

輸送現象の基礎（付録の章）

宗像 健三

守田 幸路

著

「輸送現象の基礎」で付録を参照する箇所と対応する付録の節

ページ	「輸送現象の基礎」で付録を参照する箇所 章・節・小節	対応する付録の節
12	2. 物理量の保存式	7.17 ベクトルとテンソル
12	2. 物理量の保存式	7.18 ナブラ演算子による演算
14	2.1 質量の保存式 (連続の式)	7.1 実質微分
19	2.2 運動量の保存式	7.2 流体の内部応力と変形速度の関係
33	2.4 多成分系の物質の保存式	7.3 体積平均速度を用いた流速の表現
36	2.4 多成分系の物質の保存式	7.4 多成分系の拡散係数
37	2.5 いろいろな座標系での保存式	7.19 座標変換
52	3.1 完全流体の1次元流れ	7.21 流線の式
62	3.2 完全流体の2次元ポテンシャル流れ	7.2 流体の内部応力と変形速度の関係
72	3.3.1 円管内の流れ	7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分
78	3.3.3 平行な2枚の平板間の流れ	7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分
80	3.3.4 傾いた平板上の流体の流れ	7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分
82	3.3.5 回転円筒内での流れ	7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分
84	3.3.6 動く平板上の非定常流れ	7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分
85	3.3.6 動く平板上の非定常流れ	7.6 微分方程式の解法
88	3.4 境界層理論	7.7 境界層方程式の導出
88	3.4.1 一様流れの場合の解	7.8 境界層方程式の解法
94	3.5 乱流について	7.9 運動量の保存式の時間平均
95	3.5 乱流について	7.18 ナブラ演算子による演算
102	3.6.1 次元解析	7.10 より一般的な関数を用いた次元解析の取り扱い
124	4.1.8 有限な領域での非定常熱伝達	7.20 ベッセル関数
168	5.1.4 無限体系での非定常の拡散	7.6 微分方程式の解法
175	5.1.6 鉛直平面を流れる流体に対するガス吸収	7.6 微分方程式の解法
179	5.1.7 壁面で吸収反応の起こる管型反応器	7.6 微分方程式の解法
190	5.2.1 円管内層流場での物質移動 (グレッツ問題)	7.11 グレッツ問題の解
191	5.2.1 円管内層流場での物質移動 (グレッツ問題)	7.11 グレッツ問題の解
194	5.2.2 層流境界層における物質移動	7.12 境界層における物質移動
197	5.2.2 層流境界層における物質移動	7.12 境界層における物質移動
207	6.1 気体の熱伝導率, 粘性係数, 拡散係数	7.16 定積分について
207	6.1 気体の熱伝導率, 粘性係数, 拡散係数	7.14 平面に対する粒子の入射
207	6.1 気体の熱伝導率, 粘性係数, 拡散係数	7.15 気体分子の平均自由行程

目次

7 付録.....	4
7.1 実質微分.....	4
7.2 流体の内部応力と変形速度の関係.....	6
7.3 体積平均速度を用いた流束の表現.....	18
7.4 多成分系の拡散係数.....	20
7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分.....	22
7.6 微分方程式の解法.....	26
7.7 境界層方程式の導出.....	27
7.8 境界層方程式の解法.....	30
7.9 時間平均を施した保存式の導出.....	37
7.10 より一般的な関数を用いた次元解析の取り扱い.....	39
7.11 グレツ問題の解.....	41
7.12 境界層における物質移動.....	48
7.13 境界層方程式の積分形.....	58
7.14 平面に対する粒子の入射.....	60
7.15 気体分子の平均自由行程.....	62
7.16 定積分について.....	66
7.17 ベクトルとテンソル.....	67
7.18 ナブラ演算子による演算.....	71
7.19 座標変換.....	73
7.20 ベッセル関数.....	80
7.21 流線の式.....	82

7 付録

この章では、これまでの章の中で、示された式や式の導出に関してより詳細な説明を加えている。

7.1 実質微分

実質微分 (substantial derivative) あるいは物質微分 (material derivative) と呼ばれる演算子は次式で与えられる。

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.1-1)$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \quad (7.1-2)$$

ここで、実質微分は、速度 (v_x, v_y, v_z) を持つ流体の流れに乗って移動する座標系から見た物理量の変化を表す。例えば、以下に示す質量保存の式は、流体中に固定した座標系に基づいて表した保存式である。

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho v_z)}{\partial z} = 0 \quad (7.1-3)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla \rho) = 0 \quad (7.1-4)$$

上式を実質微分演算子を用いて書き直すと、

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = 0 \quad (7.1-5)$$


$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho(\nabla \cdot \mathbf{v}) = 0 \quad (7.1-6)$$

数学的には、(7.1-3)および(7.1-5)式は等価であり、それぞれに用いた座標系を、オイラー座標 (Euler coordinate) およびラグランジェ座標 (Lagrangian coordinate) と呼ぶ。

実質微分の意味をもう少し詳しく考えてみる。図 7.1-1 に示すように時刻 t に位置 (x, y, z) にあり速度 ($\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z$) を持つ流体粒子が、 Δt 時間後に $(x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z)$ に移動したとする。その位置での x 方向の速度成分は、テイラー展開を用いることにより、

$$\begin{aligned} & v_x(t + \Delta t, x + \Delta x, y + \Delta y, z + \Delta z) \\ &= v_x(t, x, y, z) + \frac{1}{1!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + \Delta x \frac{\partial}{\partial x} + \Delta y \frac{\partial}{\partial y} + \Delta z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 v_x + \dots \end{aligned} \quad (7.1-7)$$

となる。

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z \quad \mathbf{v} + \Delta \mathbf{v} = \mathbf{i}_x (v_x + \Delta v_x) + \mathbf{i}_y (v_y + \Delta v_y) + \mathbf{i}_z (v_z + \Delta v_z)$$


(t, x, y, z) (t + Δt, x + Δx, y + Δy, z + Δz)

図 7.1-1 流体粒子の運動

さらに、 $\Delta x = v_x \Delta t$ 、 $\Delta y = v_y \Delta t$ 、 $\Delta z = v_z \Delta t$ であるので、これらを上式に代入すると、

$$\begin{aligned} \Delta v_x &= \frac{1}{1!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + v_x \Delta t \frac{\partial}{\partial x} + v_y \Delta t \frac{\partial}{\partial y} + v_z \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x \\ &+ \frac{1}{2!} \left(\Delta t \frac{\partial}{\partial t} + v_x \Delta t \frac{\partial}{\partial x} + v_y \Delta t \frac{\partial}{\partial y} + v_z \Delta t \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 v_x + \dots \end{aligned} \quad (7.1-8)$$

したがって、

$$\begin{aligned} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} &= \frac{1}{1!} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x \\ &+ \frac{\Delta t}{2!} \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 v_x + \dots \end{aligned} \quad (7.1-9)$$

ここで、 $\Delta t \rightarrow 0$ の極限をとると、次式を得る。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) v_x = \frac{Dv_x}{Dt} \quad (7.1-10)$$

したがって、上式は速度($\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z$)で移動する座標からみた流体粒子の x 方向の速度成分の変化(すなわち加速度)を表している。このことから、以下の演算は加速度ベクトルを表すことになる。

$$\frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z) \quad (7.1-11)$$

同様に、ある物理量 A (例えば、密度や運動量)の速度($\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z$)で移動する座標からみた変化は、

$$\frac{DA}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_x \frac{\partial}{\partial x} + v_y \frac{\partial}{\partial y} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) A \quad (7.1-12)$$

で与えられることになる。

7.2 流体の内部応力と変形速度の関係

流体中の任意の点Pとそれに近傍したP'を考える。ここで、それぞれの点の座標、及びその位置での速度を

$$\begin{aligned} P & (x, y, z) & (v_x, v_y, v_z) \\ P' & (x + \delta x, y + \delta y, z + \delta z) & (v_x + \delta v_x, v_y + \delta v_y, v_z + \delta v_z) \end{aligned}$$

であるとする。P'における速度をPのまわりに、テイラー展開して、1次の項までを考えると、

$$\begin{pmatrix} \delta v_x \\ \delta v_y \\ \delta v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta x \\ \delta y \\ \delta z \end{pmatrix} \quad (7.2-1)$$

のように表される。上式の3×3の行列は、対称部分と反対称部分に分けられる。すなわち、

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{\partial v_x}{\partial y} & \frac{\partial v_x}{\partial z} \\ \frac{\partial v_y}{\partial x} & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{\partial v_y}{\partial z} \\ \frac{\partial v_z}{\partial x} & \frac{\partial v_z}{\partial y} & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (7.2-2)$$

$$e_{xx} = 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (7.2-3)$$

$$e_{yy} = 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} \quad (7.2-4)$$

$$e_{zz} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} \quad (7.2-5)$$

$$e_{xy} = e_{yx} = \frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (7.2-6)$$

$$e_{yz} = e_{zy} = \frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (7.2-7)$$

$$e_{zx} = e_{xz} = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (7.2-8)$$

$$\omega_x = \frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z} \quad (7.2-9)$$

$$\omega_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (7.2-10)$$

$$\omega_z = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \quad (7.2-11)$$

まず、対称部分の対角項 e_{xx} 、 e_{yy} 、 e_{zz} を考える。これらの項を1/2倍し、それぞれに δx 、 δy 、 δz を乗ずると次式を得る。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \quad (7.2-12)$$

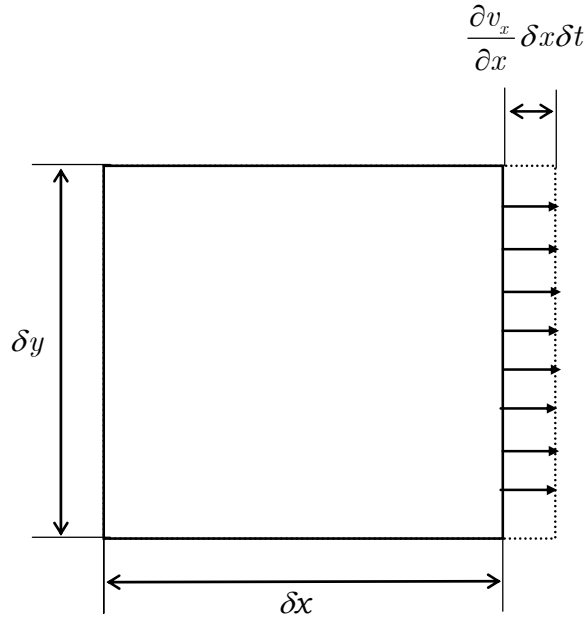


図 7.2-1 対角項による流体の変形

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \delta y \quad (7.2-13)$$

$$\frac{\partial v_z}{\partial z} \delta z \quad (7.2-14)$$

上式のうち x 方向の項を考えると、この項に微小な時間 δt を乗じたものは、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \delta x \delta t \quad (7.2-15)$$

であり、これは図 7.2-1 に示すように、 δt 時間当たりの x 方向の流体要素の伸びを表していることがわかる。 y 、 z 方向も同様に、対角項 e_{xx} 、 e_{yy} 、 e_{zz} は、流体の伸びを表していることになる。

次に反対称部分の非対角項 e_{xy} 、 e_{yx} 、 e_{yz} 、 e_{zy} 、 e_{zx} 、 e_{xz} を考える。簡単のため e_{xy} 、 e_{yx} の対を取り上げる。 $e_{xy} = e_{yx}$ の x 、 y 方向に関する微小変化は、

$$(x \text{ 方向}) \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta x \quad (7.2-16)$$

$$(y \text{ 方向}) \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta y \quad (7.2-17)$$

となるが、変化の方向に関係のある項だけを考えればよい。すなわち、(7.2-16)式の2項目 $\partial v_x / \partial y$ は、 y 方向の偏微分であり、 δx の微小変化とは無関係にあり、(7.2-17)式の1項目 $\partial v_y / \partial x$ は、 x 方向の偏微分であり、 δy の微小変化とは無関係にある。したがって、 x 、 y 方向には、それぞれの方向に直角方向の速度差が生じることになる。これを図示すると図 7.2-2 のようになる。すなわち、 δt の間に流体要素は平行四辺形に変形することになる。このとき、角度の変化は、それぞれ、

$$\gamma_1 \delta t = \frac{\partial v_x}{\partial y} \delta y \delta t \quad (7.2-18)$$

$$\gamma_2 \delta t = \frac{\partial v_y}{\partial x} \delta x \delta t \quad (7.2-19)$$

せん断変形速度を

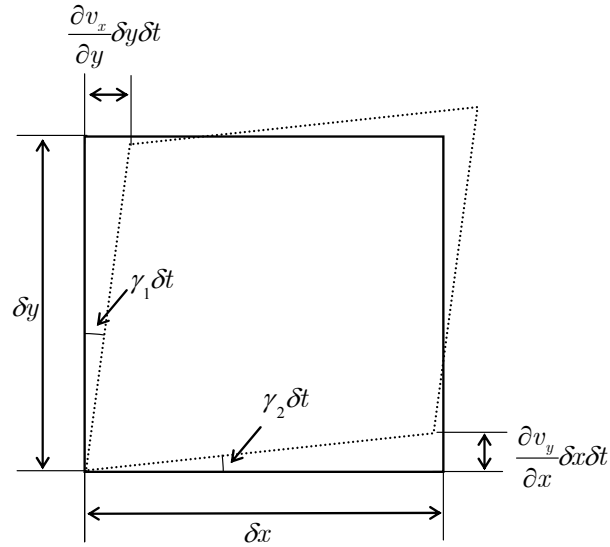


図 7.2-2 非対角項 e_{xy} 、 e_{yx} による流体の変形

$$\gamma_z = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \quad (7.2-20)$$

で定義する。 e_{yz} と e_{zy} 、 e_{zx} と e_{xz} のそれぞれの対に対しても、同様に考えると、 x 軸に垂直な面、 y 軸に垂直な面についてもせん断変形速度が、次のように定義される。

$$\gamma_x = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \quad (7.2-21)$$

$$\gamma_y = \frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \quad (7.2-22)$$

さらに、反対象部分の要素 ω_x 、 ω_y 、 ω_z が意味するところを考える。簡単のために、 $-\omega_z$ と ω_z の対を取り上げる。 $-\omega_z$ と ω_z の x 、 y 方向に関する微小変化は、

$$(x \text{ 方向}) \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta x \quad (7.2-23)$$

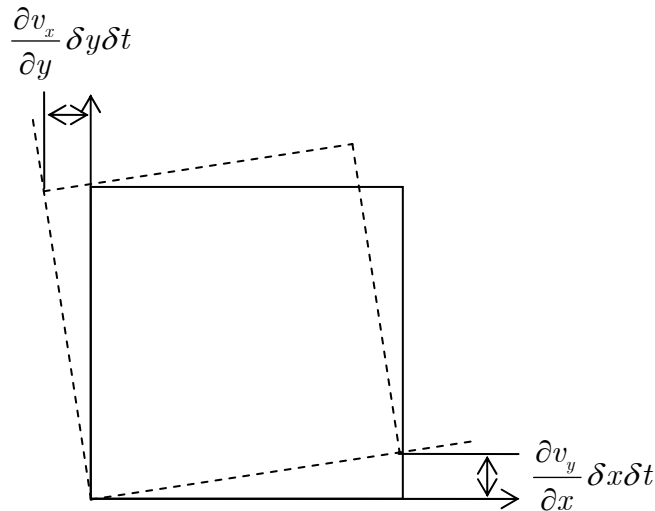


図 7.2-3 非対角項に $-\omega_z$ 、 ω_z による流体の回転

$$(y \text{ 方向}) \quad \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \delta y \quad (7.2-24)$$

となるが、変化の方向に関係のある項だけを考えればよい。すなわち、(7.2-23)式の2項目 $\partial v_x / \partial y$ は、 y 方向の偏微分であり、 δx の微小変化とは無関係にあり、(7.2-24)式の1項目 $\partial v_y / \partial x$ は、 x 方向の偏微分であり、 δy の微小変化とは無関係にある。したがって、この場合にも x 、 y それぞれの方向に直角方向の速度差が生じることになる。これを図示すると **図 7.2-3** のようになる。すなわち、 z 軸に関する流体素子の回転運動を表すことになる。同様に、 ω_x 、 ω_y はそれぞれ x 軸、 y 軸に関する回転を表しており、これらを渦度と呼ぶ。

次に、流体内部に働く応力を考える。各辺の長さが δx 、 δy 、 δz である微小な直方体を考える。この微小な直方体にかかる応力は示されるように分解される (**図 7.2-4**)。応力は、 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 、 τ_{xy} 、 τ_{xz} 、 τ_{yx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} 、 τ_{zy} の9種である。接線方向に働く表面応力 τ の最初の添字は、表面応力が働く面に垂直な軸を示しており、次の添字は、その表面応力が働く方向を示す。また、 τ の取り方の規則は、面の内向きの法線が正方向であるときには、正の向きが正、面の内向きの法線が負方向であるときには負の向きが正であるようにとる。 σ は法線方向に働く表面応力であり、添字は、表面応力が働く面に垂直な軸とその表面応力が働く方向を示す。図に示す流体要素が十分に小さい場合、 $\tau_{yx} + (\partial \tau_{yx} / \partial y) \delta y \approx \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} + (\partial \tau_{yz} / \partial y) \delta y \approx \tau_{yz}$ 、 $\tau_{yz} + (\partial \tau_{yz} / \partial x) \delta x \approx \tau_{yz}$ 、 $\tau_{zy} + (\partial \tau_{zy} / \partial x) \delta x \approx \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} + (\partial \tau_{zx} / \partial y) \delta y \approx \tau_{zx}$ 、 $\tau_{xz} + (\partial \tau_{xz} / \partial y) \delta y \approx \tau_{xz}$ 、 $\sigma_{xx} + (\partial \sigma_{xx} / \partial x) \delta x \approx \sigma_{xx}$ 、 $\sigma_{yy} + (\partial \sigma_{yy} / \partial y) \delta y \approx \sigma_{yy}$ 、 $\sigma_{zz} + (\partial \sigma_{zz} / \partial z) \delta z \approx \sigma_{zz}$ である。

