1/49}{106/49}P = -\frac{P}{106}$$

章末問題

【9.1】　点 B の支点を外して静定基本形とし，**解図 9.1**(a) に示すように外力を作用させる (S_0 荷重系)。これとは別に、静定基本系に図(b) に示すように単位不静定力 X_1=1 を点 B に作用させる (S_1 荷重系)。これら二つの系における部材力を 4.3 節で学習した節点法もしくは断面法で求める。



解図 9.1(a)　S_0 荷重系



解図 9.1(b)　S_1 荷重系

これらの部材力および式（9.4）により求められるδ_{10}とδ_{11}を解表 9.1 に記入する。
そして，式（9.6）より不静定力 X_1 が求められる。

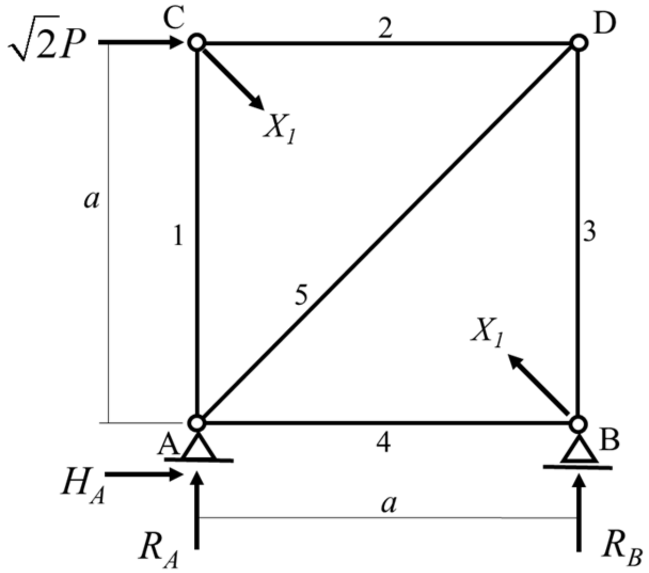
$$R_{\mathrm{B}} = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{\left(-1796 \times \dfrac{P}{32EA}\right)}{3376 \times \left(\dfrac{1}{64EA}\right)} = \frac{449}{422}P = 1.064P$$

さらに、式（9.7）より部材力が**解表 9.1** に示すように求められる。

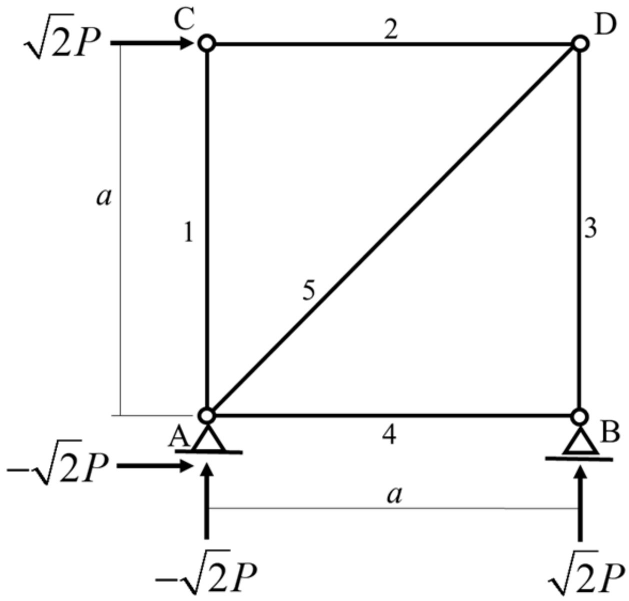
解表 9.1　計算結果のまとめ

部材	l	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	S_1X_1	S
1	5	-5	5	-125	125	-5.320	-1.915
2	6	3	-3	-54	54	3.192	1.149
3	5	5	-5	-125	125	5.320	1.915
4	6	-6	6	-216	216	-6.384	-2.298
5	5	-5	5	-125	125	-5.320	-1.915
6	6	9	-9	-486	486	9.576	3.447
7	5	5	-5	-125	125	5.320	1.915
8	6	-12	12	-864	864	-12.768	-4.596
9	5	-5	-5	125	125	5.320	-0.585
10	6	-15	-9	810	486	9.576	-2.553
11	5	5	5	125	125	-5.320	0.585
12	6	-12	6	-432	216	-6.384	-3.798
13	5	5	-5	-125	125	5.320	1.915
14	6	3	-3	-54	54	3.192	1.149
15	5	-5	5	-125	125	-5.320	-1.915
Σ				-1796	3376		
単位	m	$P/4$	$1/8$	$P/32$	$1/64$	$P/8$	P

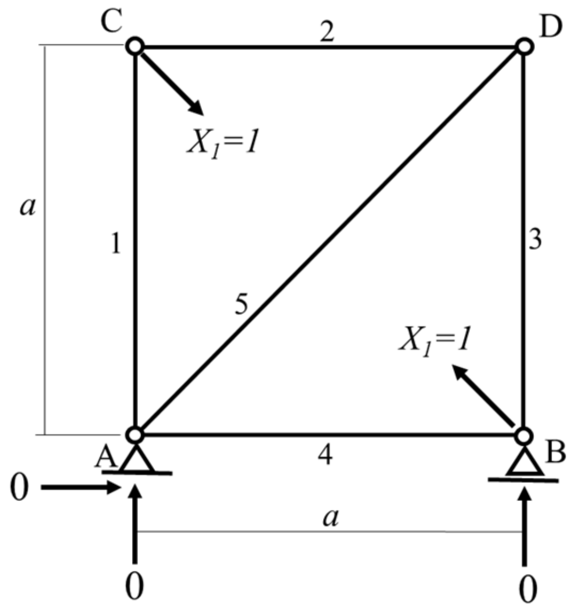
【9.2】　**解図 9.2**(a) に示すように部材 BC を切断したトラスを静定基本系とする。図(b) に示すように S_0 荷重系に外力を作用させる場合と, 図(c) に示すように S_1 荷重系に単位不静定力 $X_1 = 1$ を点 B に作用させる場合の部材力を 4.3 節で学習した節点法もしくは断面法で求める。これらの部材力および式（9.13）により求められるδ_{10}とδ_{11}を**解表 9.2** に記入する。



解図 9.2(a)　静定基本系



解図 9.2(b)　S_0 荷重系



解図 9.2(c)　S_1 荷重系

そして、式（9.6）より不静定力 X_1 が求められる。

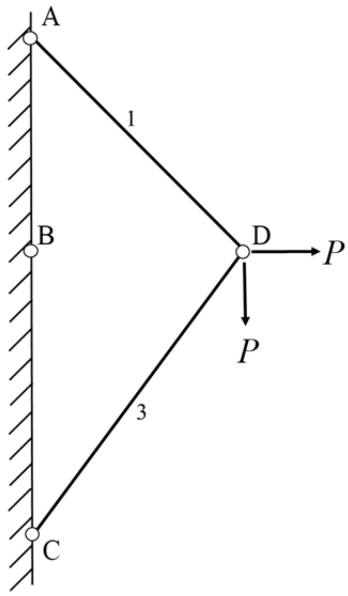
$$S_6 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{2+2\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}P = -P$$

さらに、式（9.14）より部材力が解表 9.2 に示すように求められる。

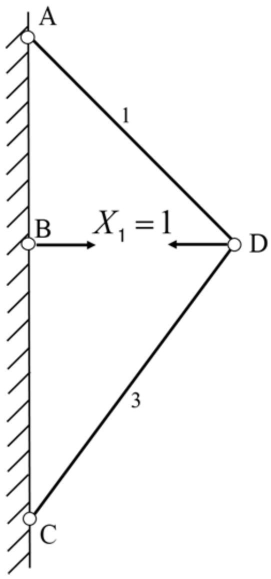
解表 9.2　計算結果のまとめ

部材	ρ	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	S_1X_1	S
1	1	0	$-1/\sqrt{2}$	0	1/2	0.707	0.707
2	1	$-\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1	1/2	0.707	-0.707
3	1	$-\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	1	1/2	0.707	-0.707
4	1	0	$-1/\sqrt{2}$	0	1/2	0.707	0.707
5	$\sqrt{2}$	2	1	$2\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$	-1.000	1.000
6	$\sqrt{2}$	—	1	0	$\sqrt{2}$	-1.000	-1.000
Σ				$2+2\sqrt{2}$	$2+2\sqrt{2}$		
単位	a/EA	P		Pl/EA	l/EA	P	P

【9.3】　部材 BD を切断したトラスを静定基本系とし，**解図 9.3**(a) に示すように S_0 荷重系に外力を作用させる場合と，図(b) に示すように S_1 荷重系に単位不静定力 $X_1 = 1$ を点 B に作用させる場合の部材力を 4.3 節で学習した節点法もしくは断面法で求める。これらの部材力および式（9.13）により求められる δ_{10} と δ_{11} を**解表 9.3** に記入する。



解図 9.3(a)　S_0 荷重系



解図 9.3(b)　S_1 荷重系

解表 9.3　計算結果のまとめ

部材	l	A	ρ	S_0	S_1	δ_{10}	δ_{11}	$S_1 X_1$	S
1	$3\sqrt{2}$	$3\sqrt{2}$	1	$\sqrt{2}$	$-4\sqrt{2}/7$	-8/7	32/49	-0.427	0.987
2	3	3	1	—	1	0	1	0.528	0.528
3	5	5	1	0	-5/7	0	25/49	-0.377	-0.377
Σ						-8/7	106/49		
単位	m		$1/EA$	P		P/EA	$1/EA$	P	P

そして，式（9.6）より不静定力 X_1 が求められる。

$$S_2 = X_1 = -\frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\frac{-8/7}{106/49}P = 0.528P$$

さらに，式（9.14）より部材力が解表 9.3 に示すように求められる。

10.　長 柱 と 短 柱

穴埋め例題

（p.128）穴埋め例題 10.1

$$P_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 EI}{l^2} = \frac{\pi^2 200\times10^9\cdot134\times0.01^4}{3^2} = 294\ 000\ \mathrm{N}$$

相当細長比は，$\frac{l}{i} = \frac{300}{2.24} = 134$

座屈応力は$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{\pi^2 E}{(l/i)^2} = \frac{\pi^2 200\times10^9}{(134)^2}\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}^2} = 110\mathrm{MPa}$

$$\sigma_{\mathrm{cr}} = \frac{P_{\mathrm{cr}}}{A} = \frac{337000}{26.67\times0.01^2} = 126\ \mathrm{MPa}$$

（p.132）穴埋め例題 10.2

$\downarrow \sum V = 400\mathrm{kN}$

$\rightarrow \sum H = 50\mathrm{kN}$

$\circlearrowleft \sum M_0 = 400\times1.5 + 50\times2 = 700\mathrm{kN\cdot m}$

$x \cdot \sum V = \sum M_0$　　　$x = 1.75\ \mathrm{m}$（安定）

$y \cdot \sum H = \sum M_0$　　　$y = 14.0\ \mathrm{m}$

章末問題

【10.1】　$P_{\rm cr}=\pi^2\,EI/(2l)^2=\pi^2 200\times10^9\cdot134\times0.01^4/(2\times2)^2=165000$ N

相当細長比は$2l/i=2\times200/2.24=179$

座屈応力は$\delta_{\rm cr}=\frac{\pi^2E}{(2l/i)^2}=\frac{\pi^2 200\times10^9}{179^2}[{\rm N/m^2}]=62.0$ MPa

または、H 型鋼材(100×100)の標準寸法から、断面積 A=26.67 cm² とすると

$$\sigma_{\rm cr}=\frac{P_{\rm cr}}{A}=165000/(26.67\times(0.01)^2)=62.0{\rm MPa}$$

【10.2】　$P_{\rm cr}=\pi^2EI/(2l)^2=\pi^2 200\times10^9\cdot134\times0.01^4/(0.5\times5)^2=423000$ N