これらの応力と流体要素の変形速度の関係を考える。まず、接線応力による変形を考える。簡単のために、 z 軸に垂直な面を考え、**図 7.2-5** に示すように力のバランスを考えると、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ が成り立つことになる。というのは、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ が成り立たなければ、流体要素が回転を始めることになり、全体を連続体として扱うことができなくなる。また、**図 7.2-5** に示すような接線応力が働いた場合、流体要素は点線で示すように変形する。

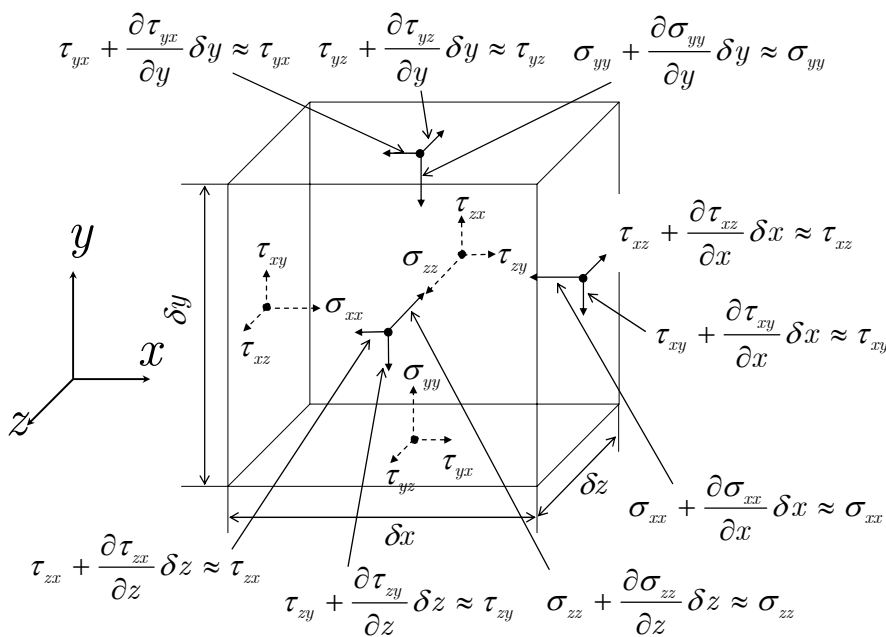


図 7.2-4 十分に小さい流体要素にかかる応力

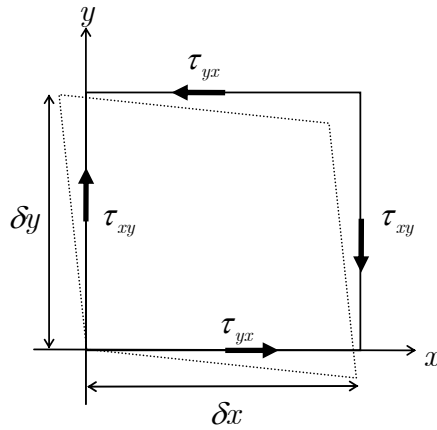


図 7.2-5 接線応力による変形

$\tau_{xy} = \tau_{yx}$ になることについてもう少し考察する。図 7.2-6 に示すように z 軸まわりの回転で、直六面体の z 軸まわりの慣性モーメントを I_z 、回転の角速度を ω_z とすれば、

$$I_z \frac{d\omega_z}{dt} = 2(\tau_{xy} \delta y \delta z) \frac{\delta x}{2} - 2(\tau_{yx} \delta z \delta x) \frac{\delta y}{2} \quad (7.2-25)$$

ここで、

$$I_z = \rho \frac{\delta x \delta y \delta z}{12} \{(\delta x)^2 + (\delta y)^2\} \quad (7.2-26)$$

であるので、これを代入すると、

$$\frac{d\omega_z}{dt} = \frac{12}{\rho} \frac{\tau_{xy} - \tau_{yx}}{(\delta x)^2 + (\delta y)^2} \quad (7.2-27)$$

となる。ここで、 $\tau_{xy} - \tau_{yx} \neq 0$ であるとすると、 $\delta x, \delta y \rightarrow 0$ の極限では、 $d\omega_z/dt \rightarrow \infty$ となる。このことは、流体素子が無限の角加速度をもつことになり、全体を連続体として扱えなくなる。

さて、図 7.2-2 に示すような接線応力が働いた場合、流体要素は点線で示すように変形する。ところで、図 7.2-2 では暗に $\partial v_x / \partial y$ と $\partial v_y / \partial x$ が正であることを仮定していた。それでは、 $\partial v_x / \partial y$ と $\partial v_y / \partial x$ が負である場合には、どうなるのかを図 7.2-7 に示す。この変形は、接線応力が働いた場合の変形 (図 7.2-5) に一致する。変形速度と接線応力が比例関係にあるとすれば、

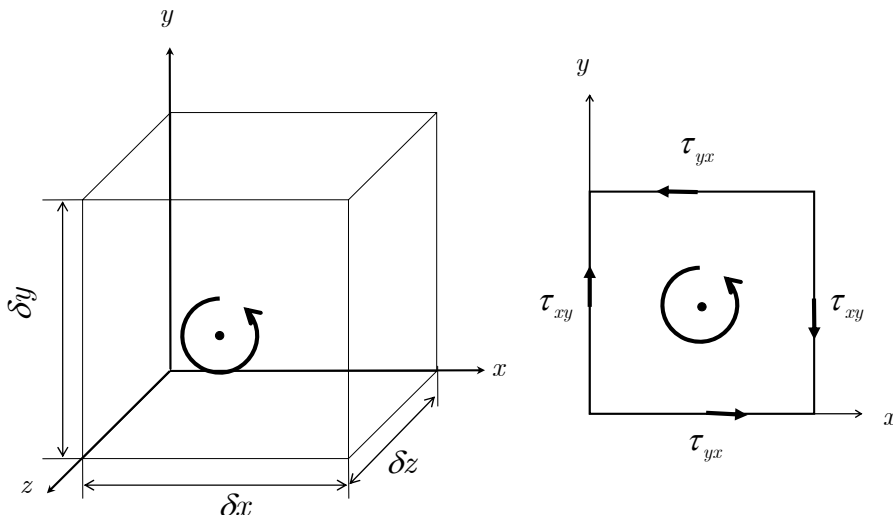


図 7.2-6 流体素子にかかる接線応力と回転

後々の取り扱いが簡単になる。この関係が成り立つ流体をニュートン流体と呼ぶ。実際に、特殊な流体を除いて、ほとんどの流体には、この仮定が成り立つことが実験的に確認されている。正の向きの接線応力 ($\tau_{xy} = \tau_{yx}$) が働くことにより、流体要素が負のせん断変形速度でひしゃげるような変形をするので、比例定数を $-\mu$ (μ は粘性係数) とすることにより、

$$\tau_{xy} = \tau_{yx} = -\mu\gamma_z = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x}\right) \quad (7.2-28)$$

として接線応力の成分を流体要素の速度成分の関数として表すことができるようになった。 x 、 y 軸に垂直な面についても同様な議論を行えば、

$$\tau_{yz} = \tau_{zy} = -\mu\gamma_x = -\mu\left(\frac{\partial v_z}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial z}\right) \quad (7.2-29)$$

$$\tau_{zx} = \tau_{xz} = -\mu\gamma_y = -\mu\left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x}\right) \quad (7.2-30)$$

となる。

次に、法線応力 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} による変形を考える。先ほどと同様に、これらの法線応力により、 z に垂直な面 (簡単のために正方形 ABCD をとる) を考え、十分に小さい流体要素が、微小な時間 δt の間に、**図 7.2-8** の点線で示す形に変形したとする。ここで、座標を右に $\pi/4$ 回転させて正方形 EFGH について見てみると、これは前に説明したせん断変形を行ったのと同値であることがわかる。ここで、右上の三角形の領域を取り上げて、そこでの力の釣り合いを考えると、

$$-\tau \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} dl = \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{xx} \frac{dl}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_{yy} \frac{dl}{2} \quad (7.2-31)$$

より、

$$-\tau = \frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) \quad (7.2-32)$$

となる。四角形 EFGH の変形は、反作用で働くせん断応力 τ で起こり、そのときの変形は、変形

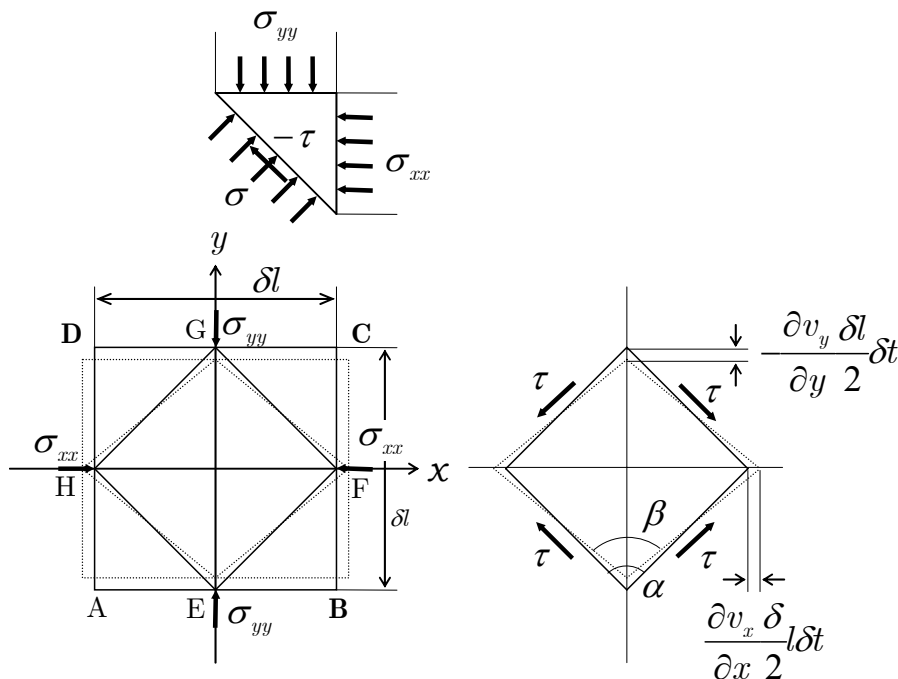


図 7.2-8 法線応力による流体の変形と力のバランス

速度 γ を用いると

$$\alpha - \beta = \gamma \delta t \approx 2 \times \frac{-\frac{\partial v_x}{\partial x} \frac{\delta l}{2\sqrt{2}} \delta t + \frac{\partial v_y}{\partial y} \frac{\delta l}{2\sqrt{2}} \delta t}{\frac{\delta l}{\sqrt{2}}} \quad (7.2-33)$$

より

$$\gamma = \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \quad (7.2-34)$$

したがって、ニュートン流体であれば、(7.2-28)式より、

$$\tau = -\frac{1}{2}(\sigma_{xx} - \sigma_{yy}) = -\mu\gamma = -\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \quad (7.2-35)$$

$$\sigma_{xx} - \sigma_{yy} = -2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{\partial v_y}{\partial y} \right) \quad (7.2-36)$$

x 、 y 軸に垂直な面についても同様な議論を行えば、

$$\sigma_{yy} - \sigma_{zz} = -2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-37)$$

$$\sigma_{zz} - \sigma_{xx} = -2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} - \frac{\partial v_x}{\partial x} \right) \quad (7.2-38)$$

ここで、法線応力の平均値をとり、流体力学的な圧力 \bar{P} を定義する。

$$\bar{P} = \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \approx P \quad (7.2-39)$$

\bar{P} は静止している物体に働く静圧とは異なるが、流体素子の体積膨張速度が大きくなければ、静圧での圧力とほぼ一致する。(7.2-39)式に、(7.2-36)および(7.2-38)式を代入し、 σ_y と σ_z を消去すると次式を得る。

$$\sigma_{xx} = P - 2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-40)$$

同様な手続きを行えば、

$$\sigma_{yy} = P - 2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-41)$$

$$\sigma_{zz} = P - 2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-42)$$

が得られる。(7.2-28)、(7.2-29)、(7.2-30)、(7.2-40)、(7.2-41)、(7.2-42)式により、せん断応力と法線応力を流体要素の速度成分の関数として表すことができるようになった。また、(7.2-40)、(7.2-41)、(7.2-42)式を以下のように表現する。

$$\sigma_{xx} = P + \tau_{xx} \quad (7.2-43)$$

$$\sigma_{yy} = P + \tau_{yy} \quad (7.2-44)$$

$$\sigma_{zz} = P + \tau_{zz} \quad (7.2-45)$$

$$\tau_{xx} = -2\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right) + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-46)$$

$$\tau_{yy} = -2\mu \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right) + \frac{2}{3} \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-47)$$

$$\tau_{zz} = -2\mu \left(\frac{\partial v_z}{\partial z} \right) + \frac{2}{3}\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \quad (7.2-48)$$

τ_{xx} 、 τ_{yy} 、 τ_{zz} は、圧力を別に考慮したときの法線応力である。

上では、幾何学的な考察からせん断応力と流体の速度勾配の関係を導いたが、ここでは座標変換から同様な関係を導く。まず、応力と変形速度の間に次式の関係が成立すると仮定する。すなわち、応力が変形速度の線形結合 (C_{ij} は定数) で表せるとする。前に述べたように、流体が連続体として取り扱えるには、 $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ 、 $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ 、 $\tau_{zx} = \tau_{xz}$ である必要があるので、6個の接線応力のうち3個だけを考えればよく、変形速度についても、 $e_{xy} = e_{yx}$ 、 $e_{yz} = e_{zy}$ 、 $e_{zx} = e_{xz}$ であるから、6個のせん断変形のうち3個だけを考えればよいので、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{bmatrix} \quad (7.2-49)$$

ここで、**図 7.2-4** に示した座標軸を z 軸のまわりに 180 度回転させ、その座標系を \bar{x} 、 \bar{y} 、 \bar{z} で表すとする。回転によって、新しい座標系ではもともとの x 方向と y 方向が逆向きになる。新しい座標系での応力の方向を調べると、 τ_{xz} 、 τ_{zx} 、 τ_{yz} 、 τ_{zy} が逆の向きになり、他の応力の成分には変化がないことがわかる。したがって、新しい座標系ともともとの座標系における上記応力成分の関係は以下のようなになる。

$$\tau_{\bar{z}\bar{x}} = -\tau_{zx} \quad (7.2-50)$$

$$\tau_{\bar{y}\bar{z}} = -\tau_{yz} \quad (7.2-51)$$

$$\tau_{\bar{x}\bar{y}} = \tau_{xy} \quad (7.2-52)$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \sigma_{xx} \quad (7.2-53)$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \sigma_{yy} \quad (7.2-54)$$

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = \sigma_{zz} \quad (7.2-55)$$

ただし、圧力 P は方向性のない量であるから、座標変換しても変化しない。また、変形速度に関しては、 $\bar{x} = -x$ 、 $\bar{y} = -y$ 、 $\bar{z} = z$ 、 $v_{\bar{x}} = -v_x$ 、 $v_{\bar{y}} = -v_y$ 、 $v_{\bar{z}} = v_z$ の関係より、

$$e_{\bar{z}\bar{x}} = \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial(-v_x)}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial(-x)} = -\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = -e_{zx} \quad (7.2-56)$$

$$e_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial(-v_y)}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial(-y)} = -\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} = -e_{yz} \quad (7.2-57)$$

他の変形速度の成分は以下のように変化がない、

$$e_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} + \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial(-v_x)}{\partial(-y)} + \frac{\partial(-v_y)}{\partial(-x)} = \frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} = e_{xy} \quad (7.2-58)$$

$$e_{\bar{x}\bar{x}} = 2 \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} = 2 \frac{\partial(-v_x)}{\partial(-x)} = e_{xx} \quad (7.2-59)$$

$$e_{\bar{y}\bar{y}} = 2 \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} = 2 \frac{\partial(-v_y)}{\partial(-y)} = e_{yy} \quad (7.2-60)$$

$$e_{\bar{z}\bar{z}} = 2 \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{z}} = 2 \frac{\partial v_z}{\partial z} = e_{zz} \quad (7.2-61)$$

流体の物性に特別の方向性がない限り、新しい座標系においても、(7.2-49)式は成立するので、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{\bar{x}\bar{x}} - P \\ \sigma_{\bar{y}\bar{y}} - P \\ \sigma_{\bar{z}\bar{z}} - P \\ \tau_{\bar{x}\bar{y}} \\ \tau_{\bar{y}\bar{z}} \\ \tau_{\bar{z}\bar{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{\bar{x}\bar{x}} \\ e_{\bar{y}\bar{y}} \\ e_{\bar{z}\bar{z}} \\ e_{\bar{x}\bar{y}} \\ e_{\bar{y}\bar{z}} \\ e_{\bar{z}\bar{x}} \end{bmatrix} \quad (7.2-62)$$

したがって、(7.2-49)式((7.2-62)式でもよい) に(7.2-50)~(7.2-61)式を代入すると、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ \tau_{xy} \\ -\tau_{yz} \\ -\tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ -e_{yz} \\ -e_{zx} \end{bmatrix} \quad (7.2-63)$$

上式と (7.2-49)式が恒等的に成り立つためには、上式の破線で囲んだ部分がゼロになる必要がある。同様に、 x 軸、 y 軸に関して、180 度の回転の操作をすると、結果的に

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{bmatrix} \quad (7.2-64)$$

が得られる。 z 軸の正の方向に関して時計回りに 90 度回転させた場合には、

$$\tau_{\bar{z}\bar{x}} = -\tau_{yz} \quad (7.2-65)$$

$$\tau_{\bar{y}\bar{z}} = \tau_{xz} = \tau_{zx} \quad (7.2-66)$$

$$\tau_{\bar{x}\bar{y}} = -\tau_{yx} = -\tau_{xy} \quad (7.2-67)$$

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = \sigma_{yy} \quad (7.2-68)$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = \sigma_{xx} \quad (7.2-69)$$

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = \sigma_{zz} \quad (7.2-70)$$

また、 $\bar{x} = y$ 、 $\bar{y} = -x$ 、 $\bar{z} = z$ 、 $v_{\bar{x}} = v_y$ 、 $v_{\bar{y}} = -v_x$ 、 $v_{\bar{z}} = v_z$ より、

$$e_{\bar{z}\bar{x}} = \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{x}} = \frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} = e_{yz} \quad (7.2-71)$$

$$e_{\bar{y}\bar{z}} = \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{z}} + \frac{\partial v_{\bar{z}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial(-v_x)}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial(-x)} = -\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x} = -e_{zx} \quad (7.2-72)$$

$$e_{\bar{x}\bar{y}} = \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{x}} + \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{y}} = \frac{\partial(-v_x)}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial(-x)} = -\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = -e_{xy} \quad (7.2-73)$$

$$e_{\bar{x}\bar{x}} = 2 \frac{\partial v_{\bar{x}}}{\partial \bar{x}} = 2 \frac{\partial v_y}{\partial y} = e_{yy} \quad (7.2-74)$$

$$e_{\bar{y}\bar{y}} = 2 \frac{\partial v_{\bar{y}}}{\partial \bar{y}} = 2 \frac{\partial(-v_x)}{\partial(-x)} = 2 \frac{\partial v_x}{\partial x} = e_{xx} \quad (7.2-75)$$

$$e_{\bar{z}\bar{z}} = e_{zz} \quad (7.2-76)$$

上記の関係を(7.2-64)式に代入すると、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ -\tau_{xy} \\ \tau_{zx} \\ -\tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{yy} \\ e_{xx} \\ e_{zz} \\ -e_{xy} \\ e_{zx} \\ -e_{yz} \end{bmatrix} \quad (7.2-77)$$

上式を書き直すと、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{22} & C_{21} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{32} & C_{31} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{bmatrix} \quad (7.2-78)$$

上式と(7.2-64)式を比較すると、 $C_{11} = C_{22}$ 、 $C_{12} = C_{21}$ 、 $C_{31} = C_{32}$ 、 $C_{13} = C_{23}$ 、 $C_{55} = C_{66}$ が得られる。さらに、 x 軸や y 軸に関して90度回転させた場合を考えると、

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{12} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{12} & C_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{bmatrix} \quad (7.2-79)$$

となる。 z 軸に関して座標軸を θ ラジアン回転した場合、変形速度は、

$$e_{\bar{x}\bar{x}} = (\cos^2 \theta)e_{xx} + (2 \cos \theta \sin \theta)e_{xy} + (\sin^2 \theta)e_{yy} \quad (7.2-80)$$

$$e_{\bar{y}\bar{y}} = (\sin^2 \theta)e_{xx} - (2 \cos \theta \sin \theta)e_{xy} + (\cos^2 \theta)e_{yy} \quad (7.2-81)$$

$$e_{\bar{z}\bar{z}} = e_{zz} \quad (7.2-82)$$

$$e_{\bar{z}\bar{x}} = -(\cos \theta \sin \theta)e_{xx} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)e_{xy} + \cos \theta \sin \theta e_{yy} \quad (7.2-83)$$

$$e_{\bar{y}\bar{z}} = -(\sin \theta)e_{zx} + (\cos \theta)e_{yz} \quad (7.2-84)$$

$$e_{\bar{z}\bar{x}} = (\cos \theta)e_{zx} + (\sin \theta)e_{yz} \quad (7.2-85)$$

のように座標変換される。表面応力も同様に変換を受け、

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} = (\cos^2 \theta)\sigma_{xx} + (2 \cos \theta \sin \theta)\tau_{xy} + (\sin^2 \theta)\sigma_{yy} \quad (7.2-86)$$

$$\sigma_{\bar{y}\bar{y}} = (\sin^2 \theta)\sigma_{xx} - (2 \cos \theta \sin \theta)\tau_{xy} + (\cos^2 \theta)\sigma_{yy} \quad (7.2-87)$$

$$\sigma_{\bar{z}\bar{z}} = \sigma_{zz} \quad (7.2-88)$$

$$\tau_{\bar{z}\bar{x}} = -(\cos \theta \sin \theta) \sigma_{xx} + (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) \tau_{xy} + \cos \theta \sin \theta \sigma_{yy} \quad (7.2-89)$$

$$\tau_{\bar{y}\bar{z}} = -(\sin \theta) \tau_{zx} + (\cos \theta) \tau_{yz} \quad (7.2-90)$$

$$\tau_{\bar{z}\bar{x}} = (\cos \theta) \tau_{zx} + (\sin \theta) \tau_{yz} \quad (7.2-91)$$

(7.2-79)式より、

$$\sigma_{\bar{x}\bar{x}} - P = C_{11} e_{\bar{x}\bar{x}} + C_{12} e_{\bar{y}\bar{y}} + C_{12} e_{\bar{z}\bar{z}} \quad (7.2-92)$$

であるが、(7.2-92)式に(7.2-86)、(7.2-80)、(7.2-81)、(7.2-82)式を代入すると、

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \theta) \sigma_{xx} + (2 \cos \theta \sin \theta) \tau_{xy} + (\sin^2 \theta) \sigma_{yy} - P \\ &= C_{11} [(\cos^2 \theta) e_{xx} + (2 \cos \theta \sin \theta) e_{xy} + (\sin^2 \theta) e_{yy}] \\ & \quad + C_{12} [(\sin^2 \theta) e_{xx} - (2 \cos \theta \sin \theta) e_{xy} + (\cos^2 \theta) e_{yy}] + C_{12} e_{zz} \end{aligned} \quad (7.2-93)$$

(7.2-79)式より、

$$\sigma_{xx} - P = C_{11} e_{xx} + C_{12} e_{yy} + C_{12} e_{zz} \quad (7.2-94)$$

$$\sigma_{yy} - P = C_{12} e_{xx} + C_{11} e_{yy} + C_{12} e_{zz} \quad (7.2-95)$$

$$\tau_{xy} = C_{44} e_{xy} \quad (7.2-96)$$

(7.2-93)式に(7.2-94)~(7.2-96)式を代入すると、

$$\begin{aligned} & (\cos^2 \theta) (P + C_{11} e_{xx} + C_{12} e_{yy} + C_{12} e_{zz}) + (2 \cos \theta \sin \theta) C_{44} e_{xy} \\ & + (\sin^2 \theta) (P + C_{12} e_{xx} + C_{11} e_{yy} + C_{12} e_{zz}) - P \\ &= C_{11} [(\cos^2 \theta) e_{xx} + (2 \cos \theta \sin \theta) e_{xy} + (\sin^2 \theta) e_{yy}] \\ & \quad + C_{12} [(\sin^2 \theta) e_{xx} - (2 \cos \theta \sin \theta) e_{xy} + (\cos^2 \theta) e_{yy}] + C_{12} e_{zz} \end{aligned} \quad (7.2-97)$$

上式をまとめると、

$$2(\cos \theta \sin \theta) e_{xy} (C_{44} - C_{11} + C_{12}) = 0 \quad (7.2-98)$$

上式が恒等的に成立するためには、

$$C_{11} = C_{44} + C_{12} \quad (7.2-99)$$

である必要がある。ここで、

$$C_{44} = -\mu \quad (7.2-100)$$

$$C_{12} = -\lambda/2 \quad (7.2-101)$$

とすれば、

$$C_{11} = -\mu - \lambda/2 \quad (7.2-102)$$

上式中の μ は粘性係数であり、 λ は第二粘性係数とよばれる。(7.2-100)~(7.2-102)を用いると、

(7.2-79)式は次式のように表現される。

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} - P \\ \sigma_{yy} - P \\ \sigma_{zz} - P \\ \tau_{xy} \\ \tau_{yz} \\ \tau_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu - \lambda/2 & -\lambda/2 & -\lambda/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda/2 & -\mu - \lambda/2 & -\lambda/2 & 0 & 0 & 0 \\ -\lambda/2 & -\lambda/2 & -\mu - \lambda/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mu \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{xx} \\ e_{yy} \\ e_{zz} \\ e_{xy} \\ e_{yz} \\ e_{zx} \end{bmatrix} \quad (7.2-103)$$

上式より、

$$\sigma_{xx} - P = -\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)e_{xx} - \frac{\lambda}{2}e_{yy} - \frac{\lambda}{2}e_{zz} \quad (7.2-104)$$

$$\sigma_{yy} - P = -\frac{\lambda}{2}e_{xx} + -\left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)e_{yy} - \frac{\lambda}{2}e_{zz} \quad (7.2-105)$$

$$\sigma_{zz} - P = -\frac{\lambda}{2}e_{xx} - \frac{\lambda}{2}e_{yy} - \left(\mu + \frac{\lambda}{2}\right)e_{zz} \quad (7.2-106)$$

(7.2-104)~(7.2-106)式を片々足し合わせ、3で割ると、

$$\frac{\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}}{3} - P = -\frac{1}{3}\mu(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) - \frac{1}{2}\lambda(e_{xx} + e_{yy} + e_{zz}) \quad (7.2-107)$$

$\bar{P} = (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})/3$ は流体力学的圧力であるが、通常の流体では、

$$\bar{P} \approx P \quad (7.2-108)$$

であるから、

$$\lambda \approx -\frac{2}{3}\mu \quad (7.2-109)$$

になる。また、体積粘性係数 κ を用いて、

$$\lambda = \kappa - \frac{2}{3}\mu \quad (7.2-110)$$

と表現することがある。ただし、通常の流体では κ は考慮しない。

7.3 体積平均速度を用いた流束の表現

体積平均速度 \mathbf{v}^* $[\mathbf{i}_x v_x^* + \mathbf{i}_y v_y^* + \mathbf{i}_z v_z^*]$ を次式で定義する。

$$\mathbf{v}^* = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{V}_j \mathbf{v}_j \quad (7.3-1)$$

$$v_x^* = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{V}_j v_{j,x} \quad (7.3-2)$$

$$v_y^* = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{V}_j v_{j,y} \quad (7.3-3)$$

$$v_z^* = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{V}_j v_{j,z} \quad (7.3-4)$$

\tilde{V}_j は j 成分の部分モル体積[m³/mol]、 v_x^* 、 v_y^* 、 v_z^* は、体積平均速度 \mathbf{v}^* の x 、 y 、 z 方向の成分である。ここで、

$$c_i \tilde{V}_i = c_i \left(\frac{\partial V}{\partial N_i} \right)_{N_j(j \neq i)} = c_i M_i \left(\frac{\partial V}{\partial (M_i N_i)} \right)_{N_j(j \neq i)} = \rho_i \left(\frac{\partial V}{\partial m_i} \right)_{m_j(j \neq i)} \quad (7.3-5)$$

N_i と m_i は i 成分のモル数と質量である。密度一定の場合には、

$$\left(\frac{\partial V}{\partial m_i} \right)_{m_j(j \neq i)} = \frac{1}{\rho} \quad (7.3-6)$$

となるので、

$$c_i \tilde{V}_i = \frac{\rho_i}{\rho} = \omega_i \quad (7.3-7)$$

したがって、密度一定の場合、

$$\mathbf{v}^* = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{V}_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n \omega_j \mathbf{v}_j = \mathbf{v} \quad (7.3-8)$$

となり、体積平均速度は質量平均速度と一致する。また、理想気体の場合には、

$$\begin{aligned} c_i \bar{V}_i &= c_i \left(\frac{\partial V}{\partial N_i} \right)_{N_j(j \neq i)} = c_i \left[\frac{\partial}{\partial N_i} \left(\frac{RT(N_1 + N_2 + \dots)}{P} \right) \right]_{N_j(j \neq i)} \\ &= c_i \left(\frac{RT}{P} \right) = \frac{c_i}{c} = x_i \end{aligned} \quad (7.3-9)$$

上式を用いると、体積平均速度は以下のように、モル平均速度と一致する。

$$\mathbf{v}^* = \sum_{j=1}^n c_j \tilde{V}_j \mathbf{v}_j = \sum_{j=1}^n x_j \mathbf{v}_j = \mathbf{v}^* \quad (7.3-10)$$

体積平均速度を用いた場合、 i と j からなる 2 成分系のモル濃度基準の i 成分の流束 \mathbf{N}_i^* と j 成分の流束 \mathbf{N}_j^* は以下のように表される。

$$\mathbf{N}_i^* = -\mathcal{D}_{ij} \nabla c_i + c_i \mathbf{v}^* \quad (7.3-11)$$

$$\mathbf{N}_j^* = -\mathcal{D}_{ij} \nabla c_j + c_j \mathbf{v}^* \quad (7.3-12)$$

上式を片々足し合わせると、

$$\mathbf{N}_i^* + \mathbf{N}_j^* = -\mathcal{D}_{ij} \nabla (c_i + c_j) + (c_i + c_j) \mathbf{v}^* \quad (7.3-13)$$

$$c \mathbf{v}^* = -\mathcal{D}_{ij} \nabla c + c \mathbf{v}^* \quad (7.3-14)$$

(7.3-11)式を以下のように書き換える。

$$\mathbf{N}_i^* = -\mathcal{D}_{ij}\nabla(cx_i) + cx_i\mathbf{v}^* = -\mathcal{D}_{ij}c\nabla x_i - x_i(\mathcal{D}_{ij}\nabla c + c_i\mathbf{v}^*) \quad (7.3-15)$$

上式に(7.3-14)式を代入すると、

$$\mathbf{N}_i^* = -c\mathcal{D}_{ij}\nabla x_i - x_i\mathbf{v}^* \quad (7.3-16)$$

になり、モル平均速度を用いた流束の表現に帰着することがわかる。

同様に、 i と j からなる2成分系の質量濃度基準の i 成分の流束 \mathbf{N}_i と j 成分の流束 \mathbf{N}_j は以下のように表される。

$$\mathbf{N}_i = -\mathcal{D}_{ij}\nabla\rho_i + \rho_i\mathbf{v}^* \quad (7.3-17)$$

$$\mathbf{N}_j = -\mathcal{D}_{ij}\nabla\rho_j + \rho_j\mathbf{v}^* \quad (7.3-18)$$

上式を片々足し合わせると、

$$\mathbf{N}_i + \mathbf{N}_j = -\mathcal{D}_{ij}\nabla(\rho_i + \rho_j) + (\rho_i + \rho_j)\mathbf{v}^* \quad (7.3-19)$$

$$\rho\mathbf{v} = -\mathcal{D}_{ij}\nabla\rho + \rho\mathbf{v}^* \quad (7.3-20)$$

(7.3-17)式を以下のように書き換える。

$$\mathbf{N}_i = -\mathcal{D}_{ij}\nabla(\rho\omega_i) + \rho\omega_i\mathbf{v}^* = -\mathcal{D}_{ij}\rho\nabla\omega_i - \omega_i(\mathcal{D}_{ij}\nabla\rho + \rho_i\mathbf{v}^*) \quad (7.3-21)$$

上式に(7.3-20)式を代入すると、

$$\mathbf{N}_i = -\rho\mathcal{D}_{ij}\nabla\omega_i - \omega_i\mathbf{v} \quad (7.3-22)$$

になり、質量平均速度を用いた流束の表現に帰着することがわかる。上記のことから、例えば Cussler の成書では、体積平均速度を用いて物質の保存式を取り扱うことが推奨されている。

7.4 多成分系の拡散係数

Curtiss と Hirschfelder による多成分系の拡散の表現方法を用いると、 D_{ij} は多成分系拡散係数であり、以下のように表される。

$$D_{ij} = 0 \quad (i = j) \quad (7.4-1)$$

$$D_{ij} = \frac{1}{M_j} \left(\sum_{k=1}^N x_k M_k \right) \frac{|K^{ji}| - |K^{ii}|}{|K|} \quad (7.4-2)$$

ここで、 $|K|$ は以下のコンポーネントで構成される行列 K の行列式である。

$$K_{ii} = 0 \quad (7.4-3)$$

$$K_{ij} = \frac{x_i}{\mathcal{D}_{ij}} + \frac{M_j}{M_i} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^n \frac{x_k}{\mathcal{D}_{ik}} \quad ; i \neq j \quad (7.4-4)$$

$$|K| = \begin{vmatrix} K_{1,1} & \cdot & \cdot & K_{1,j-1} & K_{1,j} & K_{1,j+1} & \cdot & \cdot & K_{1,N} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ K_{i-1,1} & \cdot & \cdot & K_{i-1,j-1} & K_{i-1,j} & K_{i-1,j+1} & \cdot & \cdot & K_{i-1,N} \\ K_{i,1} & \cdot & \cdot & K_{i,j-1} & K_{i,j} & K_{i,j+1} & \cdot & \cdot & K_{i,N} \\ K_{i+1,1} & \cdot & \cdot & K_{i+1,j-1} & K_{i+1,j} & K_{i+1,j+1} & \cdot & \cdot & K_{i+1,N} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ K_{N,1} & \cdot & \cdot & K_{N,j-1} & K_{N,j} & K_{N,j+1} & \cdot & \cdot & K_{N,N} \end{vmatrix} \quad (7.4-5)$$

また、 $|K^{ji}|$ は以下で示される小行列式である。すなわち、 K^{ji} は行列 K の j 行目と i 列目のコンポーネントを全てとりさった行列である。

$$|K^{ji}| = (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} K_{1,1} & \cdot & \cdot & K_{1,i-1} & K_{1,i+1} & \cdot & \cdot & K_{1,N} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ K_{j-1,1} & \cdot & \cdot & K_{j-1,i-1} & K_{j-1,i+1} & \cdot & \cdot & K_{j-1,N} \\ K_{j+1,1} & \cdot & \cdot & K_{j+1,i-1} & K_{j+1,i+1} & \cdot & \cdot & K_{j+1,N} \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ K_{N,1} & \cdot & \cdot & K_{N,i-1} & K_{N,i+1} & \cdot & \cdot & K_{N,N} \end{vmatrix} \quad (7.4-6)$$