相当細長比は $0.5l/i=0.5\times500/2.24=112$

座屈応力は$\sigma_{\rm cr}=\frac{\pi^2E}{(0.5l/i)^2}=\frac{\pi^2 200\times10^9}{112^2}\frac{\rm N}{\rm m^2}=157$ MPa

または，H 型鋼材(100×100)の標準寸法から、断面積 A=26.67 cm² とすると

$$\sigma_{\rm cr}=\frac{P_{\rm cr}}{A}=423000/(26.67\times(0.01)^2)=158\ {\rm MPa}$$

【10.3】　短柱の断面 2 次モーメント:　$I_x=\dfrac{\pi R^4}{4}$

短柱に作用するモーメント：　$M=\ P\times e$

点 A の Mによる応力　　　：$\sigma_{\rm A}=\frac{M}{I}R=\frac{P_e}{\frac{\pi R^4}{4}}R=\frac{4Pe}{\pi R^3}$

断面全体に作用する圧縮応力：$\sigma_{\rm C}=P/\pi R^2$

点 A に作用する全応力：$\sigma=\sigma_{\rm A}+\sigma_{\rm C}=-\dfrac{4Pe}{\pi R^3}+\dfrac{P}{\pi R^2}$

引張側の応力$\sigma=0$になるための e の距離：　$e=\dfrac{R}{4}=\dfrac{D}{8}$

【10.4】　$\downarrow\sum V=1030$ kN

$\rightarrow\sum H=\ 40$ kN

$\circlearrowleft+\sum M_0=\ 1625$ kNm

$x\cdot\sum V=\sum M_0$　　　　　　$x=1.63$ m（安定）

$y\cdot\sum H=\sum M_0$　　　　　　$y=40.6$ m

穴埋め例題

（p.137）穴埋め例題 11.1

$$0 = \frac{4EI}{l}\theta_A - \frac{ql^2}{12}$$

$$M_{BA} = \frac{2EI}{l}\theta_A + \frac{ql^2}{12}$$

上式を解くと，　$\theta_A = \frac{ql^3}{48EI}$ および $M_{BA} = \frac{ql^2}{8}$ を…

$\circlearrowright + \sum M = 0$ at 点 A

$$ql\frac{1}{2} - V_B l - \frac{ql^2}{8} = 0 \Rightarrow V_B = \frac{3ql}{8}$$

$$+\uparrow \sum V = V_B - ql + V_A = 0 \Rightarrow V_A = \frac{5ql}{8}$$

図 11.6 に Q 図と M 図を示す。

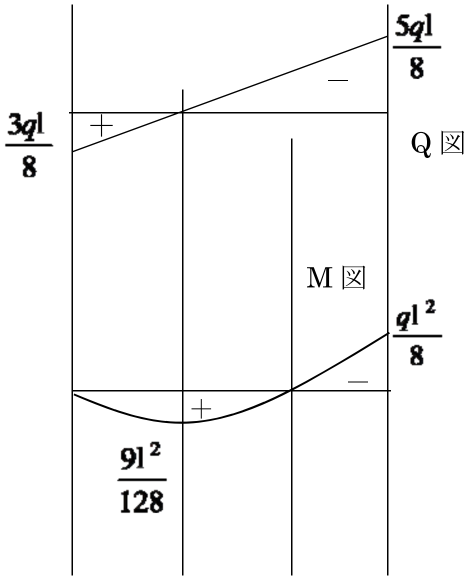


図 11.6　穴埋め例題 11.1 の Q 図と M 図

（p.140）穴埋め例題 11.2

$$\begin{cases} M_{AB} = (2\varphi_A + \varphi_B) \\ M_{BA} = (\varphi_A + 2\varphi_B) \end{cases} \text{および} \quad \begin{cases} M_{BC} = (2\varphi_B + \varphi_C) - \frac{ql^2}{12} \\ M_{CB} = (\varphi_B + 2\varphi_C) + \frac{ql^2}{12} \end{cases}$$

$$\begin{cases} (2\varphi_A + \varphi_B) = 0 \\ (\varphi_A + 2\varphi_B) + (2\varphi_B + \varphi_C) - \frac{ql^2}{12} = 0 \\ (\varphi_B + 2\varphi_C) + \frac{ql^2}{12} = 0 \end{cases} \Rightarrow \varphi_A = -\frac{ql^2}{48}, \varphi_B = \frac{ql^2}{24}, \varphi_C = -\frac{ql^2}{16}$$

$M_{BA} = 0.0625ql^2$　　および　$M_{BC} = -0.0625ql^2$

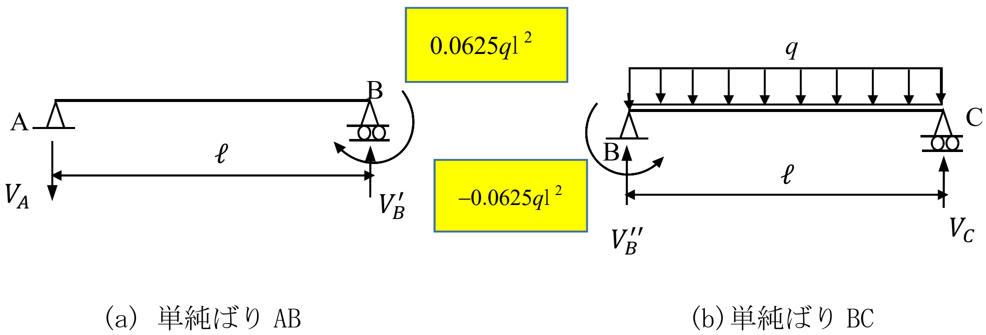


図 11.11　はり AB と BC

（はり AB のつり合い）

$\curvearrowright^{+}\sum M = 0$ at 点 B

$V_{\mathrm{A}} \times l + \frac{1}{16} q l^2 = 0 \Rightarrow V_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{16} q l$

$$+\uparrow \sum V = -V_{\mathrm{A}} + V'_{\mathrm{B}} = 0 \Rightarrow V'_{\mathrm{B}} = \frac{1}{16} q l$$

（はり BC のつり合い）

$\curvearrowright^{+}\sum M = 0$ at 点 B

$-\frac{1}{16} q l^2 + q l \times \frac{l}{2} - V_{\mathrm{c}} \times l = 0 \Rightarrow V_{\mathrm{C}} = \frac{7}{16} q l$

$$+\uparrow \sum V = V''_{\mathrm{B}} + V_{\mathrm{C}} = 0 \Rightarrow V''_{\mathrm{B}} = \frac{9}{16} q l$$

結局，$V_{\mathrm{B}} = V'_{\mathrm{B}} + V''_{\mathrm{B}} = \frac{1}{16} q l + \frac{9}{16} q l = \frac{10}{16} q l$

を考慮すると，Q 図と M 図は図 11.12 のように描くことができる。

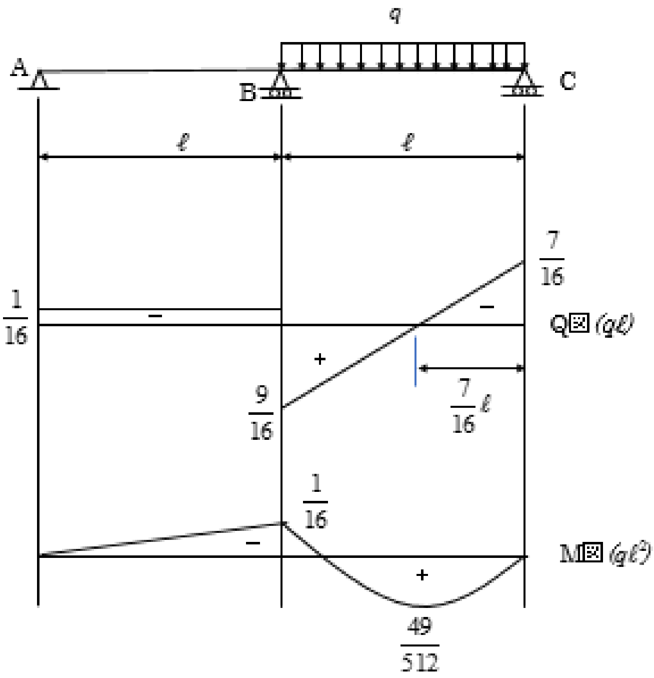


図 11.12　穴埋め例題 11.2 の Q 図と M 図

（p.144）**穴埋め例題 11.3**

いま，基準剛度を K_0 として，図に示す断面二次モーメントと部材長から剛比を求めると次式のようになる。

$$K_0 = K_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{CD}} = \frac{I}{3} \qquad K_{\mathrm{BC}} = \frac{I}{2}$$

$$k_{\mathrm{AB}} = \frac{K_{\mathrm{AB}}}{K_0} = \frac{K_{\mathrm{CD}}}{K_0} = 1 \qquad k_{\mathrm{BC}} = \frac{K_{\mathrm{BD}}}{K_0} = 1.5$$

これらの剛比および部材 BC の荷重項$C_{\mathrm{BC}} = -Pl/8 = -\frac{2}{8}$, $C_{\mathrm{CB}} = Pl/8 = \frac{2}{8}$　および固定端 $\varphi_{\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{D}} = 0$を考慮し、対称性から$\varphi_{\mathrm{B}} = -\varphi_{\mathrm{C}}$とすると各部材のたわみ角法による式は次式のように書くことができる。

<u>部材 AB</u>　$\varphi_{\mathrm{A}} = 0$

$$\begin{cases} M_{\mathrm{AB}} = k_{\mathrm{AB}}(\varphi_{\mathrm{B}}) = \varphi_{\mathrm{B}} \\ M_{\mathrm{BA}} = k_{\mathrm{AB}}(2\varphi_{\mathrm{B}}) = 2\varphi_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

<u>部材 BC</u>　$\varphi_{\mathrm{B}} = -\varphi_{\mathrm{C}}$

$$\begin{cases} M_{\mathrm{BC}} = k_{\mathrm{BC}}(2\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{C}}) + C_{\mathrm{BC}} = 1.5(2\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{C}}) - \frac{1}{4} = 1.5\varphi_{\mathrm{B}} - \frac{1}{4} \\ M_{\mathrm{CB}} = k_{\mathrm{BC}}(\varphi_{\mathrm{B}} + 2\varphi_{c}) + C_{\mathrm{BC}} = -1.5\varphi_{\mathrm{B}} + \frac{1}{4} \end{cases}$$

ここで、点 C の節点方程式：$M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} = 0$より

$$2\varphi_{\mathrm{B}} + 1.5\varphi_{\mathrm{B}} - \frac{1}{4} = 3.5\varphi_{\mathrm{B}} - \frac{1}{4} = 0$$

となる。これらを解くと

$$\varphi_{\mathrm{B}} = 0.0714, \qquad \varphi_{\mathrm{C}} = -0.0714$$

となり、それぞれの部材に作用する端モーメントは次式のように求まる。

$$M_{\mathrm{AB}} = -M_{\mathrm{DC}} = 0.0714\mathrm{kN \cdot m} \qquad M_{\mathrm{BC}} = -M_{\mathrm{CB}} = -0.143\mathrm{kN \cdot m}$$

$$M_{\mathrm{BA}} = -M_{\mathrm{CD}} = 0.143\mathrm{kN \cdot m}$$

また，部材 BC 中点のモーメント $M_{\max}$ は，図 11. 18 を参考にすると次式のように求めることができる。

$$\circlearrowright + \quad \sum M = 0 \text{ at 点 C:}$$

$$-0.143 + 0.143 + Q_{\mathrm{BC}} \times 2 - 1 \times 1 = 0$$

$$\Rightarrow Q_{\mathrm{BC}} = 0.5\mathrm{kN}$$

$$M_{\max} = -0.143 + Q_{\mathrm{BC}} \times 1 = 0.375\mathrm{kN \cdot m}$$

ここで、図 11. 19 に M 図を示す。

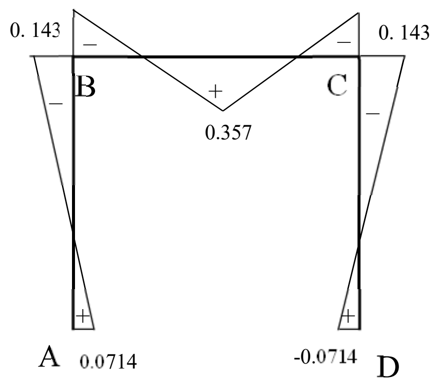


図 11.19　穴埋め例題 11.3 の M 図

（p.146）穴埋め例題 11.4

いま，基準剛度 K_0 として，図に示す断面二次モーメントと部材長から剛比を求めると次式のようになる。

$$K_0 = K_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{BC}} = K_{\mathrm{CD}} = \frac{I}{4}$$

$$k = \frac{K_{\mathrm{AB}}}{K_0} = \frac{K_{\mathrm{BC}}}{K_0} = \frac{K_{\mathrm{CD}}}{K_0} = 1$$