1,2,3 からなる 3 成分系で実際に計算を行ってみると、以下のようなになる。

$$D_{12} = \frac{M_1 x_1 + M_2 x_2 + M_3 x_3}{M_2} \frac{|K^{21}| - |K^{11}|}{|K|} \quad (7.4-7)$$

$$K_{11} = K_{22} = K_{33} = 0 \quad (7.4-8)$$

$$K_{12} = \frac{x_1}{\mathcal{D}_{12}} + \frac{M_2}{M_1} \left(\frac{x_2}{\mathcal{D}_{12}} + \frac{x_3}{\mathcal{D}_{13}} \right) \quad (7.4-9)$$

$$K_{13} = \frac{x_1}{\mathcal{D}_{13}} + \frac{M_3}{M_1} \left(\frac{x_2}{\mathcal{D}_{12}} + \frac{x_3}{\mathcal{D}_{13}} \right) \quad (7.4-10)$$

$$K_{23} = \frac{x_2}{\mathcal{D}_{23}} + \frac{M_3}{M_2} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{21}} + \frac{x_3}{\mathcal{D}_{23}} \right) = \frac{x_2}{\mathcal{D}_{23}} + \frac{M_3}{M_2} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{12}} + \frac{x_3}{\mathcal{D}_{23}} \right) \quad (7.4-11)$$

$$K_{21} = \frac{x_2}{\mathcal{D}_{21}} + \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{21}} + \frac{x_3}{\mathcal{D}_{23}} \right) = \frac{x_2}{\mathcal{D}_{12}} + \frac{M_1}{M_2} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{12}} + \frac{x_3}{\mathcal{D}_{23}} \right) \quad (7.4-12)$$

$$K_{31} = \frac{x_3}{\mathcal{D}_{31}} + \frac{M_1}{M_3} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{31}} + \frac{x_2}{\mathcal{D}_{32}} \right) = \frac{x_3}{\mathcal{D}_{13}} + \frac{M_1}{M_3} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{13}} + \frac{x_2}{\mathcal{D}_{23}} \right) \quad (7.4-13)$$

$$K_{32} = \frac{x_3}{\mathcal{D}_{32}} + \frac{M_2}{M_3} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{31}} + \frac{x_2}{\mathcal{D}_{32}} \right) = \frac{x_3}{\mathcal{D}_{23}} + \frac{M_2}{M_3} \left(\frac{x_1}{\mathcal{D}_{13}} + \frac{x_2}{\mathcal{D}_{23}} \right) \quad (7.4-14)$$

$$|K| = \begin{vmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & K_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{2,1} & 0 & K_{2,3} \\ K_{3,1} & K_{3,2} & 0 \end{vmatrix} = K_{1,2}K_{2,3}K_{3,1} + K_{1,3}K_{2,1}K_{3,2} \quad (7.4-15)$$

$$|K^{21}| = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{3,2} & K_{3,3} \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} K_{1,2} & K_{1,3} \\ K_{3,2} & 0 \end{vmatrix} = K_{1,3}K_{3,2} \quad (7.4-16)$$

$$|K^{11}| = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} K_{2,2} & K_{2,3} \\ K_{3,2} & K_{3,3} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & K_{2,3} \\ K_{3,2} & 0 \end{vmatrix} = -K_{2,3}K_{3,2} \quad (7.4-17)$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \frac{M_1x_1 + M_2x_2 + M_3x_3}{M_2} \frac{K_{3,1}K_{2,3} + K_{2,3}K_{3,2}}{K_{1,2}K_{2,3}K_{3,1} + K_{1,3}K_{2,1}K_{3,2}} \\ &= \mathcal{D}_{12} \left(1 + \frac{x_3(M_3/M_2)\mathcal{D}_{13} - \mathcal{D}_{12}}{x_1\mathcal{D}_{23} + x_2\mathcal{D}_{13} + x_3\mathcal{D}_{23}} \right) \end{aligned} \quad (7.4-18)$$

上記の多成分系の拡散係数は、

$$D_{ij} \neq D_{ji} \quad (7.4-19)$$

であり、非対称であることに注意する必要がある。

7.5 2次元流れにおける主流方向に垂直な方向の速度成分

密度と粘性係数が一定のニュートン流体の2次元の定常流れにおいて、主流方向に垂直な方向の速度成分はゼロになる。以下では、質量の保存式、運動量の保存式、境界条件からそうなることを示す。

(1) 管内流の場合

3.3.1 項に示した管内流を考える場合、本来なら3次元の円柱座標 ($r-\theta-z$ 座標系) で考える必要がある。このとき質量の保存式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.5-1)$$

また、壁面の境界条件は、

$$v_r|_w = v_\theta|_w = v_z|_w = 0 \quad (7.5-2)$$

上式の w は壁面での境界条件であることを示す。 z 方向に主流がある発達した流れでは、 z 方向に速度は変化しないので、

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.5-3)$$

また、 θ 方向には速度や圧力の分布はないので、

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (7.5-4)$$

したがって、 v_r 、 v_θ 、 v_z が r のみの関数になることがわかる。また、(7.5-3)、(7.5-4)および(7.5-1)式から、

$$\frac{d}{dr}(rv_r) = 0 \quad (7.5-5)$$

であるが、上式を積分すると、

$$rv_r = C_1 \quad (7.5-6)$$

境界条件である(7.5-2)式を用いると $C_1 = 0$ となるので次式を得る。

$$rv_r = 0 \quad (7.5-7)$$

上式が任意の r について成り立つには、

$$v_r = 0 \quad (7.5-8)$$

である。体積力を無視した定常状態における θ 方向の運動量の保存式は、

$$\begin{aligned} & \rho \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ &= -\frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mu \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(rv_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \end{aligned} \quad (7.5-9)$$

であるが、上式に(7.5-3)、(7.5-4)および(7.5-8)式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \frac{d}{dr}(rv_\theta) \right) = 0 \quad (7.5-10)$$

上式を2回積分すれば、

$$rv_\theta = \frac{C_2}{2} r^2 + C_3 \quad (7.5-11)$$

ここで、 $r=0$ を考えると、 $C_3 = 0$ となるので、

$$\frac{v_\theta}{r} = \frac{C_2}{2} \quad (7.5-12)$$

さらに、境界条件である(7.5-2)式を用いると $C_2 = C_3 = 0$ となり、結果的に次式を得る。

$$v_r = v_\theta = 0 \quad (7.5-13)$$

上式を (7.5-1)式に代入すると、 $\partial v_z / \partial z = 0$ は自動的に満たされるので、このような系では、 $v_r = v_\theta = 0$ になることを知っておけばよい。また、3.3.2 項に示した二重円管内の流れの例では、2つの壁面の表面で、(7.5-2)式が満たされることを用いれば同じ結果を得る。

(2) 2次元直角座標系での流れの場合

3.3.3 項に示した平行な平板間の流れを、3次元デカルト座標系 ($x-y-z$ 座標系) で考えると、質量保存の式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.5-14)$$

また、壁面の境界条件は、

$$v_y|_w = v_z|_w = 0 \quad (7.5-15)$$

上式の w は壁面での境界条件であることを示す。 x 方向に主流がある発達した流れ、あるいは x 方向に変化しない流れでは、 x 方向に速度は変化しないので、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} = \frac{\partial v_y}{\partial x} = \frac{\partial v_z}{\partial x} = 0 \quad (7.5-16)$$

また、 z 方向には無限に流体が広がっているとすると、その方向にも速度や圧力に分布がないので、

$$\frac{\partial v_x}{\partial z} = \frac{\partial v_y}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (7.5-17)$$

したがって、 v_x 、 v_y 、 v_z が y のみの関数になることがわかる。また、(7.5-16)、(7.5-17)および(7.5-14)式から、

$$\frac{dv_y}{dy} = 0 \quad (7.5-18)$$

であるが、上式を y について積分すると、

$$v_y = C_1 \quad (7.5-19)$$

境界条件である(7.5-15)式を用いると $C_1 = 0$ となるので次式を得る。

$$v_y = 0 \quad (7.5-20)$$

ここで、定常状態における体積力を無視した z 方向の運動量の保存式は、

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_z}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_z}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \quad (7.5-21)$$

上式に(7.5-16)、(7.5-17)および(7.5-20)式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d^2 v_z}{dy^2} = 0 \quad (7.5-22)$$

上式を積分すれば、

$$v_z = \frac{C_2}{2} y + C_3 \quad (7.5-23)$$

$y = y_1$ と $y = y_2$ の場所 (ただし、 $y_1 \neq y_2$) に壁面があるとする、境界条件(7.5-15)式より

$$0 = \frac{C_2}{2} y_1 + C_3 \quad (7.5-24)$$

$$0 = \frac{C_2}{2} y_2 + C_3 \quad (7.5-25)$$

これより、 $C_2 = C_3 = 0$ となり、結果的に次式を得る。

$$v_y = v_z = 0 \quad (7.5-26)$$

上式を (7.5-14) 式に代入すると、 $\partial v_x / \partial x = 0$ は自動的に満たされるので、このような系では、 $v_y = v_z = 0$ になることを知っておけばよい。また、3.3.4 項に傾いた平板上の流れの例では、1 つの壁面の表面で、(7.5-2) 式が満たされることと液体の表面ではせん断応力が働かないので速度勾配がゼロになることを用いれば同じ結果を得る。3.3.6 項についても、同じ結果が得られる。

(3) 旋回流の場合

図 3.3-6 に示すような系を 3 次元の円柱座標 ($r - \theta - z$ 座標系) で考える。このとき質量の保存式は次式で与えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rv_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.5-27)$$

また、壁面の境界条件は、

$$v_r|_w = v_z|_w = 0 \quad (7.5-28)$$

上式の w は壁面での境界条件であることを示す。 θ 方向に速度や圧力の分布はないので、

$$\frac{\partial v_r}{\partial \theta} = \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = \frac{\partial v_z}{\partial \theta} = \frac{\partial P}{\partial \theta} = 0 \quad (7.5-29)$$

また、 z 方向にも速度や圧力の分布はないので、

$$\frac{\partial v_r}{\partial z} = \frac{\partial v_\theta}{\partial z} = \frac{\partial v_z}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial z} = 0 \quad (7.5-30)$$

したがって、 v_r 、 v_θ 、 v_z 、 P が r のみの関数になることがわかる。また、(7.5-29)、(7.5-30) および (7.5-27) 式から、

$$\frac{d}{dr} (rv_r) = 0 \quad (7.5-31)$$

であるが、上式を r について積分すると、

$$rv_r = C_1 \quad (7.5-32)$$

境界条件である (7.5-28) 式を用いると $C_1 = 0$ となるので次式を得る。

$$rv_r = 0 \quad (7.5-33)$$

上式が任意の r について成り立つには、

$$v_r = 0 \quad (7.5-34)$$

である。体積力を無視した定常状態における z 方向の運動量の保存式は、

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_z}{\partial t} + v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \\ & = - \frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (7.5-35)$$

であるが、上式に (7.5-34)、(7.5-29) および (7.5-30) 式を代入すると、次式が得られる。

$$\frac{d}{dr} \left(r \frac{dv_z}{dr} \right) = 0 \quad (7.5-36)$$

上式を2回積分すれば、

$$v_\theta = \frac{C_2}{2} \ln(r) + C_3 \quad (7.5-37)$$

$r = r_1$ と $r = r_2$ の場所 (ただし、 $r_1 \neq r_2$) に壁面があるとすると、境界条件(7.5-28)式より

$$0 = \frac{C_2}{2} \ln(r_1) + C_3 \quad (7.5-38)$$

$$0 = \frac{C_2}{2} \ln(r_2) + C_3 \quad (7.5-39)$$

したがって、 $C_2 = C_3 = 0$ となるので、結果的に次式を得る。

$$v_r = v_\theta = 0$$

上式を (7.5-27) 式に代入すると、 $\partial v_\theta / \partial \theta$ は自動的に満たされるので、このような系では、 $v_r = v_\theta = 0$ になることを覚えておけばよい。

すなわち、上記の (1) ~ (3) は、力 (ここでは圧力) が働かない方向には、層流では流れは生じないということを示している。なお、3.3 節では、ゼロであることが自明であると考えられる速度成分は最初から考慮せずに、2次元の保存式から話を進めている。

7.6 微分方程式の解法

n を正数とすると、

$$\frac{d^2 f}{d\eta^2} + (n+1)\eta^n \frac{df}{d\eta} = 0 \quad (7.6-1)$$

で表される微分方程式の解法は以下の通りである。上式で、

$$g = \frac{df}{d\eta} \quad (7.6-2)$$

なる置き換えを行うと、(7.6-1)は、

$$\frac{dg}{d\eta} + (n+1)\eta^n g = 0 \quad (7.6-3)$$

になる。上式は、変数分離でき、

$$\frac{dg}{g} = -(n+1)\eta^n d\eta \quad (7.6-4)$$

のかたちになる。上式を積分すると。

$$\ln(g) = -\eta^{n+1} + C_0 \quad (7.6-5)$$

上式を書き直すと、

$$g = C_1 \exp(-\eta^{n+1}) \quad (7.6-6)$$

したがって、

$$\frac{df}{d\eta} = C_1 \exp(-\eta^{n+1}) \quad (7.6-7)$$

であるから、解として次式を得る。

$$f = C_1 \int_0^\eta \exp(-\xi^{n+1}) d\xi + C_2 \quad (7.6-8)$$

7.7 境界層方程式の導出

非圧縮性流体の平板に沿う定常流れを想定し、粘性係数が一定で重力の影響を無視した2次元の質量保存の式と運動量保存の式は以下ようになる。ここで、 ν は動粘性係数で、 $\nu = \mu / \rho$ である。

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7.7-1)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \right) \quad (7.7-2)$$

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \right) \quad (7.7-3)$$

さらに、境界条件は以下ようになる。

$$v_x|_{y=0} = v_y|_{y=0} = 0 \quad (7.7-4)$$

$$v_x|_{y=\infty} = v_x|_{x=0} = v_{x,\infty} \quad (7.7-5)$$

ここで、 $v_{x,\infty}$ は壁面から十分離れた場所での x 方向の速度であり、入口の速度と等価である。上に示した運動量保存の式の各項のオーダーを検討する。これは、直線で補間して、その傾きをとったと思えばよい。オーダーの検討をするので、それがゆるされる。さて、上式中の $\partial v_x / \partial x$ と $\partial v_y / \partial y$ のオーダーを考える。これらのオーダーは、境界層の厚みを δ とすれば、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_{x,\infty}}{x} \quad (7.7-6)$$

$$\frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_y}{\delta} \quad (7.7-7)$$

と推定できる。上式中の \sim は、オーダーが等しいことを示す記号である。(7.7-1)式に、上式を代入して考えてみると、

$$\frac{v_{x,\infty}}{x} \sim \frac{v_y}{\delta} \quad (7.7-8)$$

$$v_y \sim \frac{\delta}{x} v_{x,\infty} \quad (7.7-9)$$

x が非常に小さい領域を除けば、境界層の厚み δ は、 x に比べて十分に小さく（ここで、 δ に比べて十分に大きい x を l と記述する）、

$$\delta \ll l \quad (7.7-10)$$

が成り立つ。すなわち、このことは速度場のひずみが x 方向に比べて、 y 方向に著しく大きいことを示している。したがって、

$$v_y \ll v_{x,\infty} \quad (7.7-11)$$

となることが予想される。この考え方で、運動量保存の式の各項のオーダーを検討すると、(7.7-2)式の各項のオーダーは、

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} \sim \frac{v_{x,\infty}^2}{l} \quad (7.7-12)$$

$$v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} \sim \frac{\delta v_{x,\infty}}{l} \cdot \frac{\delta v_{x,\infty}}{\delta} \sim \frac{\delta v_{x,\infty}^2}{l} \quad (7.7-13)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} \sim \frac{v_{x,\infty}}{l^2} \quad (7.7-14)$$

$$\frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \sim \frac{v_{x,\infty}}{\delta^2} \quad (7.7-15)$$

ここで、 $\partial^2 v_x / \partial x^2 \ll \partial^2 v_x / \partial y^2$ であるから、 $\partial^2 v_x / \partial x^2$ は無視できる。そうすると、(7.7-2)式は、次式のようになる。

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (7.7-16)$$

次に、(7.7-3)式では、

$$v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{v_{x,\infty}^2 \delta}{l} \quad (7.7-17)$$

$$v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} \sim \frac{v_{x,\infty}^2 \delta}{l} \quad (7.7-18)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial x^2} \sim \frac{v_{x,\infty}}{l^3} \quad (7.7-19)$$

$$\frac{\partial^2 v_y}{\partial y^2} \sim \frac{v_{x,\infty}}{l\delta} \quad (7.7-20)$$

であり、どの項も(7.7-16)式の各項と比べると、 δ/l 倍となり、オーダーが小さい。したがって、(7.7-3)式は、

$$\frac{\partial P}{\partial y} \approx 0 \quad (7.7-21)$$

とおくことができる。上式は y 方向の圧力勾配が小さく、平面近傍の圧力と境界層より上側での圧力は、ほぼ等しくなることを示している。また、上式から圧力 P は、 x のみの関数として近似できることがわかる。ここで、壁面より遠く離れた場所での境界条件 ($v_x|_{y=\infty} = v_{x,\infty}$) を考えると、 $v_{x,\infty}$ は x のみの関数であるから、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} = v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} \quad (7.7-22)$$

さらに、主流では y 方向の速度分布は無視できるので、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = 0 \quad (7.7-23)$$

$$\lim_{y \rightarrow \infty} \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} = 0 \quad (7.7-24)$$

圧力 P は、 x のみの関数として近似できるので、

$$\lim_{y \rightarrow \infty} -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (7.7-25)$$

となるが、(7.7-2)式に、これらの境界条件を適用すると、 y が十分に大きい場合、

$$v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} = -\frac{1}{\rho} \frac{dP}{dx} \quad (7.7-26)$$

となり、結局、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7.7-27)$$

$$v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} + v \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (7.7-28)$$

を解けばよいことになる。

次にエネルギーの保存式を境界層近似で簡略化する。エネルギーの保存式は、定常の場合、

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \Phi \quad (7.7-29)$$

$$\Phi = 2 \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 \quad (7.7-30)$$

である。上式のうち、 Φ に含まれる項のオーダーを以下に示すように、(7.7-6)～(7.7-7)式を用いて調べる。

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \sim \frac{v_{x,\infty}^2}{l^2} \quad (7.7-31)$$

$$\left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 \sim \left(\frac{\delta v_{x,\infty}}{l} \cdot \frac{l}{\delta} \right)^2 \sim \frac{v_{x,\infty}^2}{l^2} \quad (7.7-32)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \sim \frac{v_{x,\infty}^2}{\delta^2} \quad (7.7-33)$$

$$\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 \sim \left(\frac{\delta v_{x,\infty}}{l} \cdot \frac{1}{l} \right)^2 \sim \frac{\delta^2 v_{x,\infty}^2}{l^4} \quad (7.7-34)$$

$$\frac{\partial v_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial v_y}{\partial x} \sim \frac{v_{x,\infty}}{\delta} \cdot \frac{\delta v_{x,\infty}}{l} \cdot \frac{1}{l} \sim \frac{v_{x,\infty}^2}{l^2} \quad (7.7-35)$$

したがって、 $(\partial v_x / \partial y)^2$ のオーダーが最も大きいことがわかり、

$$\Phi \approx \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.7-36)$$

とすることができる。よって、(7.7-29)式は以下のようなになる。

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.7-37)$$

さらに、上式中の x 方向の熱伝導による熱移動は、流れによって運ばれる熱に比べて小さいので、この項を無視すると、最終的に次式を得る。

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.7-38)$$

7.8 境界層方程式の解法

解くべき微分方程式と境界条件は、

$$f \frac{d^2 f}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 f}{d\eta^3} = 0 \quad (7.8-1)$$

$$f|_{\eta=0} = \left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=0} = 0 \quad (7.8-2)$$

$$\left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\infty} = 1 \quad (7.8-3)$$

(7.8-1)式は非線形であるので、一般的な解法を用いることはできないが、級数解として解を求めることができる。Blasiusは、 f を $\eta = 0$ の近傍で次のように級数展開した。

$$f(\eta) = A_0 + A_1 \eta + \frac{A_2}{2!} \eta^2 + \cdots + \frac{A_n}{n!} \eta^n + \cdots \quad (7.8-4)$$

$$A_n = \left. \frac{d^n f}{d\eta^n} \right|_{\eta=0} \quad (7.8-5)$$

境界条件より、

$$A_0 = A_1 = 0 \quad (7.8-6)$$

(7.8-4)式を(7.8-1)式に代入すると、

$$0 = 2A_3 + 2A_4 \eta + (A_2^2 + A_5) \frac{\eta^2}{2!} + (4A_2 A_3 + 2A_6) \frac{\eta^2}{3!} + \cdots \quad (7.8-7)$$

上式が、任意の η について成立するためには、 A_n について以下に示す関係が成り立つ必要がある。

$$\begin{aligned} A_3 = 0 \quad A_4 = 0 \quad A_5 &= -\frac{A_2^2}{2} \\ A_6 = 0 \quad A_7 = 0 \quad A_8 &= -\frac{11}{2} A_2 A_3 = \frac{11}{4} A_2^3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ A_{3n} = 0 \quad A_{3n+1} = 0 \quad A_{3n+2} &= -\frac{(3n-1)!}{2} \sum_{i=1}^n \frac{A_{3(i-1)+2} A_{3(n-i)+2}}{\{3(i-1)\}! \{3(n-i)+2\}!} A_2^3 \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \end{aligned}$$

この結果、 A_{3n+2} 以外の項はゼロとなる。ここで、 A_2 を

$$A = \left. \frac{d^2 f}{d\eta^2} \right|_{\eta=0} = A_2 \quad (7.8-8)$$

とおくと、

$$f(\eta) = \frac{A}{2!} \eta^2 - \frac{A^2}{2} \frac{1}{5!} \eta^5 + \frac{A^3}{4} \frac{11}{8!} \eta^8 - \frac{A^4}{8} \frac{375}{11!} \eta^{11}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{A^5}{16} \frac{27897}{14!} \eta^{14} - \frac{A^6}{32} \frac{3817137}{17!} \eta^{17} + \dots \\
& = A^{1/3} \left\{ \frac{(A^{1/3} \eta)^2}{2!} - \frac{(A^{1/3} \eta)^5}{5!} + \frac{11(A^{1/3} \eta)^8}{8!} - \frac{375(A^{1/3} \eta)^{11}}{11!} \dots \right\} \\
& = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2} \right)^n \frac{A^{n+1} C_n}{(3n+2)!} \eta^{3n+2} \tag{7.8-9} \\
& (C_0 = 1, C_1 = 1, C_2 = 11, C_3 = 375, C_4 = 27897, \dots)
\end{aligned}$$

となる。すなわち、 f は、 η と A の関数として表されることになる。ここで、 A の値は、もう1つの境界条件である(7.8-5)式から決めなければならないが、 $\eta = \infty$ における境界条件であるので、上式に直接その境界条件を代入することによって、 A の値を決めることはできない。そこで、ある近似を行う。 η の値が大きい場合には、(7.8-5)式の境界条件から、

$$\left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta_L} = 1 \tag{7.8-10}$$

が成り立つはずである。ここで、 η_L は、大きな η の値を示す。したがって、 η の値が大きな領域では、近似的に、

$$f \approx \eta - B \tag{7.8-11}$$

になると考えられる。 B はある定数である。このような近似を行ったので、これに対する修正項として、 $\phi(\eta)$ ($\phi(\eta) \ll f(\eta)$)を付加し、

$$f_a(\eta) = \eta - B + \phi(\eta) \tag{7.8-12}$$

として、 η の値が大きな領域での $f(\eta)$ を表す。上式を(7.8-1)に代入すると、

$$(\eta - B + \phi(\eta)) \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 \phi}{d\eta^3} = 0 \tag{7.8-13}$$

ここで、

$$\phi(\eta) \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} \approx 0 \tag{7.8-14}$$

として、無視すると、

$$(\eta - B) \frac{d^2 \phi}{d\eta^2} + 2 \frac{d^3 \phi}{d\eta^3} = 0 \tag{7.8-15}$$

となる。上式は、線形の微分方程式であるから解を得ることができる。 $d^2 \phi / d\eta^2 = \varphi$ とすれば、

$$(\eta - B) \varphi + 2 \frac{d\varphi}{d\eta} = 0 \tag{7.8-16}$$

であるから、

$$\int \frac{d\varphi}{\varphi} = \int \frac{1}{2} (B - \eta) d\eta \tag{7.8-17}$$

として、積分ができ、

$$\varphi = C \exp \left\{ -\frac{1}{4} (\eta - B)^2 \right\} \tag{7.8-18}$$

ここで、 C は積分定数である。上式を $\eta = \eta \sim \infty$ の間で積分すると、

$$\phi = \int_{\eta}^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} \varphi d\eta d\eta = C \int_{\eta}^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{4} (\eta - B)^2 \right\} d\eta d\eta \tag{7.8-19}$$

となり、(7.8-12)式より、 η の値が大きな領域では、

$$f_a(\eta) = \eta - B + C \int_{\eta}^{\infty} \int_{\eta}^{\infty} \exp\left\{-\frac{1}{4}(\eta - B)^2\right\} d\eta d\eta \quad (7.8-20)$$

となる。適当に大きな η の値 η_L において、(7.8-9)式と(7.8-20)式が、なめらかに接続できるように条件をおくと、 A 、 B 、 C が決定できる。すなわち、

$$f(\eta_L) = f_a(\eta_L) \quad (7.8-21)$$

$$\left. \frac{df}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_L} = \left. \frac{df_a}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_L} \quad (7.8-22)$$

$$\left. \frac{d^2f}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_L} = \left. \frac{d^2f_a}{d\eta^2} \right|_{\eta=\eta_L} \quad (7.8-23)$$

とおくことにより、満たすべき式が3つでき、これらを用いることにより、 A 、 B 、 C の値が決定できることになる。得られた結果は、 $A = 0.332$ 、 $B = 1.73$ 、 $C = 0.231$ である。Blasiusは、このようにして、級数解として関数 f を求めた。

Howarthは、(7.8-1)式を数値計算によって、より高い精度で解いた。ただし、(7.8-1)式は2階や3階の微分項を含んでおり、数値解析にはなじまない。したがって、(7.8-1)式を以下のように書きなおす。

$$\frac{df}{d\eta} = g \quad (7.8-24)$$

$$\frac{dg}{d\eta} = h \quad (7.8-25)$$

$$\frac{dh}{d\eta} = -\frac{1}{2}fh \quad (7.8-26)$$

このようにすると、(7.8-1)式は、連立1階の常微分方程式におきかえられる。このようなかたち

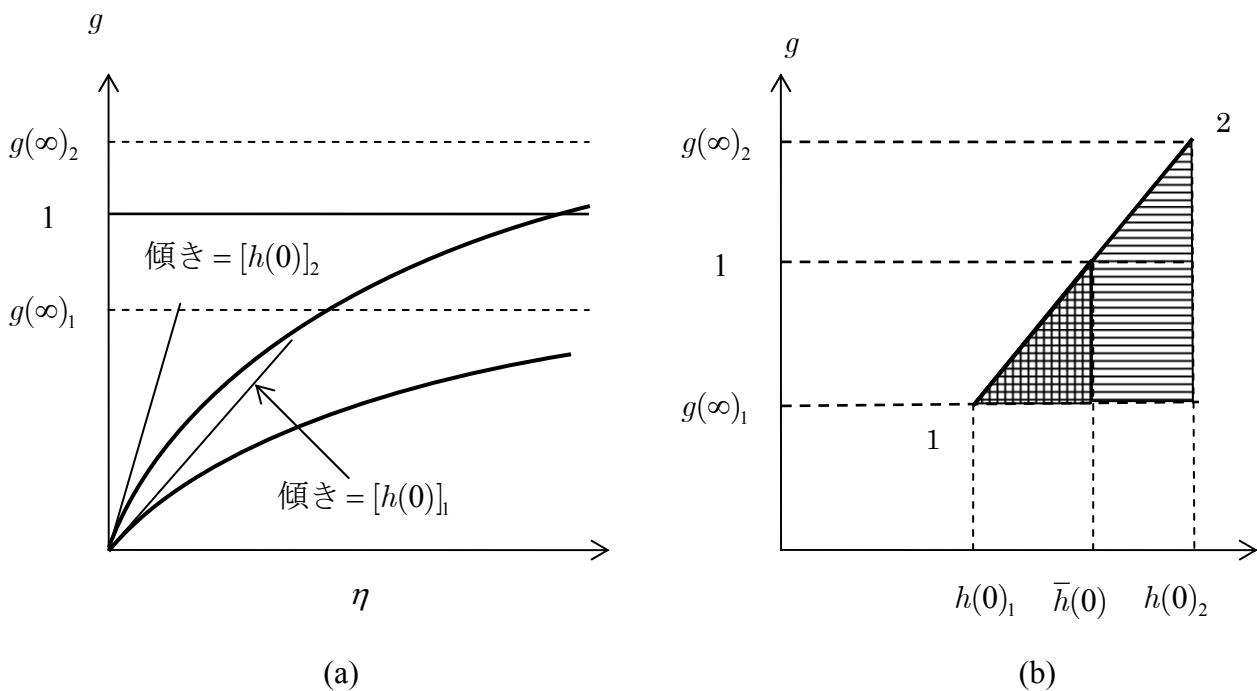


図 7.8-1 パラメータの最適化方法
(a) Shooting 法、(b) はさみ打ち法

の微分方程式は、ルンゲクッタ法などの方法で、数値的に解くことができる。さて、数値的に計算する準備ができたが、もう一つの問題がある。それは、 $\eta = 0$ のときの $h (= d^2 f / d\eta^2)$ の境界条件がないことである。したがって、なんらかの方法で、 $h|_{\eta=0}$ の値を求めなければならない。このような問題を解くためには、**Shooting method** と呼ばれる方法がある。その方法を **図 7.8-1 (a)** に示す。すなわち、(7.8-3) 式を満たす数値解を $h_{\eta=0}$ の値を変化させながら調べていき、最も適するものを選ぶ方法である。さらに、効率的な方法として、はさみ打ちの方法がある。この方法では、初期値として、2つの $h|_{\eta=0}$ の値を用意する。これらを、 $h(0)_1$ 、 $h(0)_2$ とする。視覚的には、**図 7.8-1 (b)** のようになる。2つの初期値から計算される $g(\infty)_1$ 、 $g(\infty)_2$ から、確からしい次の予測値 $\bar{h}(0)$ を、

$$\frac{\bar{h}(0) - h(0)_1}{1 - g(\infty)_1} = \frac{h(0)_2 - h(0)_1}{g(\infty)_2 - g(\infty)_1} \quad (7.8-27)$$

によって予測し、新しい $\bar{h}(0)$ によって計算される次の予測値 $\bar{g}(\infty)$ と前の $g(\infty)_1$ 、 $g(\infty)_2$ のうち1に近いものを用いて、次の予測値 $\bar{h}(0)$ を計算する。このような手続きを何回も繰り返すことにより、より確からしい値に近づけていく。このようにして計算された数値計算の結果を、**表 3.4-1** に示している。

なお、以下に境界層方程式のルンゲクッタ法による解析プログラム (Fortran 77 で書いている) を示す。以下のプログラムを実際に作れば、境界層方程式を数値的に解くことができる。

```

C*****
C**** ルンゲクッタ法による境界層方程式の数値解析 ****
C****      η → X, f → Y(0), g → Y(1), h → Y(2)      ****
C*****

      IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
      PARAMETER (N=2)
      COMMON Y(0:N), Y0(0:N), Y7(0:N), Y8(0:N)
      DIMENSION DY(0:N), Y9(0:N)
C----- 積分する区間 (XA ~ XB)
      XA = 0.0
      XB = 10.0
C----- X=XA での初期値
      Y0(0) = 0.0
      Y0(1) = 0.0
      Y0(2) = 0.33212
C----- Xの刻み幅の初期値 DX0, 誤差の許容限界 ERO
      DX0 = 0.01
      ERO = 0.00001
C----- ファイルを開く
      OPEN (1, FILE='RESULT.DAT', STATUS='UNKNOWN')
      WRITE(1,*) ' ----- 計算結果 -----'

```

```
WRITE(1,*) ' X, Y0, Y1, Y2'
```

```
C-----
```

```
DX1 = DX0
```

```
X0 = XA
```

```
2000 DO 100 K = 0, N
```

```
100 Y8(K) = Y0(K)
```

```
DX = DX1
```

```
X = X0
```

```
CALL SUBRK(K, DX, X)
```

```
DO 200 K = 0, N
```

```
200 Y9(K) = Y7(K)
```

```
1000 DX = DX1*0.5
```

```
X = X0
```

```
CALL SUBRK(K, DX, X)
```

```
DO 300 K = 0, N
```

```
300 Y8(K) = Y7(K)
```

```
X = X0 + DX
```

```
CALL SUBRK(K, DX, X)
```

```
YER = 0.0
```

```
DO 400 K = 0, N
```

```
DY(K) = (Y7(K) - Y9(K))/15.0
```

```
ER1 = DABS(DY(K))/DX1/Y7(K)
```

```
IF(ER1.GT.ER0) GOTO 4000
```

```
400 IF(ER1.GT.ER0*0.01) YER = 1.0
```

```
GOTO 5000
```

```
C----- 誤差が許容限界を超えた
```

```
4000 DX1 = DX1*0.5
```

```
WRITE(*,*) ' Xの刻み幅を', DX1, 'に換えます。'
```

```
DO 500 K = 0, N
```

```
Y9(K) = Y8(K)
```

```
500 Y8(K) = Y0(K)
```

```
GOTO 1000
```

```
C----- 誤差は許容限界内にある
```

```
5000 X0 = X0 + DX1
```

```
DO 600 K = 0, N
```

```
600 Y0(K) = Y7(K) + DY(K)
```

```
WRITE(*,*) ' X, Y0, Y1, Y2= ', X0, Y0(0), Y0(1), Y0(2)
```

```

WRITE(1,*) ' ', X0, Y0(0), Y0(1), Y0(2)
IF(YER.EQ.1) GOTO 3000
IF(DX1.EQ.DX0) GOTO 3000
DX1 = DX1*2.0
WRITE(*,*) ' Xの刻み幅を',DX1,'に戻します。'
3000 IF(X0.LT.XB) GOTO 2000
CLOSE(1)
END

```

C*****

C***** ルンゲクッタ法による積分 *****

C*****

```

SUBROUTINE SUBRK(K,DX,X)
IMPLICIT REAL*8 (A-H,O-Z)
PARAMETER(N=2)
COMMON Y(0:N),Y0(0:N),Y7(0:N),Y8(0:N)
DO 100 K = 0, N
Y(K) = Y8(K)
100 Y7(K) = Y8(K)
DO 200 K = 0, N
DY = DDYX(K)*DX
Y7(K) = Y7(K) + DY/6.0
200 Y(K) = Y8(K) + DY/2.0
X = X + DX/2.0
DO 300 K = 0, N
DY = DDYX(K)*DX
Y7(K) = Y7(K) + DY/3.0
300 Y(K) = Y8(K) + DY/2.0
DO 400 K = 0, N
DY = DDYX(K)*DX
Y7(K) = Y7(K) + DY/3.0
400 Y(K) = Y8(K) + DY
X = X + DX/2.0
DO 500 K = 0, N
DY = DDYX(K)*DX
500 Y7(K) = Y7(K) + DY/6.0
RETURN
END

```

```
C*****
C***** 微分値の計算 *****
C*****

FUNCTION DDYX(K)
  IMPLICIT REAL*8 (A-H, O-Z)
  PARAMETER(N=2)
  COMMON Y(0:N), Y0(0:N), Y7(0:N), Y8(0:N)
  IF(K.EQ.0) DDYX = Y(1)
  IF(K.EQ.1) DDYX = Y(2)
  IF(K.EQ.2) DDYX = -0.5*Y(0)*Y(2)
  RETURN
END
```

7.9 時間平均を施した保存式の導出

運動量の保存式の平均化を考える。ここでは、密度と粘性係数は位置によらず一定であるとする。基礎となる質量保存の式と運動量の保存式の x 方向に関する式は、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0 \quad (7.9-1)$$

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} + v_z \frac{\partial v_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (7.9-2)$$

である。例えば、 $\partial v_x / \partial x$ の項の平均化を考えると、

$$\overline{\frac{\partial v_x}{\partial x}} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{(v_x + v'_x)} = \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} \quad (7.9-3)$$

上式中の上付の $\bar{\quad}$ は時間的な平均をとることを示す。また、微分と平均化の順序を逆にしている。 v'_x は平均化するとゼロになるため、式から消える。 v_y と v_z についても同様である。従って、

(7.9-1)式は簡単に平均化されて、次式が得られる。

$$\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}_y}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}_z}{\partial z} = 0 \quad (7.9-4)$$

(7.9-1)式を考慮すると、(7.9-2)式は以下のように書き換えられる。

$$\rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial z} \right) = -\frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x \quad (7.9-5)$$