これらの剛比および部材 BC の荷重項$C_{\mathrm{BC}} = -\frac{ql^2}{12} = -\frac{8}{3}$, $C_{\mathrm{CB}} = \frac{ql^2}{12} = \frac{8}{3}$ およびヒンジ端 $M_{\mathrm{AB}} = M_{\mathrm{DC}} = 0$ を考慮し、対称性から$\varphi_{\mathrm{B}} = -\varphi_{\mathrm{C}}$とすると各部材のたわみ角法による式は次式のように書くことができる。

部材 AB　($M_{AB} = 0$)

$$\begin{cases} M_{AB} = 2\varphi_A + \varphi_B = 0 \\ M_{BA} = \varphi_A + 2\varphi_B = 1.5\varphi_B \end{cases} \Rightarrow \quad \varphi_A = -0.5\varphi_B$$

部材 BC（$\varphi_B = -\varphi_C$）

$$\begin{cases} M_{BC} = (2\varphi_B + \varphi_C) - \frac{8}{3} = \varphi_B - \frac{8}{3} \\ M_{CB} = (\varphi_B + 2\varphi_C) + \frac{8}{3} = -\varphi_B + \frac{8}{3} \end{cases}$$

ここで、点 C の節点方程式：$M_{BA} + M_{BC} = 0$より

$1.5\varphi_B + \varphi_B - \frac{8}{3} = 0 \Rightarrow \varphi_B = 1.067$ および　$\varphi_C = -1.067$ となる。これらから、それぞれの部材に作用する端モーメントは次式のよう求められる。

$M_{AB} = 0$

$M_{BC} = -M_{CB} = -1.6\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{BA} = -M_{CD} = 1.6\text{kN}\cdot\text{m}$

$M_{DC} = 0$

また、部材 BC 中点のモーメントは図 11.21 を参考にすると次式のように求められる。

$\overset{\curvearrowright}{+}\sum M = 0$ at 点 C = 0：

$-1.6 + 1.6 + Q_{BC} \times 4 - 8 \times 2 = 0$

$Q_{BC} = 4\text{kN}$

となるので、部材 BC の中点で生じる最大モーメント M_{max} は次式のようになる。

$M_{max} = -1.6 + Q_{BC} \times 2 - 2 \times 2 \times 1 = 2.4\text{kN}\cdot\text{m}$

図 11.22 に M 図を示す。

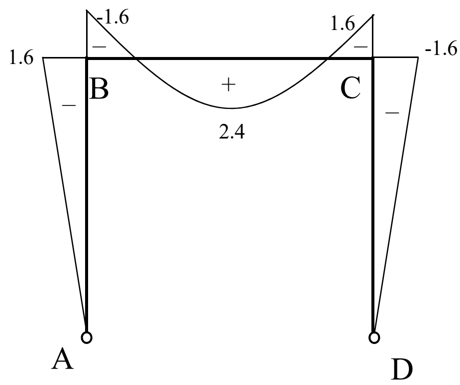


図 11. 22　穴埋め例題 11. 4 の M図

（p.151）穴埋め例題　11.5

式 (11.23) を使って各部材の端部に生じるモーメントは次式のように求めることができる。ここで，すべての部材の長さと断面 2 次モーメントは同じなので剛比 $k_{ij} = 0$，またすべての部材に荷重載荷はないので $C_{ij} = 0$，および点 A および点 F では $\varphi_i = 0$ である。

$$\begin{cases} M_{AB} = -6 \\ M_{BA} = -4 \end{cases} \begin{cases} M_{DE} = 3 \\ M_{ED} = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{BC} = -2 \\ M_{CB} = -3 \end{cases} \begin{cases} M_{EF} = -4 \\ M_{FE} = -6 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{CD} = 3 \\ M_{DC} = 3 \end{cases} \begin{cases} M_{BE} = 6 \\ M_{EB} = 6 \end{cases} \quad (\text{kN}\cdot\text{m})$$

$$\begin{cases} M_{\mathrm{DE}} = 2\varphi_{\mathrm{D}} + \varphi_{\mathrm{E}} + \psi_2 \\ M_{\mathrm{ED}} = \varphi_{\mathrm{D}} + 2\varphi_{\mathrm{E}} + \psi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{\mathrm{BC}} = 2\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{C}} + \psi_2 \\ M_{\mathrm{CB}} = \varphi_{\mathrm{B}} + 2\varphi_{\mathrm{C}} + \psi_2 \end{cases} \quad \begin{cases} M_{\mathrm{EF}} = 2\varphi_{\mathrm{E}} + \psi_1 \\ M_{\mathrm{FE}} = \varphi_{\mathrm{E}} + \psi_1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} M_{\mathrm{CD}} = 2\varphi_{\mathrm{C}} + \varphi_{\mathrm{D}} \\ M_{\mathrm{DC}} = \varphi_{\mathrm{C}} + 2\varphi_{\mathrm{D}} \end{cases} \quad \begin{cases} M_{\mathrm{BE}} = 2\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{E}} \\ M_{\mathrm{EB}} = \varphi_{\mathrm{B}} + 2\varphi_{\mathrm{E}} \end{cases}$$

つぎに、点 B，C，D，E での節点方程式は次式のように書くことができる。

$\sum M = 0$ at 点 B ; $M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} + M_{\mathrm{BE}} = 0$

$\sum M = 0$ at 点 C ; $M_{\mathrm{CB}} + M_{\mathrm{CD}} = 0$

$\sum M = 0$ at 点 D ; $M_{\mathrm{DC}} + M_{\mathrm{DE}} = 0$

$\sum M = 0$ at 点 E ; $M_{\mathrm{ED}} + M_{\mathrm{EB}} + M_{\mathrm{EF}} = 0$

最後に層方程式を図 11.29 と図 11.30 を参照して求める。まず，図 11.29 を参照すると 1 層目の水平方向のつり合いは次式のようになる。

$$\rightarrow + \sum H = 0;\ \ 5 + 5 - Q_{\mathrm{AB}} - Q_{\mathrm{FE}} = 0$$

このQ_{AB}とQ_{FE}は図 11.26 (a) を参考にして求めると，1 層目の層方程式として次式を得ることができる。

$$10 + \frac{M_{\mathrm{AB}} + M_{\mathrm{BA}}}{2} + \frac{M_{\mathrm{EF}} + M_{\mathrm{FE}}}{2} = 0$$

また，2 層目の水平方向のつり合いは，図 11.30 を参考にすると次式のようになる。

$$\rightarrow + \sum H = 0;\ \ 5 - Q_{\mathrm{BC}} - Q_{\mathrm{ED}} = 0$$

このQ_{BC}とQ_{ED}は図 11.26 (a) を参考にして求めると 2 層目の層方程式として次式を得ることができる。

$$5 + \frac{M_{\mathrm{BC}} + M_{\mathrm{CB}}}{2} + \frac{M_{\mathrm{ED}} + M_{\mathrm{DE}}}{2} = 0$$

結局，端モーメントの式，節点方程式および層方程式をまとめると未知数が 6 個の連立方程式が次式のように求めることができる。

$$\begin{bmatrix} 6 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 4 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 6 & 1 & 1 \\ 1.5 & 0 & 0 & 1.5 & 2 & 0 \\ 1.5 & 1.5 & 1.5 & 1.5 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{\mathrm{B}} \\ \varphi_{\mathrm{C}} \\ \varphi_{\mathrm{D}} \\ \varphi_{\mathrm{E}} \\ \psi_1 \\ \psi_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -10 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

この連立方程式を解くと 6 個の未知数は次式のように求めることができる。

$$\varphi_{\mathrm{B}} = 2 \quad \varphi_{\mathrm{C}} = 1 \quad \varphi_{\mathrm{D}} = 1 \quad \varphi_{\mathrm{E}} = 2$$

$$\psi_1 = -8 \quad \psi_2 = -7$$

これらを端モーメントの式に代入し、モーメント図を描くと図 11.31 のようになる。

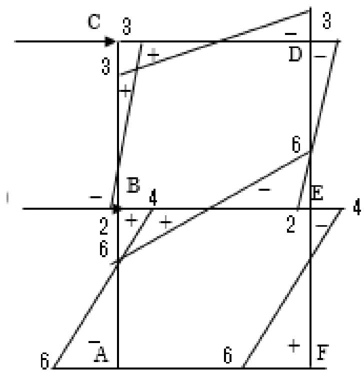


図 11.31　穴埋め例題 11.5 の M 図

章末問題

たわみ角法の計算では，時計回りの端モーメントがプラス方向である。これを図化する場合には，部材に作用する下曲げのモーメントがプラスである。計算上の符号と材料が受ける下曲げや上曲げの方向とは異なる。部材の計算には，部材座標系として，AB 方向，BC 方向，CD 方向などが x軸 のプラス方向で部材座標の原点は ABC 順で，それぞれ点 A、B および C である。y 座標は原点から下向きにしてある。

【11.1】 剛比 k の計算

$$K_0 = K_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{BC}} = I/4$$

$$k_{\mathrm{AB}} = k_{\mathrm{BC}} = K_{\mathrm{AB}}/K_0 = K_{\mathrm{BC}}/K_0 = 1$$

$\varphi_{\mathrm{A}} = 0, \varphi_{\mathrm{C}} = 0$を考慮して，部材 AB および部材 BC の端モーメントを求めると次式のようになる。

（部材 AB）

$$M_{\mathrm{AB}} = \varphi_{\mathrm{B}} - Pl / 8 = \varphi_{\mathrm{B}} - 10$$

$$M_{\mathrm{BA}} = 2\,\varphi_{\mathrm{B}} - Pl / 8 = 2\,\varphi_{\mathrm{B}} + 10$$

（部材 BC）

$$M_{\mathrm{BC}} = 2\,\varphi_{\mathrm{B}} - ql^2 / 12 = 2\,\varphi_{\mathrm{B}} - 20 / 3$$

$$M_{\mathrm{CB}} = \varphi_{\mathrm{B}} - ql^2 / 12 = \varphi_{\mathrm{B}} + 20 / 3$$

ここで，点 B での節点方程式を作成してφ_{B}を求めると次式のようになる。

$$M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} = 0$$

$$4\varphi_{\mathrm{B}} + 10 - 10 - 20/3 = 0 \Rightarrow \varphi_{\mathrm{B}} = -5/6$$

このφ_{B}を端モーメントの式に代入すると次式のようにこのモーメントを求めることができる。

（部材 AB）

$M_{\mathrm{AB}} = -10.83$ kN･m

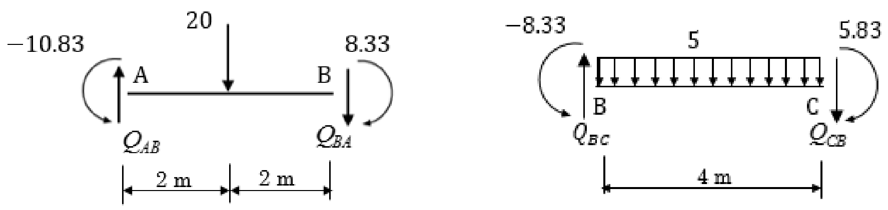
$M_{\mathrm{BA}} = 8.333$ kN･m

（部材 BC）

$M_{\mathrm{BC}} = -\,8.333$ kN･m

$M_{\mathrm{CB}} = 5.833$ kN･m

端部のせん断力は**解図 11.1** に示す各部材の物体図を参考にして求めると，つぎのような手順で求まる。



(a)　　　　(b)

解図 11.1　各部材の物体図

部材 AB

$\sum M = 0\ at$ 点B: $-10.83 + 8.33 + 4Q_{\mathrm{AB}} - 2 \times 20 = 0$ より$Q_{\mathrm{AB}} = 10.63$kN

$\sum V = 0$： $-Q_{\mathrm{BA}} - 20 + Q_{\mathrm{AB}} = 0$ より$Q_{\mathrm{BA}} = -9.38$kN

部材 AB の中点（20 kN 作用点）でのモーメント

：$M_{20} = -10.83 + 10.63 \times 2 = 10.43$ kN・m

部材 BC

$\sum M = 0\ at$ 点 C: $-8.333 + 5.833 + 4Q_{\mathrm{BC}} - 2 \times 20 = 0$ より$Q_{\mathrm{BC}} = 10.63$ kN

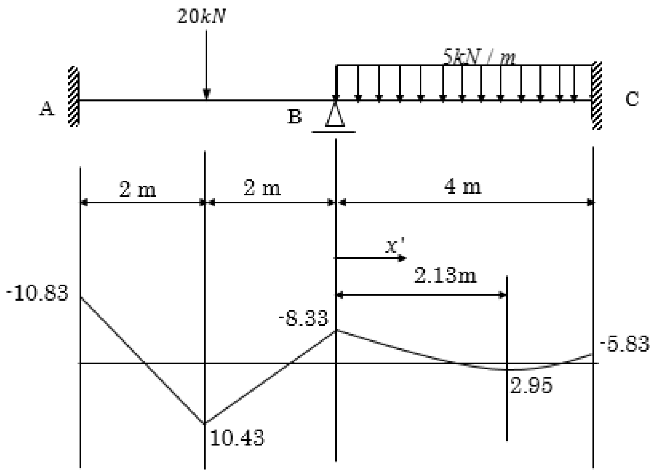
$Q_{\mathrm{CB}} = -9.38$ kN

部材 BC の位置x'におけるモーメント：$M_{x'} = -2.5x'^2 + 10.63x' - 8.33$

部材 CD の$M_{\max}$位置は$Q_{x'} = dM_{x'}/dx' = 0$：$x' = 2.13$で生じるから、$M_{\max}$は次式となる。

$$M_{\max} = -2.5(2.13)^2 + 10.62(2.13) - 8.33 = 2.95$$

M図を解図 11.2 に示す。



解図 11.2　M図（単位 kN･m）

【11.2】

剛比kの計算

$K_0 = K_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{CD}} = I/6, K_{\mathrm{BC}} = I/4$

$k_{\mathrm{AB}} = 1,\ k_{\mathrm{BC}} = 3/2$

$M_{\mathrm{AB}} = 0,\ \varphi_{\mathrm{C}} = 0$を考慮して，部材 AB および部材 BC の端モーメントを求めると次式のようになる。

(AB)

$M_{\mathrm{AB}} = 2\varphi_{\mathrm{A}} + \varphi_{\mathrm{B}} - Pl/8 = 2\varphi_{\mathrm{A}} + \varphi_{\mathrm{B}} - 15 = 0$

$M_{\mathrm{BA}} = \varphi_{\mathrm{A}} + 2\varphi_{\mathrm{B}} - Pl/8 = \varphi_{\mathrm{A}} + 2\varphi_{\mathrm{B}} + 15$

(BC)

$M_{\mathrm{BC}} = 3/2 \cdot (2\varphi_{\mathrm{B}}) - 5 = 3\varphi_{\mathrm{B}} - 5$

$M_{\mathrm{BC}} = 3/2 \cdot (\varphi_{\mathrm{B}}) + 5 = 1.5\varphi_{\mathrm{B}} + 5$

節点方程式は

$$M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} = 0 \Rightarrow \varphi_{\mathrm{A}} + 5\varphi_{\mathrm{B}} + 10 = 0$$

$$M_{\mathrm{AB}} = 2\varphi_{\mathrm{A}} + \varphi_{\mathrm{B}} - 15 = 0$$

であるから

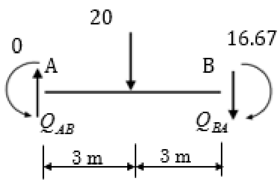
$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{\mathrm{A}} \\ \varphi_{\mathrm{B}} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 15 \\ -10 \end{Bmatrix} \Rightarrow \varphi_{\mathrm{A}} = 9.444,\ \ \varphi_{B} = -3.889$$

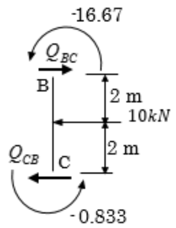
求まったφ_{A}，φ_{B}より端モーメントは，つぎのようになる。

$M_{\mathrm{AB}} = 0$　　　　$M_{\mathrm{BC}} = -16.67\ \mathrm{kN \cdot m}$

$M_{\mathrm{BA}} = 16.67\ \mathrm{kN \cdot m}$　　　　$M_{\mathrm{CB}} = -0.833\ \mathrm{kN \cdot m}$

<u>部材 AB 端部のせん断力と最大モーメント</u>





$\sum M = 0$ at 点 B： $16.67 + 6Q_{\mathrm{AB}} - 3 \times 20 = 0$ より$Q_{\mathrm{AB}} = 7.22\ \mathrm{kN}$

$\sum V = 0$： $-Q_{\mathrm{BA}} - 20 + \mathrm{Q}_{AB} = 0$ より$Q_{\mathrm{BA}} = -12.78\ \mathrm{kN}$

部材 AB の中点（20 kN 作用点）でのモーメント： $\mathrm{M}_{20} = 7.222 \times 3 = 21.67\ \mathrm{kN \cdot m}$

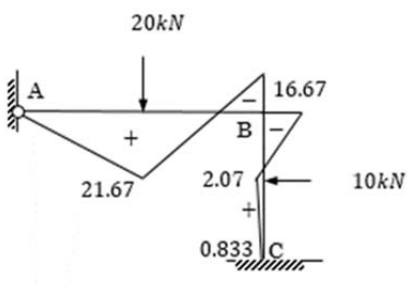
<u>部材 BC 端部のせん断力と最大モーメント</u>

$\sum M = 0$ at 点C：$-0.833 - 16.67 + 4Q_{\mathrm{BC}} - 2 \times 10 = 0$　より　$Q_{\mathrm{BC}} = 9.37\ \mathrm{kN}$

$\sum H = 0$：$-Q_{\mathrm{CB}} + Q_{\mathrm{BC}} - 10 = 0$　より　$Q_{\mathrm{CB}} = -0.63\ \mathrm{kN}$

部材 BC の中点（10 kN 作用点）でのモーメント：$M_{10} = -16.67 + 9.37 \times 2 = 2.07\ \mathrm{kN \cdot m}$

M図を**解図 11.3** に示す。



解図 11.3　M図（単位 kN･m）

【11.3】

剛比 k の計算

$K_0 = K_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{CD}} = I/4$，$K_{\mathrm{BC}} = I/5$

$k_{\mathrm{AB}} = k_{\mathrm{CD}} = 1$，$k_{\mathrm{BC}} = 5/4$

ここで，$\varphi_{\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{D}} = 0$および$\psi_{\mathrm{AB}} = \psi_{\mathrm{CD}} = \psi$として端モーメントを求める。

(AB)

$M_{\mathrm{AB}} = \varphi_{\mathrm{B}} + \psi$

$M_{\mathrm{BA}} = 2\varphi_{\mathrm{B}} + \psi$

(BC)

$M_{\mathrm{BC}} = 4/5 \cdot (2\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{C}}) - 20 \cdot 2 \cdot 3^2/25 = 1.6\varphi_{\mathrm{B}} + 0.8\varphi_{\mathrm{C}} - 14.4$

$M_{\mathrm{CB}} = 4/5 \cdot (\varphi_{\mathrm{B}} + 2\varphi_{\mathrm{C}}) + 20 \cdot 2^2 \cdot 3/25 = 0.8\varphi_{\mathrm{B}} + 1.6\varphi_{\mathrm{C}} + 9.6$

(CD)

$M_{\mathrm{CD}} = 2\varphi_{\mathrm{C}} + \psi - 10 \cdot 4/8 = 2\varphi_{\mathrm{C}} + \psi - 5$

$M_{\mathrm{DC}} = \varphi_{\mathrm{C}} + \psi + 10 \cdot 4/8 = \varphi_{\mathrm{C}} + \psi + 5$

節点方程式

$M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} = 0 \Rightarrow 3.6\varphi_{\mathrm{B}} + 0.8\varphi_{\mathrm{C}} + \psi - 14.4 = 0$ (1)

$M_{\mathrm{CB}} + M_{\mathrm{CD}} = 0 \Rightarrow 0.8\varphi_{\mathrm{B}} + 3.6\varphi_{\mathrm{C}} + \psi + 4.6 = 0$ (2)

層方程式

$\sum H = 0\,; Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{DC}} = -10$ (解図 11.4 を参照)

Q_{AB}とQ_{DC}を求める

$+\sum M = 0$ at 点 B

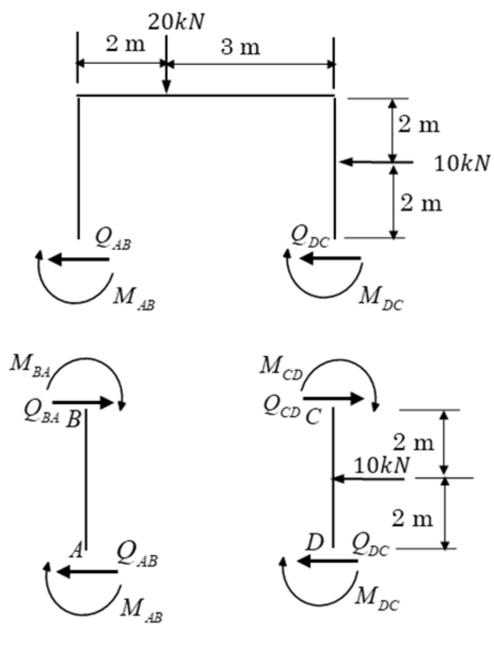
$M_{\mathrm{BA}} + Q_{\mathrm{AB}} \times 4 + M_{\mathrm{AB}} = 0$

$\underline{Q_{\mathrm{AB}} = -0.75\varphi_{\mathrm{B}} - 0.5\psi}$

$+\sum M = 0$ at 点 C

$M_{\mathrm{CD}} + Q_{\mathrm{DC}} \times 4 + 10 \times 2 + M_{\mathrm{DC}} = 0$

$\underline{Q_{\mathrm{DC}} = -0.75\varphi_{\mathrm{C}} - 0.5\psi - 5}$



解図 11.4

$$\begin{aligned} Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{DC}} = -0.75\varphi_{\mathrm{B}} - 0.75\varphi_{\mathrm{C}} - \psi - 5 &= -10 \\ -0.75\varphi_{\mathrm{B}} - 0.75\varphi_{\mathrm{C}} - \psi &= -5 \end{aligned} \quad (3)$$

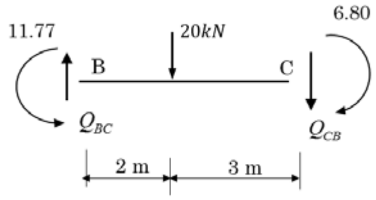
式(1)、(2)、(3)を連立させてマトリックス表示をする。

$$\begin{bmatrix} 3.6 & 0.8 & 1 \\ 0.8 & 3.6 & 1 \\ -0.75 & -0.75 & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_B \\ \varphi_C \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 14.4 \\ -4.6 \\ -5 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow\ \varphi_B = 3.358, \varphi_C = -3.427, \psi = 5.052$