上式の平均化を考える。まず、左辺の平均化は、

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial v_x}{\partial t} + \frac{\partial(v_x v_x)}{\partial x} + \frac{\partial(v_x v_y)}{\partial y} + \frac{\partial(v_x v_z)}{\partial z} \right) \\ &= \rho \left[\frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_y + v'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_x + v'_x)(\bar{v}_z + v'_z)}{\partial z} \right] \\ &= \rho \left[\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}_x \bar{v}_z)}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_z)}{\partial z} \right] \\ &= \rho \left[\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_x)}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_y)}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_z)}{\partial z} \right] \end{aligned} \quad (7.9-6)$$

上式の導出では、(7.9-4)式を用いた。次に、(7.9-5)式の右辺の平均化は以下ようになる。

$$\begin{aligned} & -\frac{\partial(\bar{P} + P')}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2(\bar{v}_x + v'_x)}{\partial z^2} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) \end{aligned} \quad (7.9-7)$$

結果的に、次式を得る。

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial \bar{v}_x}{\partial t} + \bar{v}_x \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial x} + \bar{v}_y \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial y} + \bar{v}_z \frac{\partial \bar{v}_x}{\partial z} \right) \\ &= -\frac{\partial \bar{P}}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{v}_x}{\partial z^2} \right) - \rho \left(\frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_y)}{\partial y} + \frac{\partial(\bar{v}'_x \bar{v}'_z)}{\partial z} \right) + \rho g_x \end{aligned} \quad (7.9-8)$$

y 方向、 z 方向に関する運動量の保存式についても同様の結果が得られる。

7.10 より一般的な関数を用いた次元解析の取り扱い

3章の3.6.1項において、管内流における圧力降下を次元解析により検討したが、そこでは、関数として特定されたものを用いていた。ここでは、その関数関係がより一般的な場合について考える。3.6.1項で示したように、 ΔP は関係する物理量の関数として以下のように表されるはずである。

$$\Delta P = f_1(d, v_{z,m}, \rho, \mu, l) \quad (7.10-1)$$

この関数関係が、以下の無限級数として展開できたとする。

$$\Delta P = (K_a d^{a_1} v_{z,m}^{a_2} \rho^{a_3} \mu^{a_4} l^{a_5}) + (K_b d^{b_1} v_{z,m}^{b_2} \rho^{b_3} \mu^{b_4} l^{b_5}) + (K_c d^{c_1} v_{z,m}^{c_2} \rho^{c_3} \mu^{c_4} l^{c_5}) + \dots \quad (7.10-2)$$

ここで、 K_a 、 K_b 、 K_c ……は無次元の定数である。上式のそれぞれの()の中は、最終的に ΔP の次元と同じになることが必要である。そこで、上式の2番目の()を取り出して、それぞれの物理量の次元をM、L、 τ で表現し、その等式をとると次のようになる。

$$\frac{M}{L\tau^2} = L^{b_1} \left(\frac{L}{\tau}\right)^{b_2} \left(\frac{M}{L^3}\right)^{b_3} \left(\frac{M}{L\tau}\right)^{b_4} L^{b_5} \quad (7.10-3)$$

次に、M、L、 τ のべき乗数をそれぞれ等しいとすると、

$$M \text{ について、} \quad 1 = b_3 + b_4 \quad (7.10-4)$$

$$L \text{ について、} \quad -1 = b_1 + b_2 - 3b_3 - b_4 + b_5 \quad (7.10-5)$$

$$\tau \text{ について、} \quad -2 = -b_2 - b_4 \quad (7.10-6)$$

これらの式をみると、方程式3つに対して未知数が5つあるので、 b_1 、 b_2 、 b_3 、 b_4 、 b_5 を数値として解くことはできない。3つの変数、 b_1 、 b_2 、 b_3 を b_4 、 b_5 を用いて表すとすると、結果的に、

$$b_1 = -b_5 - b_4 \quad (7.10-7)$$

$$b_2 = 2 - b_4 \quad (7.10-8)$$

$$b_3 = 1 - b_4 \quad (7.10-9)$$

となる。(7.10-2)式中の他の項 a_i 、 c_i ……についても、(7.10-7)～(7.10-9)式と同様な関係が成り立つ必要がある。これを、(7.10-2)式に代入すると、次のようになる。

$$\Delta P = K_a d^{-a_5 - a_4} v_{z,m}^{2 - a_4} \rho^{1 - a_4} \mu^{a_4} l^{a_5} + K_b d^{-b_5 - b_4} v_{z,m}^{2 - b_4} \rho^{1 - b_4} \mu^{b_4} l^{b_5} + K_c d^{-c_5 - c_4} v_{z,m}^{2 - c_4} \rho^{1 - c_4} \mu^{c_4} l^{c_5} + \dots \quad (7.10-10)$$

累乗が等しいものをまとめると、

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho v_{z,m}^2}\right) = K_a \left(\frac{v_{z,m} d \rho}{\mu}\right)^{-a_4} \left(\frac{l}{d}\right)^{a_5} + K_b \left(\frac{v_{z,m} d \rho}{\mu}\right)^{-b_4} \left(\frac{l}{d}\right)^{b_5} + K_c \left(\frac{v_{z,m} d \rho}{\mu}\right)^{-c_4} \left(\frac{l}{d}\right)^{c_5} + \dots \quad (7.10-11)$$

となるので、()内の無次元数の間に

$$\pi_1 = f_2(\pi_3, \pi_3) \quad (7.10-12)$$

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{\rho v_{z,m}^2} \quad (7.10-13)$$

$$\pi_2 = \frac{v_{z,m} d \rho}{\mu} \quad (7.10-14)$$

$$\pi_3 = \frac{l}{d} \quad (7.10-15)$$

なる関数関係が成り立つことがわかる。最も簡単な関数として以下のものを選ぶと、

$$\left(\frac{\Delta P}{\rho v_{z,m}^2} \right) = K \left(\frac{v_{z,m} d \rho}{\mu} \right) \left(\frac{l}{d} \right) \quad (7.10-16)$$

と表現される（ K は無次元の定数）が、これは実験結果をよく表現することが知られていることは、3.6.1項に示した。実のところは、(7.10-2)式も一般的な関数であるとはいえないが、3.6.1項で仮定した関数よりは一般的である。ただし、上記の次元解析の考え方から、無次元数が見つければ、その無次元数の間に、(7.10-11)式よりもより一般的な関数関係、

$$0 = f_3(\pi_1, \pi_2, \pi_3) \quad (7.10-17)$$

が成立することが類推できるであろう。加えて、上記の手続きで行われていることは、3.6.1で用いた関数で行った手続きと等価であり、無次元数を探索するうえでは、3.6.1項で用いた方法で十分であることがわかる。

3.6.1項で説明した方法の他に、無次元数をみつけるための簡単な方法がある。物理量 ΔP 、 d 、 $v_{z,m}$ 、 μ 、 ρ 、 l のうち、 d 、 $v_{z,m}$ 、 ρ を選べば、基本単位L、M、 τ をこれらで表現することができる。すなわち、

$$L = d \quad (7.10-18)$$

$$\tau = \frac{d}{v_{z,m}} \quad (7.10-19)$$

$$M = \rho d^3 \quad (7.10-20)$$

バッキンガムの π 定理より無次元数の数は、3つである。これらを π_1 、 π_2 、 π_3 として、残りの物理量がこれらに1つずつ含まれるとする。 ΔP 、 μ 、 l の次元より、

$$\pi_1 = \frac{\Delta P}{M/L\tau^2} \quad (7.10-21)$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{M/L\tau} \quad (7.10-22)$$

$$\pi_3 = \frac{l}{L} \quad (7.10-23)$$

となる。ここで、(7.10-18)~(7.10-20)式の関係を上式に代入すると以下のようになる。

$$\pi_1 = \frac{\Delta P L \tau^2}{M} = \frac{\Delta P d (d/v_{z,m})^2}{\rho d^3} = \frac{\Delta P}{\rho v_{z,m}^2} \quad (7.10-24)$$

$$\pi_2 = \frac{\mu}{M/(L\tau)} = \frac{\mu d (d/v_{z,m})}{\rho d^3} = \frac{\mu}{v_{z,m} d \rho} \quad (7.10-25)$$

$$\pi_3 = \frac{l}{L} = \frac{l}{d} \quad (7.10-26)$$

7.11 グレツ問題の解

解くべき微分方程式と境界条件は、

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial c_A}{\partial r} \right) = \frac{2v_{z,m}}{\mathcal{D}_{AB}} \left(1 - \frac{r^2}{R^2} \right) \frac{\partial c_A}{\partial z} \quad (7.11-1)$$

$$c_A|_{z=0} = c_{A0} \quad (7.11-2)$$

$$\left. \frac{\partial c_A}{\partial r} \right|_{r=0} = 0 \quad (7.11-3)$$

$$c_A|_{r=R} = c_{AR} \quad (7.11-4)$$

である。ここで、以下に示す変数変換を行う。

$$x = \frac{\mathcal{D}_{AB} z}{2v_{z,m} R^2} = \frac{1}{\frac{2Rv_{z,m}\rho}{\mu} \cdot \frac{\mu/\rho}{\mathcal{D}_{AB}}} \cdot \frac{z}{R} = \frac{1}{\text{ReSc}} \cdot \frac{z}{R} \quad (7.11-5)$$

$$\text{Re} = \frac{2Rv_{z,m}\rho}{\mu} \quad (7.11-6)$$

$$\text{Sc} = \frac{\mu/\rho}{\mathcal{D}_{AB}} = \frac{\nu}{\mathcal{D}_{AB}} \quad (7.11-7)$$

$$y = \frac{r}{R} \quad (7.11-8)$$

$$\phi = \frac{c_A - c_{AR}}{c_{A0} - c_{AR}} \quad (7.11-9)$$

これにより、もともとの微分方程式は、以下のようなになる。

$$\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} \left(y \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = (1 - y^2) \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (7.11-10)$$

境界条件も以下のように書き換えられる。

$$\phi|_{x=0} = 1 \quad (7.11-11)$$

$$\left. \frac{\partial \phi}{\partial y} \right|_{y=0} = 0 \quad (7.11-12)$$

$$\phi|_{y=1} = 0 \quad (7.11-13)$$

ここで、変数分離によって、この問題が解けるとし、解に次の関数形を仮定する。

$$\phi = F(x)G(y) \quad (7.11-14)$$

このことにより、(7.11-10)式は常微分化され、次式を得る。

$$\frac{1}{F} \frac{dF}{dx} = \frac{1}{(1-y^2)yG} \frac{d}{dy} \left(y \frac{dG}{dy} \right) \quad (7.11-15)$$

上式が、任意の x と y について成立するためには、右辺と左辺が定数にならないといけない。ここで、その定数を $-\lambda^2$ （発散しない解を得るためには負の定数となる必要がある）とすると、 f について、

$$\frac{dF}{dx} = -\lambda^2 F \quad (7.11-16)$$

したがって、

$$F = \exp(-\lambda^2 x) \quad (7.11-17)$$

G については、

$$\frac{d}{dy} \left(y \frac{dG}{dy} \right) + \lambda^2 (1 - y^2) y G = 0 \quad (7.11-18)$$

上式は、よく知られている Sturm-Liouville 型の微分方程式であり、これまでに十分に研究がなされている問題である。その結果によると、無限個の λ の値（これを $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \dots$ とする）に対応して、同様に無限個の解である固有関数 G （これを $G_1, G_2, G_3 \dots$ とする）が存在することになる。それぞれの G は、解として成り立つので、一般解は G_n に F_n を乗じたものの線形結合として表され、以下のようなになる。

$$\phi \left[= \frac{c_A - c_{AR}}{c_{A0} - c_{AR}} \right] = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 x) G_n(y) \quad (7.11-19)$$

ここで、 C_n は定数である。定数に関する一つの制約は、(7.11-11)式の境界条件からくるもので、

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} C_n G_n \quad (7.11-20)$$

Sturm-Liouville 問題の固有関数には以下の直交関係が成立する。

$$\int_0^1 G_n(y) G_m(y) (1 - y^2) y dy = 0 \quad (m \neq n) \quad (7.11-21)$$

上記の関係を用いると、(7.11-20)式の両辺に $G_m (1 - y^2) y$ を乗じて積分することにより、

$$\int_0^1 G_n (1 - y^2) y \left(\sum_{m=1}^{\infty} C_m G_m \right) dy = \int_0^1 G_n (y) (1 - y^2) y dy \quad (7.11-22)$$

左辺の積分は、 G_n の項だけが残り、 C_n は以下のように与えられる。

$$C_n = \frac{\int_0^1 G_n (1 - y^2) y dy}{\int_0^1 G_n^2 (1 - y^2) y dy} \quad (7.11-23)$$

ここで、 G_n を y で以下のようにべき展開する。

$$G_n(y) = a_{n,0} + a_{n,1}y + a_{n,2}y^2 + a_{n,3}y^3 \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} y^k \quad (7.11-24)$$

ただし、 y についての対称性から、 n が奇数である項は消え、

$$G_n(y) = a_{n,0} + a_{n,2}y^2 + a_{n,4}y^4 \dots = \sum_{i=0}^{\infty} a_{n,2i} y^{2i} \quad (7.11-25)$$

これを、(7.11-18)式に代入すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dy} \left(y \frac{d}{dy} \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,2k} y^{2k} \right) + \lambda_n^2 (1 - y^2) y \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,2k} y^{2k} \\ &= \frac{d}{dy} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 2k a_{n,2k} y^{2k} \right) + \lambda_n^2 \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,2k} (y^{2k+1} - y^{2k+3}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} 4k^2 a_{n,2k} y^{2k-1} + \sum_{k=0}^{\infty} (\lambda_n^2 a_{n,2k} y^{2k+1} - \lambda_n^2 a_{n,2k} y^{2k+3}) \end{aligned} \quad (7.11-26)$$

上式が任意の y について成立するには、 $y^1, y^3, y^5 \dots$ の係数がゼロになる必要があるため、

$$0 = 4k^2 a_{n,2k} + \lambda_n^2 (a_{n,2(k-1)} - a_{n,2(k-2)}) \quad (7.11-27)$$

ただし、 $a_{n,2k} \Big|_{k<0} = 0$ である。上式より、

$$a_{n,2k} = \frac{\lambda_n^2}{(2k)^2} (a_{n,2(k-2)} - a_{n,2(k-1)}) \quad (7.11-28)$$

ここで、 $a_{n,0} = 1$ とする ($a_{n,0}$ は任意であるが、簡単のために 1 とする。後で、 C_m の値が調整される。) と、 $k = 4$ までのそれぞれの項は以下ようになる。

$$(k = 1) \quad a_{n,2} = \frac{\lambda_n^2}{2^2}(-a_{n,0}) = -\frac{\lambda_n^2}{4} \quad (7.11-29)$$

$$(k = 2) \quad a_{n,4} = \frac{\lambda_n^2}{16}(a_{n,0} - a_{n,2}) = \frac{\lambda_n^2}{16}\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right) \quad (7.11-30)$$

$$(k = 3) \quad a_{n,6} = \frac{\lambda_n^2}{36}(a_{n,2} - a_{n,4}) = \frac{\lambda_n^2}{36}\left(-\frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{\lambda_n^2}{16}\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right)\right) \quad (7.11-31)$$

$$(k = 4) \quad a_{n,8} = \frac{\lambda_n^2}{64}(a_{n,4} - a_{n,6}) = \frac{\lambda_n^2}{64}\left(\frac{\lambda_n^2}{16}\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right) - \frac{\lambda_n^2}{36}\left(-\frac{\lambda_n^2}{4} - \frac{\lambda_n^2}{16}\left(1 + \frac{\lambda_n^2}{4}\right)\right)\right) \quad (7.11-32)$$

$k > 4$ の項に関しても、同様に計算できる。上記のべき展開によって得られた G_n は、 y の関数であるとともに、 λ_n の関数としてもみなせるので、(7.11-18)式より、

$$\int_0^1 G_n(1-y^2)ydy = -\frac{1}{\lambda_n^2}\left[y\frac{\partial G_n}{\partial y}\right]_0^1 = -\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{\partial G_n}{\partial y}\Big|_{y=1} \quad (7.11-33)$$

次に、(7.11-18)式を y についての偏微分として以下のように書き直す。

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial G_n}{\partial y}\right) + \lambda_n^2(1-y^2)yG_n = 0 \quad (7.11-34)$$

上式の両辺に、 $(\partial G_n / \partial \lambda_n)$ を乗じて積分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial G_n}{\partial y}\right) + \lambda_n^2(1-y^2)yG_n \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} dy \\ &= \left[y\frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n}\right]_0^1 - \int_0^1 y\frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n}\right) dy + \frac{1}{2}\lambda_n^2 \int_0^1 (1-y^2)y\frac{\partial G_n^2}{\partial \lambda_n} dy \\ &= \left(\frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n}\right)\Big|_{y=1} - \int_0^1 y\frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n}\right) dy + \frac{1}{2}\lambda_n^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \int_0^1 (1-y^2)yG_n^2 dy \end{aligned} \quad (7.11-35)$$

また、(7.11-34)式の両辺に、 G_n を乗じて積分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^1 G_n \frac{\partial}{\partial y}\left(y\frac{\partial G_n}{\partial y}\right) + \lambda_n^2(1-y^2)yG_n^2 dy \\ &= \left[G_n y \frac{\partial G_n}{\partial y}\right]_0^1 - \int_0^1 y\left(\frac{\partial G_n}{\partial y}\right)^2 dy + \lambda_n^2 \int_0^1 (1-y^2)yG_n^2 dy \\ &= \left(G_n \frac{\partial G_n}{\partial y}\right)\Big|_{y=1} - \int_0^1 y\left(\frac{\partial G_n}{\partial y}\right)^2 dy + \lambda_n^2 \int_0^1 (1-y^2)yG_n^2 dy \end{aligned} \quad (7.11-36)$$

上式を λ_n で微分すると、

$$\begin{aligned} 0 &= \left(\frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \frac{\partial G_n}{\partial y}\right)\Big|_{y=1} + \left(G_n \frac{\partial}{\partial \lambda_n}\left(\frac{\partial G_n}{\partial y}\right)\right)\Big|_{y=1} - 2\int_0^1 y\frac{\partial G_n}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \lambda_n}\left(\frac{\partial G_n}{\partial y}\right) dy \\ &\quad + 2\lambda_n \int_0^1 y(1-y^2)G_n^2 dy + \lambda_n^2 \frac{\partial}{\partial \lambda_n} \int_0^1 (1-y^2)yG_n^2 dy \end{aligned} \quad (7.11-37)$$