$M_{AB} = 8.41, M_{BA} = 11.77, M_{BC} = -11.77,$

$M_{CB} = 6.80, M_{CD} = -6.80, M_{DC} = 6.62$



解図 11.5　Q_{BA} と Q_{CD}（単位：kN·m）

部材 BC 端部のせん断力と最大モーメント

$\sum M = 0$ at 点 C： $-11.77 + 6.80 + 5Q_{BC} - 20 \times 3 = 0$　より　$Q_{BC} = 13.0$ kN

$\sum V = 0$： $-Q_{CB} + Q_{BC} - 20 = 0$　より　$Q_{CB} = -7.0$ kN

BC 区間での最大モーメント（20 kN作用点）： $M_{MAX} = -11.77 + 2Q_{BC} = 14.3$ kN・m

部材 CD 端部のせん断力と最大モーメント

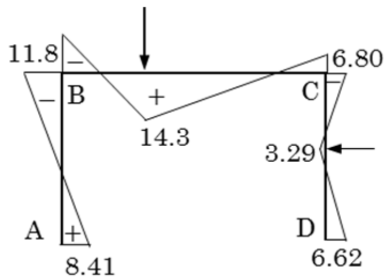
$\sum M = 0$ at 点 C： $4Q_{DC} + M_{DC} + M_{CD} + 10 \times 2 = 0$

$4Q_{DC} + 6.62 - 6.80 + 10 \times 2 = 0$　より　$Q_{DC} = -4.96$ kN

$\sum H = 0$： $Q_{CD} - Q_{DC} - 10 = 0$　より　$Q_{CD} = 5.05$ kN

CD 区間での最大モーメント（10 kN作用点）： $M_{MAX} = -6.80 + 2Q_{CD} = 3.29$ kN・m

解図 11.6 に M 図を示す。



解図 11. 6　M 図（単位 kN・m）

＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊ **ヤコビ法による連立方程式の解法** ＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊＊

章末問題【11.3】の連立 1 次方程式をヤコビ法で解いたプログラムを下記に示す。このプログラムは最も簡単な「繰り返し法」を用いて、エクセル VBA で作成してある。方程式の数 n はあらかじめプログラムに入力しておく。また、連立方程式の左辺の係数と右辺の値は、図の実行例に示すように実行後にエクセルシートから入力する。

```
Sub jacobi001()
Dim a(100, 100), b(100), x(100), xi(100) As Double
Dim i, j, k, i1, i2, i3, n, it As Long

it = 1000                 '繰り返し回数
n = 3   '****必ずデータとして入力***方程式の数

For i = 1 To n        '[A]{x}={B}; A マトリックス と B ベクトルの読み込み

    For j = 1 To n
        a(i, j) = Cells(i, j)
    Next j

    b(i) = Cells(i, n + 2)
Next i

For i = 1 To n
    xi(i) = 1#
  Next i

For k = 1 To it        '初期値の代入
  For i = 1 To n
              x(i) = b(i) / a(i, i)
            For j = 1 To n
            If j <> i Then
            x(i) = x(i) - a(i, j) / a(i, i) * xi(j)           'x の計算
            Else
            End If
            Next j

            df = 0#
            For i1 = 1 To n
            df = df + (x(i1) - xi(i1)) ^ 2                  '精度の計算
            Next i1
            df = df ^ 0.5

            If df <= 0.000001 Then
            For i2 = 1 To n
            Cells(n + 4, i2).NumberFormat = ("0.000")
            Cells(n + 4, i2) = x(i2)                     '結果の表示
            Next i2

            Cells(n + 6, 1) = k
            Cells(n + 7, 1) = df
        End
            Else
                For i3 = 1 To n
              xi(i3) = x(i3)      '新しい x の入れ替え
              Next i3
            End If
    Next i
Next k
End Sub
```

	A	B	C	D	E	F
1	3.6	0.8	1		14.4	
2	0.8	3.6	1		-4.6	
3	-0.75	-0.75	-1		-5	
4						
5						
6						
7	3.358	-3.427	5.052			
8						
9	10					
10	2.74E-07					
11						

図　実行例：3 元連立 1 次方程式の入力方法と解析結果
(図中のセル A1～C3 が左辺の係数、E1～E3 が右辺の値。セル A7、B7、C7 が連立方程式の解。なお、セル A10 の数値はこの計算の精度、その上のセル A9 の「10」はこの精度になるまで計算を繰り返した回数である)

＊＊＊

【11.4】 剛比 k の計算

$K_0 = K_{AB} = K_{CD} = I/6,\quad K_{BC} = I/8$ $\quad K_0 = K_{\mathrm{AB}} = K_{\mathrm{CD}} = I/6, K_{\mathrm{BC}} = I/8$

$k_{AB} = k_{CD} = 1,\quad k_{BC} = 3/4$ $\quad k_{\mathrm{AB}} = k_{\mathrm{CD}} = 1,\ \mathrm{k}_{\mathrm{BC}} = 3/4$

ここで、$\varphi_{\mathrm{A}} = \varphi_{\mathrm{D}} = 0$および$\psi_{\mathrm{AB}} = \psi_{\mathrm{CD}} = \psi$として端モーメントを求める。

(AB)

$$M_{\mathrm{AB}} = (\varphi_{\mathrm{B}} + \psi) - ql^2/20 = \varphi_{\mathrm{B}} + \psi - 32.4$$

$$M_{\mathrm{BA}} = (2\varphi_{\mathrm{B}} + \psi) + ql^2/30 = 2\varphi_{\mathrm{B}} + \psi + 21.6$$

(BC)

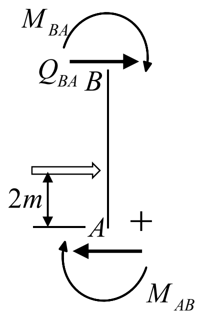
$$M_{\mathrm{BC}} = 3/4 \cdot (2\varphi_{\mathrm{B}} + \varphi_{\mathrm{C}})$$

$$M_{\mathrm{CB}} = 3/4 \cdot (\varphi_{\mathrm{B}} + 2\varphi_{\mathrm{C}})$$

(CD)

$$M_{\mathrm{CD}} = 2\varphi_{\mathrm{C}} + \psi$$

$$M_{\mathrm{CB}} = \varphi_{\mathrm{C}} + \psi$$



<u>節点方程式</u>

$$M_{\mathrm{BA}} + M_{\mathrm{BC}} = 0 \Rightarrow 7/2 \cdot \varphi_{\mathrm{B}} + 3/4 \cdot \varphi_{\mathrm{C}} + \psi + 21.6 = 0 \qquad (1)$$

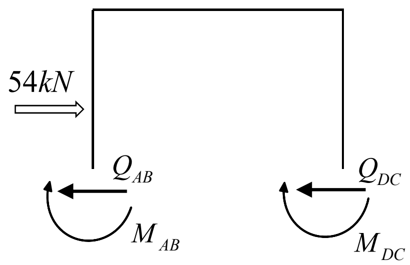
$$M_{\mathrm{CB}} + M_{\mathrm{CD}} = 0 \Rightarrow 3/4 \cdot \varphi_{\mathrm{B}} + 7/2 \cdot \varphi_{\mathrm{C}} + \psi = 0 \qquad (2)$$

<u>層方程式</u>

$\sum H = 0$;

$Q_{\mathrm{AB}} + Q_{\mathrm{DC}} = 54$

まず，Q_{AB}とQ_{DC}を求める。



(+) $\sum M = 0$ at 点 B

$$M_{\mathrm{BA}} + Q_{\mathrm{AB}} \times 6 + M_{\mathrm{AB}} - 54 \times 4 = 0$$

$$Q_{\mathrm{AB}} = -0.5\varphi_{\mathrm{B}} - 1/3 \cdot \psi + 37.8$$

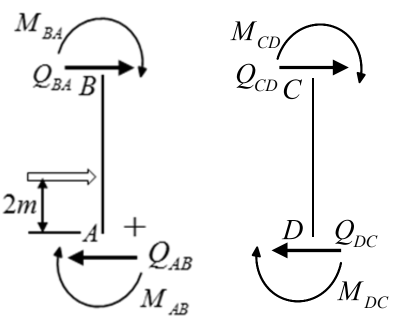
(+) $\sum M = 0$ at 点 C

$$M_{\mathrm{CD}} + Q_{\mathrm{DC}} \times 6 + M_{\mathrm{DC}} = 0$$

$$Q_{\mathrm{DC}} = -0.5\varphi_{\mathrm{C}} - 1/3 \cdot \psi$$

$$Q_{\mathrm{BA}} + Q_{\mathrm{DC}} = +0.5\varphi_{\mathrm{B}} + 0.5\varphi_C + 2/3 \cdot \psi$$

$$= -16.2 \qquad (3)$$



式(1)、(2)、(3)を連立させてマトリックス表示をする。

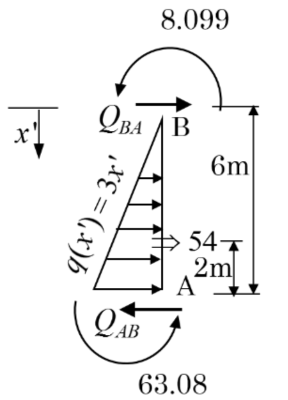
$$\begin{bmatrix} 3.5 & 0.75 & 1 \\ 0.75 & 3.5 & 1 \\ 0.5 & 0.5 & 0.667 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varphi_{\mathrm{B}} \\ \varphi_{\mathrm{C}} \\ \psi \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -21.6 \\ 0 \\ -16.2 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \varphi_{\mathrm{B}} = 0.981, \varphi_{\mathrm{C}} = 8.836, \psi = -31.661$$

$M_{AB} = -63.08$,　$M_{BA} = -8.099$,　$M_{BC} = 7.992$,　$M_{CB} = 13.99$,

$M_{CD} = -13.99$,　$M_{DC} = -22.825$　（単位：kN･m）

$Q_{AB} = 47.86$ kN,　$Q_{DC} = 6.136$ kN

部材 AB に生じる $M_{x'}$ を求める



$\sum M = 0\ at$ A： $-8.099 - 63.08 + 54 \times 2 + 6Q_{BA} = 0$

$Q_{BA} = -6.14$ kN

$\sum V = 0$：　$Q_{AB} = 47.86$ kN

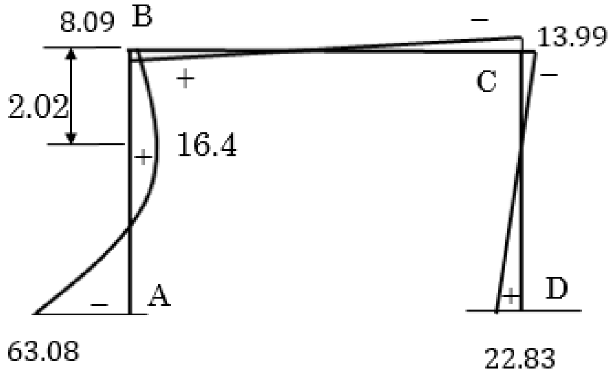
$M_{x'} = Q_{BA} \times x' - 8.099 + 0.5x'^3 = 0.5x'^3 - 6.14x' - 8.099$

$dM_{x'}/dx' = Q_{x'} = 1.5x'^2 - 6.14$

$Q_{x'} = 0$で$M_{x'}$ は最大になるので，$x' = 2.02$ mで

$M_{MAX} = 16.4$ kN･m

M 図を解図 11.7 に示す。



解図 11.7　M図（単位：kN･m）

【11.5】

剛比 k の計算

$$K_0 = K_{AB} = I/3\,, K_{BC} = I/6, K_{CD} = I/2$$

$$k_{AB} = 1, k_{BC} = 1/2\,, k_{CD} = 3/2$$

ここで，$\varphi_A = 0, M_{DC} = 0$および$\psi_{AB} = (2/3)\psi_{CD} = \psi$として端モーメントを求める。

(AB)

$M_{AB} = \varphi_B + \psi = \varphi_B - (2/3)\varphi_C - (4/3)\varphi_D\,; M_{DC} = 0$を考慮して$\psi$を置き換えてある。

$$M_{BA} = 2\varphi_B + \psi = 2\varphi_B - (2/3)\varphi_C - (4/3)\varphi_D$$

(BC)

$$M_{\mathrm{BC}}=(1/2)(2\varphi_{\mathrm{B}}+\varphi_{\mathrm{C}})-20\times 6/8=\varphi_{\mathrm{B}}+(1/2)\varphi_{\mathrm{C}}-15$$

$$M_{\mathrm{CB}}=(1/2)(\varphi_{\mathrm{B}}+2\varphi_{\mathrm{C}})+20\times 6/8=(1/2)\varphi_{\mathrm{B}}+\varphi_{\mathrm{C}}-15$$

(CD)

$$M_{\mathrm{CD}}=(3/2)(2\varphi_{\mathrm{C}}+\varphi_{\mathrm{D}}+\psi_{\mathrm{CD}})=3\varphi_{\mathrm{C}}+(3/2)\varphi_{\mathrm{D}}+(9/4)\psi=(3/2)\varphi_{\mathrm{C}}-(3/2)\varphi_{\mathrm{D}}$$

$$M_{\mathrm{DC}}=(3/2)(\varphi_{\mathrm{C}}+2\varphi_{\mathrm{D}}+\psi_{\mathrm{CD}})=(3/2)\varphi_{\mathrm{C}}+3\varphi_{\mathrm{D}}+(9/4)\psi=0:$$

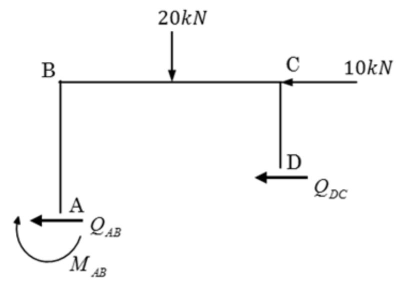
$$\boxed{\psi=-(2/3)\varphi_{\mathrm{C}}-(4/3)\varphi_{\mathrm{D}}}$$

<u>節点方程式</u>

$$M_{\mathrm{BA}}+M_{\mathrm{BC}}=0\Rightarrow 3\varphi_{\mathrm{B}}-(1/6)\varphi_{\mathrm{C}}-(4/3)\varphi=15 \qquad (1)$$

$$M_{\mathrm{CB}}+M_{\mathrm{CD}}=0\Rightarrow (1/2)\varphi_{\mathrm{B}}+(5/2)\varphi_{\mathrm{C}}-(3/2)\varphi_{\mathrm{D}}=-15 \qquad (2)$$

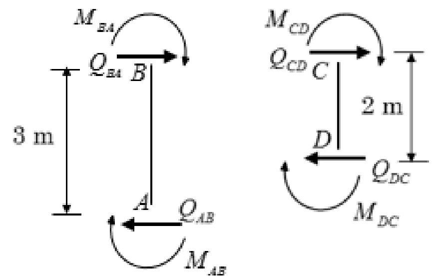
<u>層方程式</u>



$$\sum H=0\,;$$

$$Q_{\mathrm{AB}}+Q_{\mathrm{DC}}=-10$$

まず，Q_{BA}とQ_{DC}を求める。



$+$ $\sum M=0\ at$ 点 B

$$M_{\mathrm{BA}}+Q_{\mathrm{AB}}\times 3+M_{\mathrm{AB}}=0$$

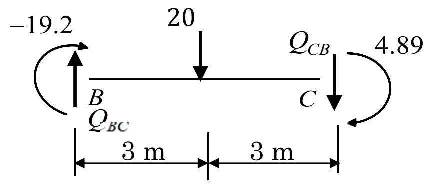
$$Q_{\mathrm{AB}}=-(M_{\mathrm{AB}}+M_{\mathrm{BA}})/3=-\varphi_{\mathrm{B}}+(4/9)\varphi_{\mathrm{C}}+(8/9)\varphi_{\mathrm{D}}$$

$+$ $\sum M=0$ at 点 C

$$M_{\mathrm{CD}}+Q_{\mathrm{DC}}\times 2+M_{\mathrm{DC}}=0$$

$$Q_{\mathrm{DC}}=-(M_{\mathrm{CD}}+M_{\mathrm{DC}})/2=-(3/4)\varphi_{\mathrm{C}}+(3/4)\varphi_{\mathrm{D}}$$

$$Q_{\mathrm{BA}}+Q_{\mathrm{DC}}=-\varphi_{\mathrm{B}}-0.3056\varphi_{\mathrm{C}}+1.6389\varphi_{\mathrm{D}}=-10 \qquad (3)$$



式(1)、(2)、(3)を連立させてマトリックス表示をする。

$$\begin{bmatrix} 3 & -1/6 & -4/3 \\ 1/2 & 5/2 & -3/2 \\ -1 & -0.3056 & 1.6389 \end{bmatrix}\begin{Bmatrix} \varphi_{\mathrm{B}} \\ \varphi_{\mathrm{C}} \\ \psi \end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix} 15 \\ -15 \\ -10 \end{Bmatrix}$$

$\Rightarrow\varphi_{\mathrm{B}}=1.113$,　　$\varphi_{\mathrm{C}}=-10.670$,　　$\psi=-7.412$

$M_{\mathrm{AB}}=-18.11$,　　$M_{\mathrm{BA}}=19.22$,　　$M_{\mathrm{BC}}=-19.22$,　　$M_{\mathrm{CB}}=-4.89$,

$M_{\mathrm{CD}}=-4.89$,　　$M_{\mathrm{DC}}=0$　　　　（単位：kN･m）

$Q_{\mathrm{AB}}=-12.44$ kN,　　$Q_{\mathrm{DC}}=2.44$ kN

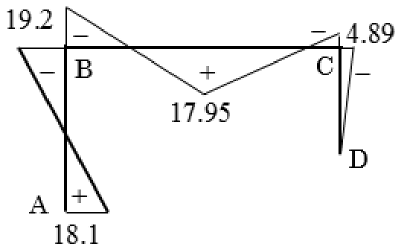
部材 BC の中点モーメント(M_m)

$$\sum M = 0 \text{ at 点 C：} -19.22 + 4.89 + 6Q_{BC} - 20 \times 3 = 0$$

$$\Rightarrow Q_{BC} = 12.39 \text{ kN}$$

$$M_m = -19.22 + 12.39 \times 3 = 17.95 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

M 図を**解図 11.8** に示す。



解図 11.8　M 図（単位：kN･m）

12.　剛性マトリックスの理論

穴埋め例題

（p.156）穴埋め例題 **12.1**

$$3\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B} = 3\begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & -6 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & -8 & 3 \\ 7 & 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \times 5 + 3 & 3 \times (-2) - 8 & 3 \times 3 + 3 \\ 3 \times 4 + 7 & 3 \times 7 + 5 & 3 \times (-6) + (-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 18 & -14 & 12 \\ 19 & 26 & 20 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{AB}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 3 \\ 4 & 7 & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ -8 & 5 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \times 3 + (-2) \times (-8) + 3 \times 3 & 5 \times 7 + (-2) \times 5 + 3 \times (-2) \\ 4 \times 3 + 7 \times (-8) + (-6) \times 3 & 4 \times 7 + 7 \times 5 + (-6) \times (-2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 40 & 19 \\ -62 & 75 \end{bmatrix}$$

（p.157）穴埋め例題 **12.2**

2 行 2 列の場合の逆行列を求める公式より

$$\boldsymbol{A}^{-1} = \frac{1}{6 \times 3 - 2 \times (-4)} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \frac{1}{26} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/26 & \text{-}1/13 \\ 2/13 & 3/13 \end{bmatrix}$$

（p.157）穴埋め例題 12.3

$$(\boldsymbol{A}|\boldsymbol{I})=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\-1&1&0&0&1&0\\0&3&3&0&0&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&3&2&1&1&0\\0&3&3&0&0&1\end{array}\right]$$
（１行目＋２行目）

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&3&2&1&1&0\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&3&0&3&3&-2\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]$$
（３行目－２行目）
（２行目－３行目× 2.0）

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&2&2&1&0&0\\0&1&0&1&1&-2/3\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&2&-1&-2&4/3\\0&1&0&1&1&-2/3\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]$$
（２行目 / 3.0）
（１行目－２行目× 2.0）

$$\Rightarrow\left[\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&1&0&-2/3\\0&1&0&1&1&-2/3\\0&0&1&-1&-1&1\end{array}\right]=(\boldsymbol{I}|\boldsymbol{B})$$
（１行目－３行目×2.0）

よって

$$\boldsymbol{A}^{-1}=\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&0&-2/3\\1&1&-2/3\\-1&-1&1\end{bmatrix}$$

（p.161）穴埋め例題 12.4

式（12.12）より

$$\begin{pmatrix}10\\10\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}1.0&-1.0\\-1.0&1.0+2.0\end{bmatrix}\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix}$$

すなわち

$$u_1-u_2=10,\quad -u_1+3u_2=10$$

であり，この連立方程式を解くと

$$u_1=20\,\mathrm{mm},\quad u_2=10\,\mathrm{mm}$$

が得られる。さらに、反力は式（12.13）より

$$X_3=-k_2u_2=-2.0\times10=-20\,\mathrm{kN}$$

となり，ばね軸力は式（12.14）より

$$N_1=-k_1u_1+k_1u_2=-1.0\times20+1.0\times10=-10\,\mathrm{kN}$$
$$N_2=-k_2u_2=-2.0\times10=-20\,\mathrm{kN}$$

となる。

（p.162）穴埋め例題 12.5

要素①-③、要素①-②、および要素②-③に関する剛性方程式は

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

であり、全体系の剛性方程式はこれらを重ね合わせて次式となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ -k_1 & -k_3 & k_1+k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -2 & -3 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ -3 & -1 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，これを節点力に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X_3 = -3u_1 - u_2$$

上式の左側は

$4 = 5u_1 - 2u_2, \qquad 4 = -2u_1 + 3u_2$

であり，この連立方程式を解くと

$$u_1 = 2\,\text{mm}, \quad u_2 = 3\,\text{mm}$$

が得られる。さらに、反力およびばね軸力は以下となる。

$$\begin{aligned} X_3 &= -3u_1 - u_2 = -9\,\text{kN} \\ N_1 &= k_1(u_3 - u_1) = 3\times(0.0\text{-}2.0) = -6\,\text{kN} \\ N_2 &= k_2(u_2 - u_1) = 2\times(3.0\text{-}2.0) = 2\,\text{kN} \\ N_3 &= k_3(u_3 - u_2) = 1\times(0.0\text{-}3.0) = -3\,\text{kN} \end{aligned}$$

（p.165）穴埋め例題 12.6

要素①-②の剛性方程式は、式（12.19）において $s = \sin 30^0 = 1/2$，$c = \cos 30^0 = \sqrt{3}/2$ として

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}
$$

となる。要素①-③の剛性方程式は，式（12.19）において $s=\sin\left(-30^0\right)=-1/2$， $c=\cos\left(-30^0\right)=\sqrt{3}/2$ として

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix}
$$

となる。全体系の剛性方程式は，これらを重ね合わせて次式となる。

$$
\begin{pmatrix} X_1=0 \\ Y_1=P \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2=0 \\ V_2=0 \\ U_3=0 \\ V_3=0 \end{pmatrix}
$$

これを節点力に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$
\begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}
$$

上式より、節点変位および支点反力は

$$
U_1=0.0, \quad V_1=\frac{2Pl}{EA}
$$

$$
X_2=-\frac{\sqrt{3}P}{2}, \quad Y_2=-\frac{P}{2}, \quad X_3=\frac{\sqrt{3}P}{2}, \quad Y_3=-\frac{P}{2}
$$