(7.11-37)–(7.11-35)式×2を計算すると次式を得る。

表 7.11-1 固有値と微分値の計算結果

n	λ_n	$(\partial G_n / \partial \lambda_n) _{y=1}$	$(\partial G_n / \partial y) _{y=1}$
1	2.7043644199	-0.5008991914	-1.0143004587
2	6.6790314493	0.3714622734	1.3492416221
3	10.6733795381	-0.3182644696	-1.5723193392
4	14.6710784627	0.2864821001	1.7460043350
5	18.6698718645	-0.2644906034	-1.8908571240
6	22.6691433588	0.2479944920	2.0164666530
7	26.6686619960	-0.2349676067	-2.1281647501
8	30.6683233409	0.2243062663	2.2292554182
9	34.6680738224	-0.2153485062	-2.3219433391
10	38.6678833469	0.2076687724	2.4077811647
11	42.6677338055	-0.2009787384	-2.4879082547

$$\int_0^1 G_n^2 (1-y^2) y dy = \frac{1}{2\lambda_n} \left(\frac{\partial G_n}{\partial y} \cdot \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \right) \Bigg|_{y=1} \quad (7.11-38)$$

上式と(7.11-33)式を(7.11-23)式に代入すると、

$$C_n = \frac{-2}{\lambda_n \left(\frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \right) \Bigg|_{y=1}} \quad (7.11-39)$$

(7.11-25)式において、壁面の境界条件から、 $G_n|_{y=1} = 0$ を満たす必要があるので、以下の式を満足する必要がある。

$$G_n|_{y=1} = a_{n,0} + a_{n,2} + a_{n,4} + a_{n,6} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,2k} = 0 \quad (7.11-40)$$

上式を満たす根（固有値 λ_n ）の値を求める。根は無限にあり、解析的には求めることができないが、コンピュータを用いることにより数値的に探索することができる。 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,2k}$ を λ_n の関数として、

図 7.11-1 に示す。矢印で示す点が根に対応する。

いろいろな研究者によって、固有値 λ_n の値が求められているが、ここでは、Brown (Brown, G. M., A.I.Ch.E. Journal, 6, 179(1990)) によって得られた結果を用いる。Brownは、(7.11-40)式について、固有値 λ_n を求めている。表 7.11-1 表に示すように、Brownは無限にある固有値のうち、11個の根の値を求めている。同表には、 C_n などを計算する際に必要となる微分値も載せられている。図 7.11-2 には、それぞれの固有関数の y についての変化を示す。

半径方向に平均したときの混合平均無次元濃度 ϕ_m は以下のように表される。

$$\phi_m = \frac{\int_0^1 v_z \phi \cdot 2\pi y dy}{\int_0^1 v_z \cdot 2\pi y dy} = \frac{\int_0^1 2v_{z,m} (1-y^2) \phi \cdot 2\pi y dy}{\int_0^1 2v_{z,m} (1-y^2) \cdot 2\pi y dy} = 4 \int_0^1 \phi \cdot y (1-y^2) dy \quad (7.11-41)$$

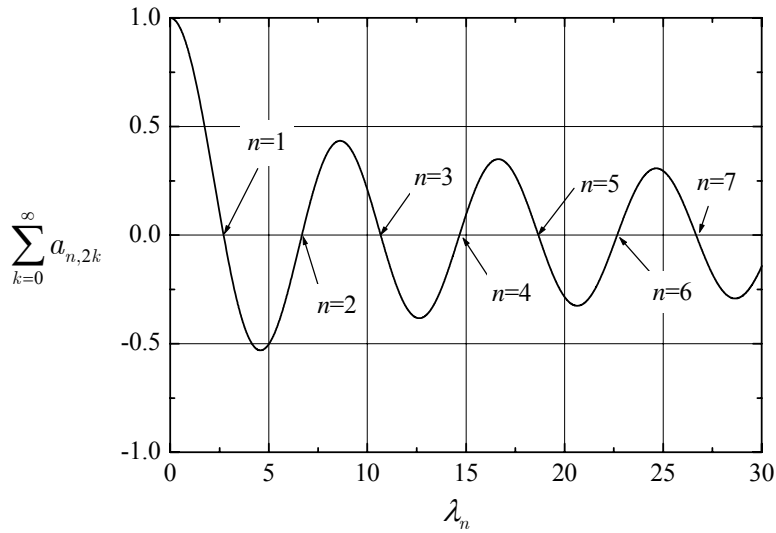


図 7.11-1 $\sum_{k=0}^{\infty} a_{n,2k}$ の λ_n に対する変化

(7.11-19)式を上式に代入すると、

$$\phi_m = 4 \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 x) \int_0^1 y(1-y^2)G(y)dy \quad (7.11-42)$$

上式に(7.11-33)、(7.11-39)式を代入すると、

$$\phi_m = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{8 \left. \frac{\partial G_n}{\partial y} \right|_{y=1} \exp(-\lambda_n^2 x)}{\lambda_n^3 \left. \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \right|_{y=1}} \quad (7.11-43)$$

z の位置における、管壁での r 方向の物質の流束 $N_{A,r}^*$ は、(7.11-9)、(7.11-19)および(7.11-39)式を用いることにより、

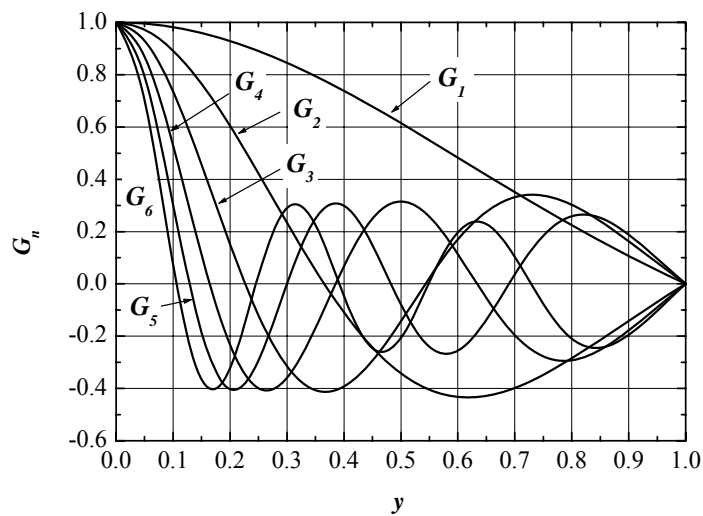


図 7.11-2 固有関数 G_n の変化

$$\begin{aligned}
N_{A,r}^* \Big|_{r=R} &= -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial r} \Big|_{r=R} = -\frac{(c_{A0} - c_{AR}) \mathcal{D}_{AB}}{R} \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=1} \\
&= -\frac{(c_{A0} - c_{AR}) \mathcal{D}_{AB}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} C_n \exp(-\lambda_n^2 x) \frac{\partial G}{\partial y} \Big|_{y=1} \\
&= \frac{2(c_{A0} - c_{AR}) \mathcal{D}_{AB}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp(-\lambda_n^2 x)}{\lambda_n \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}
\end{aligned} \tag{7.11-44}$$

混合平均濃度 $c_{A,m}$ は、次式で表される。

$$\begin{aligned}
c_{A,m} &= \frac{\int_0^1 v_z c_A \cdot 2\pi y dy}{\int_0^1 v_z \cdot 2\pi y dy} = \frac{\int_0^1 2v_{z,m}(1-y^2)[\phi(c_{A0} - c_{AR}) + c_{AR}] \cdot 2\pi y dy}{\int_0^1 2v_{z,m}(1-y^2) \cdot 2\pi y dy} \\
&= (c_{A0} - c_{AR})\phi_m + c_{AR}
\end{aligned} \tag{7.11-45}$$

ここで、上式と(7.11-43)、(7.11-44)式を用いると、

$$\begin{aligned}
\frac{N_{A,r}^* \Big|_{r=R}}{c_{A,m} - c_{AR}} &= \frac{\frac{2(c_{A0} - c_{AR}) \mathcal{D}_{AB}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp(-\lambda_n^2 x)}{\lambda_n \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}}{8(c_{A0} - c_{AR}) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp(-\lambda_n^2 x)}{\lambda_n^3 \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}} = \frac{\frac{\mathcal{D}_{AB}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp(-\lambda_n^2 x)}{\lambda_n \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}}{4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp(-\lambda_n^2 x)}{\lambda_n^3 \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}}
\end{aligned} \tag{7.11-46}$$

のように表現できることがわかる。ここで、(7.11-5)式を用いて、

$$\begin{aligned}
k_A(z) &= \frac{\frac{\mathcal{D}_{AB}}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{1}{\text{Re Sc}} \cdot \frac{z}{R}\right)}{\lambda_n \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}}{4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\frac{\partial G_n}{\partial y} \Big|_{y=1} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{1}{\text{Re Sc}} \cdot \frac{z}{R}\right)}{\lambda_n^3 \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \Big|_{y=1}}}
\end{aligned} \tag{7.11-47}$$

とおけば、

$$N_{A,r}^* \Big|_{r=R} = k_A(z)(c_{A,m} - c_{AR}) \tag{7.11-48}$$

のように表現できる。このときの $k_A(z)$ を物質移動係数という。物質移動係数に関する無次元数であるシャーウッド数を用いると局所シャーウッド数 Sh_z は次のように表現される。

$$\text{Sh}_z \left(= \frac{k_A(z) \cdot 2R}{\mathcal{D}_{AB}} \right) = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left. \frac{\partial G_n}{\partial y} \right|_{y=1} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{1}{\text{Re Sc}} \cdot \frac{z}{R}\right)}{\lambda_n \left. \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \right|_{y=1}}}{2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left. \frac{\partial G}{\partial y} \right|_{y=1} \exp\left(-\lambda_n^2 \frac{1}{\text{Re Sc}} \cdot \frac{z}{R}\right)}{\lambda_n^3 \left. \frac{\partial G_n}{\partial \lambda_n} \right|_{y=1}}} \quad (7.11-49)$$

z が無限に大きい場合には、 $n = 1$ の項のみが支配的になり、

$$\text{Sh}_{\infty} = \lim_{z \rightarrow \infty} \text{Sh}_z \approx 3.66 \quad (7.11-50)$$

になる。

7.12 境界層における物質移動

(1) 一様流れの解を用いた場合の物質移動の解析

3.4 節で説明した平板に沿う流れの境界層における物質移動を考える。図 7.12-1 に示すように、一様流速 $v_{x,\infty}$ 、一様濃度 $c_{A,\infty}$ の A 成分を含む流体 B が壁面に沿って流れるとし、壁面の表面では瞬間的に反応が起こり、壁面での A の濃度は c_{A0} になるとする。反応によってできた生成物は無視する。また、流体の密度 ρ 、流体中の A の拡散係数 \mathcal{D}_{AB} は一定とする。物質 A の保存式は以下のように表される（2章 2.5.4 の（1）に示したモル濃度基準の物質の保存式で反応項を無視する）。

$$\frac{\partial c_A}{\partial t} + v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \right) \quad (7.12-1)$$

定常状態であり、上式の右辺の第 2 項は上式の左辺第 2 項の対流項にくらべて小さいと仮定して無視すると次式を得る。

$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \quad (7.12-2)$$

境界条件は以下のように設定される。

$$c_A|_{x=0} = c_{A,\infty} \quad (7.12-3)$$

$$c_A|_{y=\infty} = c_{A,\infty} \quad (7.12-4)$$

$$c_A|_{y=0} = c_{A0} \quad (7.12-5)$$

ここで、3.4 節で用いた v_x と v_y を表現する変数と関数をもう一度以下に示す。

$$v_x = v_{x,\infty} \frac{\partial f}{\partial \eta} \quad (7.12-6)$$

$$v_y = -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\nu v_{x,\infty}}{x}} \left(f - \eta \frac{\partial f}{\partial \eta} \right) \quad (7.12-7)$$

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / v_{x,\infty}}} \quad (7.12-8)$$

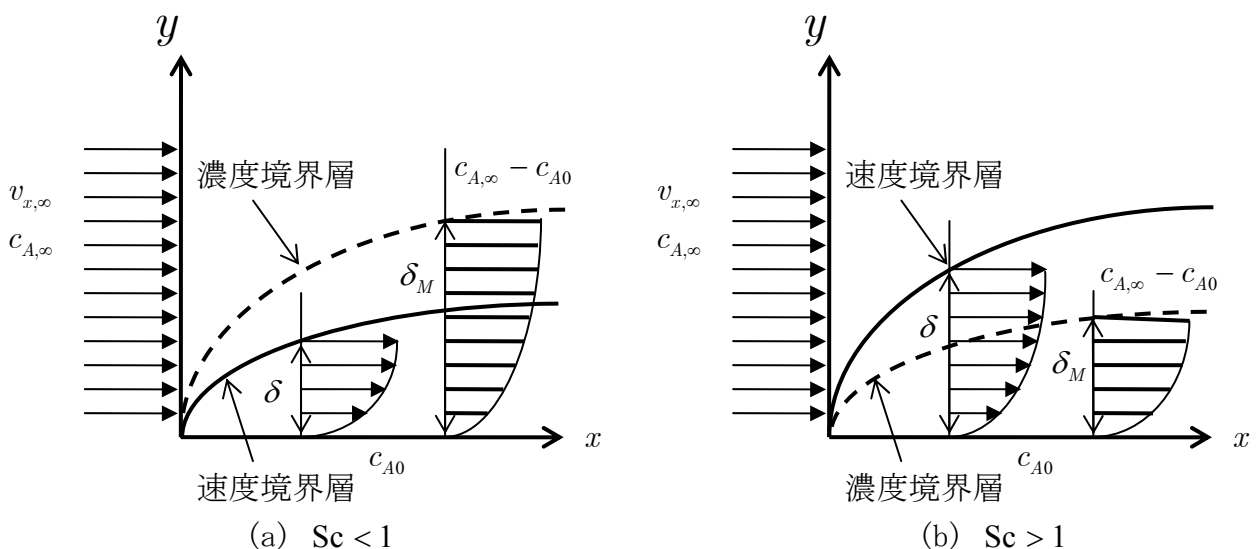


図 7.12-1 平板に沿う流れの速度境界層と濃度境界層

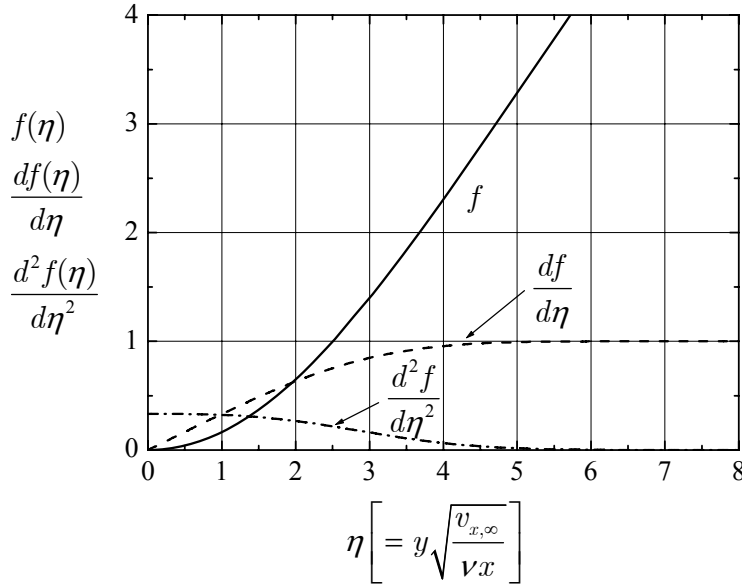


図 7.12-2 Blasius の解の計算値

上記の関数や変数を用いて、(7.12-2)式を書き直すと、

$$\frac{d^2 c_A}{d\eta^2} + \frac{\text{Sc}}{2} f \frac{dc_A}{d\eta} = 0 \quad (7.12-9)$$

$$\text{Sc} = \frac{\nu}{\mathcal{D}_{AB}} \quad (7.12-10)$$

となる。ただし、関数 $f(\eta)$ とその微分 $df(\eta)/d\eta$ 、 $d^2f(\eta)/d\eta^2$ は図 7.12-2 に示されるような、数値計算によって得られる関数である。境界条件は、以下ようになる。

$$c_A|_{\eta=\infty} = c_{A,\infty} \quad (7.12-11)$$

$$c_A|_{\eta=0} = c_{A0} \quad (7.12-12)$$

ここで、 $\theta = dc_A/d\eta$ とすれば、

$$\frac{d\theta}{\theta} = -\frac{\text{Sc}}{2} f d\eta \quad (7.12-13)$$

であるから、積分すると、

$$\theta \left[= \frac{dc_A}{d\eta} \right] = C_1 \exp\left(-\frac{\text{Sc}}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) \quad (7.12-14)$$

である。もう一度積分すれば、

$$c_A = C_1 \int_0^\eta \exp\left(-\frac{\text{Sc}}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta + C_2 \quad (7.12-15)$$

である。(7.12-15)式と境界条件である(7.12-11)および(7.12-12)式から、以下のように濃度分布を表す式が得られる。

$$\frac{c_A - c_{A,\infty}}{c_{A0} - c_{A,\infty}} = 1 - \frac{\int_0^\eta \exp\left(-\frac{\text{Sc}}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta}{\int_0^\infty \exp\left(-\frac{\text{Sc}}{2} \int_0^\eta f d\eta\right) d\eta} \quad \left(\eta = \frac{y}{\sqrt{\nu x / v_{x,\infty}}} \right) \quad (7.12-16)$$