となる。部材力は式（12.18）より

$$S_1=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\V_1\\U_2\\V_2\end{pmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\2Pl/EA\\0\\0\end{pmatrix}=-P$$

$$S_2=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\V_1\\U_3\\V_3\end{pmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\2Pl/EA\\0\\0\end{pmatrix}=P$$

となる。

（p.167）穴埋め例題 12.7

要素①-②の剛性方程式は，式（12.19）において$s=\sin 30^\circ=1/2$， $c=\cos 30^\circ=\sqrt{3}/2$ として

$$\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\X_2\\Y_2\end{pmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}3/4 & \sqrt{3}/4 & -3/4 & -\sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & 1/4 & -\sqrt{3}/4 & -1/4\\ -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\V_1\\U_2\\V_2\end{pmatrix}$$

となる。要素①-③の剛性方程式は、式（12.19）において

$s=\sin\left(-30^\circ\right)=-1/2$， $c=\cos\left(-30^\circ\right)=\sqrt{3}/2$ として

$$\begin{pmatrix}X_1\\Y_1\\X_3\\Y_3\end{pmatrix}=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}3/4 & -\sqrt{3}/4 & -3/4 & \sqrt{3}/4\\ -\sqrt{3}/4 & 1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4\\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 3/4 & -\sqrt{3}/4\\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & -\sqrt{3}/4 & 1/4\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\V_1\\U_3\\V_3\end{pmatrix}$$

となる。全体系の剛性方程式は，これらを重ね合わせて次式となる。

$$
\begin{pmatrix} X_1=-P \\ Y_1=P \\ X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3/2 & 0 & -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & -\sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & -\sqrt{3}/4 & 3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 & \sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 & 0 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 & 0 & 0 & 3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 & 0 & 0 & -\sqrt{3}/4 & 1/4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2=0 \\ V_2=0 \\ U_3=0 \\ V_3=0 \end{pmatrix}
$$

これを節点変位に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$
\begin{pmatrix} -P \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} 3/2 & 0 \\ 0 & 1/2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -3/4 & -\sqrt{3}/4 \\ -\sqrt{3}/4 & -1/4 \\ -3/4 & \sqrt{3}/4 \\ \sqrt{3}/4 & -1/4 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \end{pmatrix}
$$

上式より、節点変位および反力は

$$
U_1 = -\frac{2Pl}{3EA}, \quad V_1 = \frac{2Pl}{EA}
$$

$$
X_2 = \frac{\left(1-\sqrt{3}\right)P}{2}, \quad Y_2 = \frac{\left(\sqrt{3}-3\right)P}{6}, \quad X_3 = \frac{\left(1+\sqrt{3}\right)P}{2}, \quad Y_3 = -\frac{\left(\sqrt{3}+3\right)P}{6}
$$

となる。部材力は式（12.18）より

$$
S_1 = \frac{EA}{l}\left[-\cos\alpha_1 \quad -\sin\alpha_1 \quad \cos\alpha_1 \quad \sin\alpha_1\right]\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2}\right]\begin{pmatrix} -2Pl/3EA \\ 2Pl/EA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}-3}{3}P
$$

$$
S_2 = \frac{EA}{l}\left[-\cos\alpha_2 \quad -\sin\alpha_2 \quad \cos\alpha_2 \quad \sin\alpha_2\right]\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{l}\left[-\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} \quad -\frac{1}{2}\right]\begin{pmatrix} -2Pl/3EA \\ 2Pl/EA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{\sqrt{3}+3}{3}P
$$

となる。

（p.168）穴埋め例題 12.8

要素①-②の剛性方程式は，式（12.19）において $s=\sin\alpha_1=3/5$，$c=\cos\alpha_1=4/5$

として

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{4} \begin{bmatrix} 16/25 & 12/25 & -16/25 & -12/25 \\ 12/25 & 9/25 & -12/25 & -9/25 \\ -16/25 & -12/25 & 16/25 & 12/25 \\ -12/25 & -9/25 & 12/25 & 9/25 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

となる。要素②-③の剛性方程式は、式（12.19）において $s = \sin \alpha_2 = -4/5$, $c = \cos \alpha_2 = 3/5$ として

$$\begin{pmatrix} X_2 \\ Y_2 \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{3} \begin{bmatrix} 9/25 & -12/25 & -9/25 & 12/25 \\ -12/25 & 16/25 & 12/25 & -16/25 \\ -9/25 & 12/25 & 9/25 & -12/25 \\ 12/25 & -16/25 & -12/25 & 16/25 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

となる。全体系の剛性方程式はこれらを重ね合わせて次式となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_2 = 0 \\ Y_2 = P \\ X_3 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 9/4 & -3 & -9/4 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 7 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & -9/4 & -1 & 91/12 & 4 & -16/3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & -16/3 & -4 & 16/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ U_2 \\ V_2 \\ U_3 = 0 \\ V_3 = 0 \end{pmatrix}$$

これを節点力に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{25} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 91/12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -9/4 \\ -3 & 4 \\ 4 & -16/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

上式より、節点変位および反力は

$U_2 = 12P/(25EA)$ m, $V_2 = 84P/(25EA)$ m

$X_1 = -12P/25$, $Y_1 = -9P/25$, $X_3 = -12P/25$, $Y_3 = -16P/25$

となる。部材力は式（12.18）より

$$S_1=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \sin\alpha_1\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_1\\V_1\\U_2\\V_2\end{pmatrix}=\frac{EA}{4}\begin{bmatrix}-\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}0\\0\\12P/25EA\\84P/25EA\end{pmatrix}=\frac{3}{5}P$$

$$S_2=\frac{EA}{l}\begin{bmatrix}-\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \sin\alpha_2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}U_2\\V_2\\U_3\\V_3\end{pmatrix}=\frac{EA}{3}\begin{bmatrix}-\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5}\end{bmatrix}\begin{pmatrix}12P/25EA\\84P/25EA\\0\\0\end{pmatrix}=\frac{4}{5}P$$

となる。

（p.171　l.1）本文の穴埋め

$$R_A=\frac{12EI}{l^3},M_A=\frac{6EI}{l^2}$$

と求められる。なお，………

（p.173）穴埋め例題 12.9

要素①-②の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix}Y_1\\M_1\\Y_2\\M_2\end{pmatrix}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\6l & 4l^2 & -6l & 2l^2\\-12 & -6l & 12 & -6l\\6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_1\\\theta_1\\v_2\\\theta_2\end{pmatrix}$$

であり，要素②-③の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix}Y_2\\M_2\\Y_3\\M_3\end{pmatrix}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & 6l & -12 & 6l\\6l & 4l^2 & -6l & 2l^2\\-12 & -6l & 12 & -6l\\6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_2\\\theta_2\\v_3\\\theta_3\end{pmatrix}$$

である。この両者を重ね合わせると，以下となる。

$$\begin{pmatrix}Y_1\\M_1=0\\Y_2=P\\M_2=0\\Y_3\\M_3\end{pmatrix}=\frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix}12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0\\6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0\\-12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l\\6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2\\0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l\\0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2\end{bmatrix}\begin{pmatrix}v_1=0\\\theta_1\\v_2\\\theta_2\\v_3=0\\\theta_3=0\end{pmatrix}$$

節点力に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$\begin{pmatrix} 0 \\ P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 24 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6l & -12 & 6l \\ 0 & -12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

上式より節点変位および支点反力が求められる。

$$\theta_1 = \frac{Pl^2}{8EI}, \quad v_2 = \frac{7Pl^3}{96EI}, \quad \theta_2 = -\frac{Pl^2}{32EI}$$

$$R_A = -Y_1 = \frac{5P}{16},\ R_B = -Y_3 = \frac{11P}{16},\ M_B = -M_3 = -\frac{3Pl}{8}$$

(p.173) **穴埋め例題 12.10**

式 (12.24) より，要素①-②の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

であり、部材②-③の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

である。この両者を重ね合わせると

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_1 = 0 \\ Y_2 = 0 \\ M_2 = M_0 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{pmatrix}$$

となる。節点力に関する未知および既知マトリクスに分解すると

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -6l & 24 & 0 \\ 2l^2 & 0 & 8l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 6l & -12 & 6l \\ 0 & -12 & -6l \\ 0 & 6l & 2l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

上式より節点変位および反力が求められる。

$$\theta_1 = -\frac{M_0 l}{8EI}, \quad v_2 = -\frac{M_0 l^2}{32EI}, \quad \theta_2 = \frac{5M_0 l}{32EI}$$

$$R_{\mathrm{A}} = -Y_1 = -\frac{9M_0}{16l}, R_{\mathrm{B}} = -Y_3 = \frac{9M_0}{16l}, M_{\mathrm{B}} = -M_3 = -\frac{M_0}{8}$$

（p.177）穴埋め例題 12.11

剛性方程式は例題 12.2 を参照して次式となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 = P \\ Y_2 = 0 \\ M_2 = M_0 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ & & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \beta+12 & 0 & -6l & -12 & 0 & -6l \\ & & & & \beta+12 & -6l & 0 & -\beta & 0 \\ & & & & & 8l^2 & 6l & 0 & 2l^2 \\ & & & & & & 12 & 0 & 6l \\ & & & & & & & \beta & 0 \\ & \mathrm{sym.} & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ U_3 = 0 \\ V_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{pmatrix}$$

未知変位は，つぎの部分マトリクスを解いて得られる。

$$\begin{pmatrix} P \\ 0 \\ M_0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \beta+12 & 0 & -6l \\ 0 & \beta+12 & -6l \\ -6l & -6l & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = \frac{(2\beta+15)Pl^3}{2(\beta+3)(\beta+12)EI} + \frac{3M_0 l^2}{4(\beta+3)EI}$$

$$V_2 = \frac{9Pl^3}{2(\beta+3)(\beta+12)EI} + \frac{3M_0 l^2}{4(\beta+3)EI}$$

$$\theta_2 = \frac{3Pl^2}{4(\beta+3)EI} + \frac{M_0 l(\beta+12)}{8(\beta+3)EI}$$

さらに、反力はつぎの部分マトリクスを解いて得られる。

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l \\ 0 & -6l & 2l^2 \\ -12 & 0 & 6l \\ 0 & -\beta & 0 \\ -6l & 0 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}
$$

$$
X_1 = -\beta U_2 \frac{EI}{l^3} = -\frac{\beta(2\beta+15)P}{2(\beta+3)(\beta+12)} - \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}
$$

$$
Y_1 = (-12V_2 + 6l\theta_2)\frac{EI}{l^3} = \frac{9\beta P}{2(\beta+3)(\beta+12)} + \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}
$$

$$
M_1 = (-6lV_2 + 2l^2\theta_2)\frac{EI}{l^3} = -\frac{3(\beta-6)Pl}{2(\beta+3)(\beta+12)} + \frac{(\beta-6)M_0}{4(\beta+3)}
$$

$$
X_3 = (-12U_2 + 6l\theta_2)\frac{EI}{l^3} = -\frac{6(2\beta+15)P}{2(\beta+3)(\beta+12)} + \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}
$$

$$
Y_3 = -\beta V_2 \frac{EI}{l^3} = -\frac{9\beta P}{2(\beta+3)(\beta+12)} - \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}
$$

$$
M_3 = (-6lU_2 + 2l^2\theta_2)\frac{EI}{l^3} = -\frac{9(\beta+6)Pl}{2(\beta+3)(\beta+12)} + \frac{(\beta-6)M_0}{4(\beta+3)}
$$

章末問題

【12.1】　①-③要素，①-②要素，および②-③要素の剛性方程式は

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
$$

であり，全体系の剛性方程式はこれらを重ね合わせて次式となる。

$$
\begin{pmatrix} X_1 \\ \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1+k_2 & -k_2 & -k_1 \\ -k_2 & k_2+k_3 & -k_3 \\ -k_1 & -k_3 & k_1+k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
$$

すなわち

$$
\begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3+2 & -2 & -3 \\ -2 & 2+1 & -1 \\ -3 & -1 & 3+1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}
$$

となり，これを節点変位に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 10 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X_1 = -2u_2 + 4u_3$$

上式の左側は

$$3u_2 - u_3 = 3, \quad -u_2 + 4u_3 = 10$$

であり，この連立方程式を解くと

$$u_2 = 2.0\,\text{mm}, \quad u_3 = 3.0\,\text{mm}$$

が得られる。さらに，反力およびばね軸力は以下となる。

$$\begin{aligned} X_1 &= -2u_2 - 3u_3 = -13\,\text{kN} \\ N_1 &= k_1\left(u_3 - u_1\right) = 3 \times \left(3.0\text{-}0.0\right) = 9\,\text{kN} \\ N_2 &= k_2\left(u_2 - u_1\right) = 2 \times \left(2.0\text{-}0.0\right) = 4\,\text{kN} \\ N_3 &= k_3\left(u_3 - u_2\right) = 1 \times \left(3.0\text{-}2.0\right) = 1\,\text{kN} \end{aligned}$$

となる。

【12.2】　要素①-②，および要素②-③の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix} \mathrm{X}_1 \\ \mathrm{X}_2 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_2 & -k_2 \\ -k_2 & k_2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_3 & -k_3 \\ -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

であり，全体系の剛性方程式はこれらを重ね合わせて次式となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \mathrm{X}_2 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & -k_1 \\ -k_1 & k_1 + k_2 + k_3 & -k_2 - k_3 \\ -k_1 & -k_2 - k_3 & k_2 + k_3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ \mathrm{X}_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ -3 & 3+2+1 & -2-1 \\ 0 & -2-1 & 2+1 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となり，これを節点変位に関する未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \quad , \quad X_3 = -3u_2$$

上式の左側は

$$3u_1 - 3u_3 = 6, \quad -3u_1 + 6u_2 = 3$$

であり，この連立方程式を解くと

$$u_1 = 5.0\,\text{mm}, \quad u_2 = 3.0\,\text{mm}$$

が得られる。さらに，反力およびばね軸力は以下となる。

$$\begin{aligned} &X_3 = -3u_2 = -9\,\text{kN} \\ &N_1 = k_1\left(u_2 - u_1\right) = 3 \times \left(3.0 - 5.0\right) = -6\,\text{kN} \\ &N_2 = k_2\left(u_3 - u_2\right) = 2 \times \left(0.0 - 3.0\right) = -6\,\text{kN} \\ &N_3 = k_3\left(u_3 - u_2\right) = 1 \times \left(0.0 - 3.0\right) = -3\,\text{kN} \end{aligned}$$

【12.3】　全体系の剛性方程式は，穴埋め例題 12.11 を参照して，次式となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{X}_2 = P \\ \mathrm{Y}_2 = P \\ \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{Y}_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25} \begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 9/4 & -3 & -9/4 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 7 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & -9/4 & -1 & 91/12 & 4 & -16/3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -16/3 & 4 & 16/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 = 0 \\ \mathrm{V}_1 = 0 \\ \mathrm{U}_2 \\ \mathrm{V}_2 \\ \mathrm{U}_3 = 0 \\ \mathrm{V}_3 = 0 \end{pmatrix}$$

これを未知および既知の部分行列に分解する。

$$\begin{pmatrix} P \\ P \end{pmatrix} = \frac{EA}{25} \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 91/12 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25} \begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -9/4 \\ -3 & 4 \\ 4 & -16/3 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

上式より、節点変位および反力は

$$U_2 = \frac{103P}{25EA}\ (m), \quad V_2 = \frac{96P}{25EA}\ (m)$$

$$X_1 = -\frac{28P}{25}, \quad Y_1 = -\frac{21P}{25}, \quad X_3 = \frac{3P}{25}, \quad Y_3 = -\frac{4P}{25}$$

となる。部材力は式（12.18）より

$$S_1 = \frac{EA}{l}\left[-\cos\alpha_1 \quad -\sin\alpha_1 \quad \cos\alpha_1 \quad \cos\alpha_1\right]\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{4}\left[-\frac{4}{5} \quad -\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5}\right]\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 103P/25EA \\ 96P/25EA \end{pmatrix} = \frac{7}{5}P$$

$$S_2 = \frac{EA}{l}\left[-\cos\alpha_2 \quad -\sin\alpha_2 \quad \cos\alpha_2 \quad \cos\alpha_2\right]\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{3}\left[-\frac{3}{5} \quad \frac{4}{5} \quad \frac{3}{5} \quad -\frac{4}{5}\right]\begin{pmatrix} 103P/25EA \\ 96P/25EA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}P$$

となる。

【12.4】　全体系の剛性方程式は，穴埋め例題 12.11 を参照して、次式となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ \mathrm{Y}_1 \\ \mathrm{X}_2 = P \\ \mathrm{Y}_2 = 0 \\ \mathrm{X}_3 \\ \mathrm{Y}_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25}\begin{bmatrix} 4 & 3 & -4 & -3 & 0 & 0 \\ 4 & 9/4 & -3 & -9/4 & 0 & 0 \\ -4 & -3 & 7 & -1 & -3 & 4 \\ -3 & -9/4 & -1 & 91/12 & 4 & -16/3 \\ 0 & 0 & -3 & 4 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & -16/3 & 4 & 16/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{U}_1 = 0 \\ \mathrm{V}_1 = 0 \\ \mathrm{U}_2 \\ \mathrm{V}_2 \\ \mathrm{U}_3 = 0 \\ \mathrm{V}_3 = 0 \end{pmatrix}$$

これを節点力に関して未知および既知の部分マトリクスに分解する。

$$\begin{pmatrix} P \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25}\begin{bmatrix} 7 & -1 \\ -1 & 91/12 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ X_3 \\ X_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{25}\begin{bmatrix} -4 & -3 \\ -3 & -9/4 \\ -3 & 4 \\ 4 & -16/3 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \end{pmatrix}$$

上式より、節点変位および反力は

$$U_2 = \frac{91P}{25EA}\,(m), \quad V_2 = \frac{12P}{25EA}(m)$$

$$X_1 = -\frac{16P}{25}, \quad Y_1 = -\frac{12P}{25}, \quad X_3 = -\frac{9P}{25}, \quad Y_3 = \frac{12P}{25}$$

となる。部材力は式（12.18）より

$$S_1 = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -\cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & \cos\alpha_1 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_1 \\ V_1 \\ U_2 \\ V_2 \end{pmatrix} = \frac{EA}{4}\begin{bmatrix} -\frac{4}{5} & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 91P/25EA \\ 12P/25EA \end{pmatrix} = \frac{4}{5}P$$

$$S_2 = \frac{EA}{l}\begin{bmatrix} -\cos\alpha_2 & -\sin\alpha_2 & \cos\alpha_2 & \cos\alpha_2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ U_3 \\ V_3 \end{pmatrix} = \frac{EA}{3}\begin{bmatrix} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} \end{bmatrix}\begin{pmatrix} 91P/25EA \\ 12P/25EA \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{3}{5}P$$

となる。

【12.5】　穴埋め例題 12.9 を参照して，部材①-②の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_1 \\ Y_2 \\ M_2 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

であり，部材②-③の剛性方程式は

$$\begin{pmatrix} Y_2 \\ M_2 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_2 \\ \theta_2 \\ v_3 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

である。この両者を重ね合わせると，以下となる。

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ M_1 = M_0 \\ Y_2 \\ M_2 = 0 \\ Y_3 \\ M_3 = 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3}\begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l & 0 & 0 \\ 6l & 4l^2 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 \\ -12 & -6l & 24 & 0 & -12 & 6l \\ 6l & 2l^2 & 0 & 8l^2 & -6l & 2l^2 \\ 0 & 0 & -12 & -6l & 12 & -6l \\ 0 & 0 & 6l & 2l^2 & -6l & 4l^2 \end{bmatrix}\begin{pmatrix} v_1 = 0 \\ \theta_1 \\ v_2 = 0 \\ \theta_2 \\ v_3 = 0 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

節点変位に関して未知マトリクスと既知マトリクスに分解すると

$$\begin{pmatrix} M_0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 4l^2 & 2l^2 & 0 \\ 2l^2 & 8l^2 & 2l^2 \\ 0 & 2l^2 & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ Y_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} 6l & 6l & 0 \\ -6l & 0 & 6l \\ 0 & -6l & -6l \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{pmatrix}$$

となり，これらよりたわみ角および支点反力が求められる。

$$\theta_1 = \frac{7M_0 l}{24EI}, \quad \theta_2 = -\frac{M_0 l}{12EI}, \quad \theta_3 = \frac{M_0 l}{24EI}$$

$$R_1 = -Y_1 = -\frac{5M_0}{4l}, \quad R_2 = -Y_2 = \frac{3M_0}{2l}, \quad R_3 = -Y_3 = -\frac{M_0}{4l}$$

【12.6】 例題 12.2 を参照すると，ラーメン構造全体の剛性方程式は以下となる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_2 = P \\ Y_2 = P \\ M_2 = M_0 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \beta & 0 & 0 & -\beta & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & 12 & 6l & 0 & -12 & 6l & 0 & 0 & 0 \\ & & 4l^2 & 0 & -6l & 2l^2 & 0 & 0 & 0 \\ & & & \beta+12 & 0 & -6l & -12 & 0 & -6l \\ & & & & \beta+12 & -6l & 0 & -\beta & 0 \\ & & & & & 8l^2 & 6l & 0 & 2l^2 \\ & & & & & & 12 & 0 & 6l \\ & & & & & & & \beta & 0 \\ & \text{sym.} & & & & & & & 4l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_1 = 0 \\ V_1 = 0 \\ \theta_1 = 0 \\ U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \\ U_3 = 0 \\ V_3 = 0 \\ \theta_3 = 0 \end{pmatrix}$$

未知変位は，下記の部分マトリクスを解いて得られる。

$$\begin{pmatrix} P \\ P \\ M_0 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} \beta+12 & 0 & -6l \\ 0 & \beta+12 & -6l \\ -6l & -6l & 8l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$U_2 = V_2 = \frac{Pl^3}{(\beta+3)EI} + \frac{3M_0 l^2}{4(\beta+3)EI}$$

$$\theta_2 = \frac{3Pl^2}{2(\beta+3)EI} + \frac{M_0 l(\beta+12)}{8(\beta+3)EI}$$

さらに，支点反力は下記の部分マトリクスを解いて得られる。

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ M_1 \\ X_3 \\ Y_3 \\ M_3 \end{pmatrix} = \frac{EI}{l^3} \begin{bmatrix} -\beta & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 6l \\ 0 & -6l & 2l^2 \\ -12 & 0 & 6l \\ 0 & -\beta & 0 \\ -6l & 0 & 2l^2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} U_2 \\ V_2 \\ \theta_2 \end{pmatrix}$$

$$X_1 = -\beta U_2 \frac{EI}{l^3} = -\frac{\beta P}{\beta+3} - \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}$$

$$Y_1 = \left(-12V_2 + 6l\theta_2\right)\frac{EI}{l^3} = -\frac{3P}{\beta+3} + \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}$$

$$M_1 = \left(-6lV_2 + 2l^2\theta_2\right)\frac{EI}{l^3} = -\frac{3Pl}{\beta+3} + \frac{(\beta-6)M_0}{4(\beta+3)}$$

$$X_3 = \left(-12U_2 + 6l\theta_2\right)\frac{EI}{l^3} = -\frac{3P}{\beta+3} + \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}$$

$$Y_3 = -\beta V_2 \frac{EI}{l^3} = -\frac{\beta P}{\beta+3} - \frac{3\beta M_0}{4(\beta+3)l}$$

$$M_3 = \left(-6lU_2 + 2l^2\theta_2\right)\frac{EI}{l^3} = -\frac{3Pl}{\beta+3} + \frac{(\beta-6)M_0}{4(\beta+3)}$$

以上