ここで、境界層方程式より、 $f(d^2f/d\eta^2) + 2(d^3f/d\eta^3) = 0$ となるので、

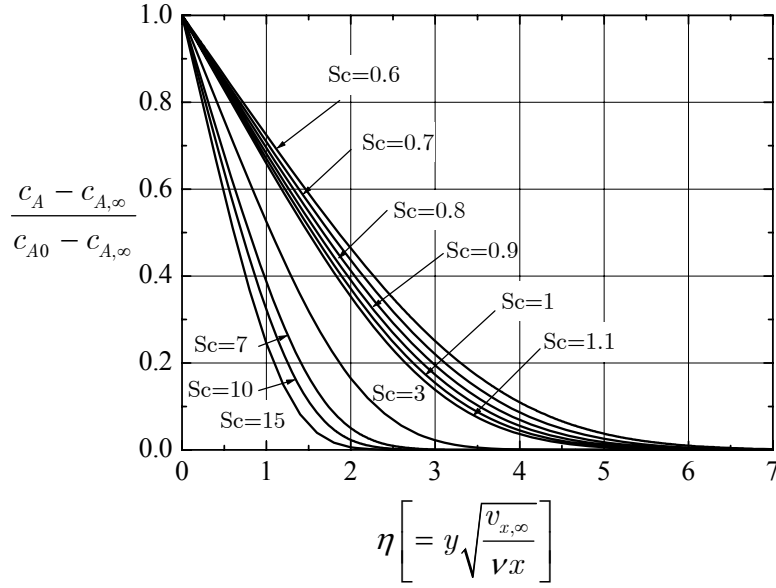


図 7.12-3 層流境界層の濃度分布

$$\int_0^\eta f d\eta = -2 \int_0^\eta \frac{d^3 f / d\eta^3}{d^2 f / d\eta^2} d\eta = -2 \ln \left(\frac{d^2 f}{d\eta^2} \right) \quad (7.12-17)$$

であるから、(7.12-16)式は、以下のように表される。

$$\frac{c_A - c_{A,\infty}}{c_{A0} - c_{A,\infty}} = 1 - \frac{\int_0^\eta \exp[\text{Sc} \cdot \ln(d^2 f / d\eta^2)] d\eta}{\int_0^\infty \exp[\text{Sc} \cdot \ln(d^2 f / d\eta^2)] d\eta} = 1 - \frac{\int_0^\eta (d^2 f / d\eta^2)^{\text{Sc}} d\eta}{\int_0^\infty (d^2 f / d\eta^2)^{\text{Sc}} d\eta} \quad (7.12-18)$$

上式から A の濃度分布を求めるためには、3.4 節に示したような数値計算が必要になるが、計算結果は図 7.12-3 に示すようになる。また、管壁でのモル流束 $N_{A,y}^*|_{y=0}$ は、

$$N_{A,y}^*|_{y=0} = -\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} = -\frac{\mathcal{D}_{AB}}{\sqrt{\nu x / v_{x,\infty}}} \frac{dc_A}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \quad (7.12-19)$$

で与えられる。平板上の任意の位置 x における局所物質移動係数 $k_A(x)$ は、

$$-N_{A,y}^*|_{y=0} = k_A(x) \times (c_{A,\infty} - c_{A0}) \quad (7.12-20)$$

で定義されるので、

$$k_A(x) = -\frac{1}{c_{A0} - c_{A,\infty}} \frac{\mathcal{D}_{AB}}{\sqrt{\nu x / v_{x,\infty}}} \frac{dc_A}{d\eta} \Big|_{\eta=0} \quad (7.12-21)$$

(7.12-18)式を上式に代入すれば、

$$\frac{\text{Sh}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{(d^2 f / d\eta^2)^{\text{Sc}} \Big|_{\eta=0}}{\int_0^\infty (d^2 f / d\eta^2)^{\text{Sc}} d\eta} \quad (7.12-22)$$

$$\text{Sh}_x = k_A(x) \cdot x / \mathcal{D}_{AB} \quad (7.12-23)$$

$$\text{Re}_x = xv_{x,\infty} / \nu \quad (7.12-24)$$

となる。上記無次元数の添字 x は、局所（ローカル）の値であることを示す。上式から、局所物質移動係数が計算される。この計算も数値計算に頼らざるをえないが、計算結果を図 7.12-4 に実線で示す。図に示す結果は次式で近似できる。

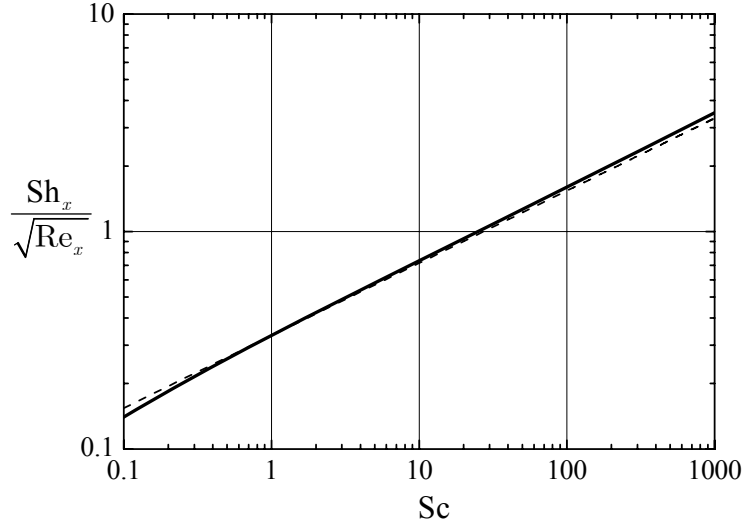


図 7.12-4 $Sh_x / \sqrt{Re_x}$ とシュミット数 Sc の関係

$$(Sc \rightarrow 0) \quad Sh_x = 0.564Sc^{1/2} Re_x^{1/2} \quad (7.12-25)$$

$$(0.6 < Sc < 15) \quad Sh_x = 0.332Sc^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (7.12-26)$$

$$(Sc \rightarrow \infty) \quad Sh_x = 0.339Sc^{1/3} Re_x^{1/2} \quad (7.12-27)$$

なお、(7.12-26)式の計算結果を図 7.12-4 に破線で示す。 $x = 0 \sim l$ の区間の平均の物質流束は、平均の物質移動係数を用いて、以下のように表される。

$$-\frac{1}{l} \int_0^l N_{A,y}^* \Big|_{y=0} dx = \bar{k}_A (c_{A,\infty} - c_{A0}) \quad (7.12-28)$$

ここで、 $x = 0 \sim l$ の区間の平均の物質移動係数 \bar{k}_A は以下の式で近似できる。

$$(Sc \rightarrow 0) \quad Sh = 1.13Sc^{1/2} Re^{1/2} \quad (7.12-29)$$

$$(0.6 < Sc < 15) \quad Sh = 0.664Sc^{1/3} Re^{1/2} \quad (7.12-30)$$

$$(Sc \rightarrow \infty) \quad Sh = 0.678Sc^{1/3} Re^{1/2} \quad (7.12-31)$$

$$Sh = \bar{k}_{Al} / \mathcal{D}_{AB} \quad (7.12-32)$$

$$Re = lv_{x,\infty} / \nu \quad (7.12-33)$$

速度境界層と同様に、濃度境界層の厚さ δ_M を次式が成立する y の位置であると定義する。

$$\frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0} - c_{A,\infty}} = 0.99 \quad (7.12-34)$$

上式が成立するときの η を $\eta_M \left[= \delta_T / \sqrt{\nu x / v_{x,\infty}} \right]$ とすると、(7.12-34)式に(7.12-18)式を代入して、

$$0.99 = \frac{\int_0^{\eta_M} (d^2 f / d\eta^2)^{Sc} d\eta}{\int_0^\infty (d^2 f / d\eta^2)^{Sc} d\eta} \quad (7.12-35)$$

η_M は Sc の関数となり、その値はやはり数値計算で調べることになる。3章で示したように層流の速度境界層では、 $v_x = 0.99v_{x,\infty}$ を満たす場合、 $\eta \approx 5$ である。したがって、(7.12-8)式の関係を用いると、

$$\frac{\delta_M}{\delta} = \frac{\eta_M}{5} \quad (7.12-36)$$

0.1 < Sc < 100 の範囲で求められた δ_M / δ を図 7.12-5 に実線で示す。また、図に示される計算線は近似的に次式で表される（図中の破線）。

$$\frac{\delta_M(x)}{\delta(x)} = Sc^{-1/3} \quad (7.12-37)$$

図 7.12-5 に示されるように、Sc = 1 の場合には、濃度境界層の厚さと速度境界層の厚さは一致するが、Sc < 1 の場合には、濃度境界層の厚さが速度境界層の厚さよりも大きくなることわかる。

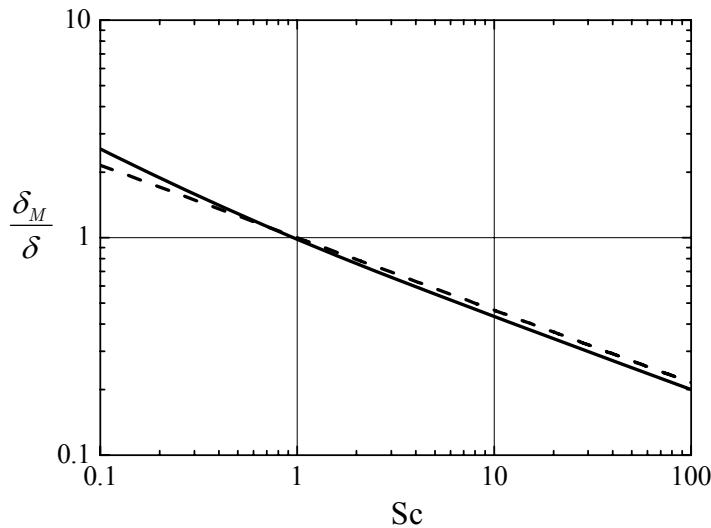


図 7.12-5 δ_M / δ とシュミット数 Sc の関係

(2) Pohlhausen の解を用いた場合の物質移動の解析

境界層方程式と(7.12-2)式を y について $0 \sim \infty$ で積分すると、次式を得る(付録 7.13 節を参照)。

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (v_{\infty,x} - v_x) dy + \rho \frac{dv_\infty}{dx} \int_0^\infty (v_{\infty,x} - v_x) dy = \mu \left. \frac{\partial v_x}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (7.12-38)$$

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (c_{A,\infty} - c_A) dy = \mathcal{D}_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial y} \right|_{y=0} \quad (7.12-39)$$

前章の 3.4.2 項において、得られた解で、一様流れ ($\partial v_{x,\infty} / \partial x = 0$) を仮定すると、

$$(0 \leq y < \delta) \quad \frac{v_x}{v_{x,\infty}} = 2\eta - 2\eta^3 + \eta^4 \quad (7.12-40)$$

$$(\delta < y) \quad \frac{v_x}{v_{x,\infty}} = 1 \quad (7.12-41)$$

$$\eta = y / \delta(x) \quad (7.12-42)$$

であるが、この解を用いて物質移動を考える。ここで濃度境界層の厚さ $\delta_M(x)$ を用いて、境界層の濃度分布が以下のように表せるとする。

$$(0 \leq y < \delta_M) \quad \frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0} - c_{A,\infty}} = (2\eta_M - 2\eta_M^3 + \eta_M^4) \quad (7.12-43)$$

$$(\delta_M < y) \quad \frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0} - c_{A,\infty}} = 1 \quad (7.12-44)$$

$$\eta_M = y / \delta_M(x) \quad (7.12-45)$$

ただし、(7.12-43)式で表される関数は根拠なく選ばれているわけではなく、(7.12-2)式、濃度に関する境界条件、 $\delta_M \geq 1$ の位置における $c_{A,\infty}$ との連続性を満足している関数である。(7.12-40)式を(7.12-38)式に代入すると、式の左辺の1項目の積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v_x(v_{x,\infty} - v_x)dy &= \int_0^1 v_{x,\infty}(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)[v_{x,\infty} - v_{x,\infty}(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)]\delta(x)d\eta \\ &= v_{x,\infty}^2\delta(x)\int_0^1(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)[1 - 2\eta + 2\eta^3 - \eta^4]d\eta = \frac{37}{315}v_{x,\infty}^2\delta(x) \end{aligned} \quad (7.12-46)$$

(7.12-38)式の右辺の積分は、

$$\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} = \frac{\mu}{\delta(x)} \frac{\partial v_{x,\infty}(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)}{\partial \eta} \Big|_{y=0} = \frac{2v_{x,\infty}\mu}{\delta(x)} \quad (7.12-47)$$

(7.12-46)、(7.12-47)式を(7.12-38)式に代入すると、

$$\frac{37}{315}\rho v_{x,\infty}^2 \frac{d\delta(x)}{dx} = \frac{2v_{x,\infty}\mu}{\delta(x)} \quad (7.12-48)$$

$\delta(x)|_{x=0} = 0$ の境界条件を用いて上式を積分すると、速度境界層の厚さを与える次式が得られる。

$$\delta(x) = 2\sqrt{\frac{315}{37}} \left(\frac{\mu x}{\rho v_{x,\infty}} \right)^{1/2} \quad (7.12-49)$$

ここで、 $\delta_M(x)$ と $\delta(x)$ の比 ϕ_M を次式で定義する。

$$\phi_M = \frac{\delta_M(x)}{\delta(x)} \quad (7.12-50)$$

ここで、 ϕ_M は x によって変化しないと仮定する。 $\phi_M \leq 1$ （濃度境界層の厚さが速度境界層の厚さよりも小さい）である場合、(7.12-43)および(7.12-40)式を(7.12-39)式の左辺の積分項に代入すると、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v_x(c_{A,\infty} - c_A)dy &= \int_0^1 v_{x,\infty}(2\eta - 2\eta^3 + \eta^4)(c_{A,\infty} - c_{A0})(1 - 2\eta_M + 2\eta_M^3 - \eta_M^4)dy \\ &= v_{x,\infty}(c_{A,\infty} - c_{A0})\delta_M \int_0^1 (2\eta_M\phi_M - 2\eta_M^3\phi_M^3 + \eta_M^4\phi_M^4)(1 - 2\eta_M + 2\eta_M^3 - \eta_M^4)d\eta_M \\ &= v_{x,\infty}(c_{A,\infty} - c_{A0})\delta_M \left(\frac{2}{15}\phi_M - \frac{3}{140}\phi_M^3 - \frac{1}{180}\phi_M^4 \right) \end{aligned} \quad (7.12-51)$$

また、(7.12-39)式の右辺に(7.12-43)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} &= \frac{\mathcal{D}_{AB}}{\delta_M(x)} \frac{\partial [c_{A,\infty} - (c_{A0} - c_{A,\infty})(2\eta_M - 2\eta_M^3 + \eta_M^4)]}{\partial \eta_M} \Big|_{\eta_M=0} \\ &= -\frac{2\mathcal{D}_{AB}(c_{A0} - c_{A,\infty})}{\delta_M(x)} \end{aligned} \quad (7.12-52)$$

上式と(7.12-51)式を(7.12-39)式に代入すると、

$$v_{x,\infty}(c_{A,\infty} - c_{A0}) \left(\frac{2}{15}\phi_M - \frac{3}{140}\phi_M^3 + \frac{1}{180}\phi_M^4 \right) \frac{d\delta_M(x)}{dx} = \frac{2\mathcal{D}_{AB}(c_{A0} - c_{A,\infty})}{\delta_M(x)} \quad (7.12-53)$$

上式を積分すると、濃度境界層の厚さを与える次式を得る。

$$\delta_M(x) = 2 \left(\frac{\mathcal{D}_{AB}x}{v_{x,\infty}} \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{2}{15}\phi_M - \frac{3}{140}\phi_M^3 + \frac{1}{180}\phi_M^4 \right)^{-1/2} \quad (7.12-54)$$

上式と(7.12-49)式の比をとり 2 乗すると、

$$\left(\frac{\delta_M(x)}{\delta(x)}\right)^2 = \varphi_M^2 = \frac{37}{315} \left(\frac{\mathcal{D}_{AB}}{\nu}\right) \left(\frac{2}{15}\varphi_M - \frac{3}{140}\varphi_M^3 + \frac{1}{180}\varphi_M^4\right)^{-1} \quad (7.12-55)$$

上式から次式が得られる。

$$(\varphi_M \leq 1) \quad \frac{37}{315} \text{Sc}^{-1} = \left(\frac{2}{15}\varphi_M^3 - \frac{3}{140}\varphi_M^5 + \frac{1}{180}\varphi_M^6\right) \quad (7.12-56)$$

上式は、シュミット数と濃度境界層の厚さと速度境界層の厚さの比の関係を示す。

$\varphi_M > 1$ (濃度境界層の厚さが速度境界層の厚さよりも大きい) である場合には、(7.12-39)式の左辺の積分項は、 $y > \delta$ の場所では $v_x = v_{x,\infty}$ となるので、 $0 \leq y \leq \delta$ の区間と $\delta \leq y \leq \delta_M$ の区間で、

別々に積分する必要がある。すなわち、

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty v_x (c_{A,\infty} - c_A) dy \\ &= \int_0^\delta v_x (c_{A,\infty} - c_A) dy + \int_\delta^{\delta_M} v_{x,\infty} (c_{A,\infty} - c_A) dy \\ &= v_{x,\infty} (c_{A,\infty} - c_A) \delta \int_0^1 (2\eta - 2\eta^3 + \eta^4) (1 - 2\eta\varphi_M^{-1} + 2\eta^3\varphi_M^{-3} - \eta^4\varphi_M^{-4}) d\eta \\ & \quad + v_{x,\infty} (c_{A,\infty} - c_A) \delta_T \int_{1/\varphi_M}^1 (1 - 2\eta_M + 2\eta_M^3 - \eta_M^4) d\eta \\ &= v_{x,\infty} (c_{A,\infty} - c_A) \delta_M \left[\left(\frac{7}{10}\varphi_M^{-1} - \frac{13}{15}\varphi_M^{-2} + \frac{67}{140}\varphi_M^{-4} - \frac{7}{36}\varphi_M^{-5} \right) + \left(\frac{3}{10} - \varphi_M^{-1} + \varphi_M^{-2} - \frac{1}{2}\varphi_M^{-4} + \frac{1}{5}\varphi_M^{-5} \right) \right] \\ &= v_{x,\infty} (c_{A,\infty} - c_A) \delta_M \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10}\varphi_M^{-1} + \frac{2}{15}\varphi_M^{-2} - \frac{3}{140}\varphi_M^{-4} + \frac{1}{180}\varphi_M^{-5} \right) \end{aligned} \quad (7.12-57)$$

上式と(7.12-52)式を(7.12-39)式に代入すると、

$$v_{x,\infty} (c_{A,\infty} - c_A) \left(\frac{3}{10} - \frac{3}{10}\varphi_M^{-1} + \frac{2}{15}\varphi_M^{-2} - \frac{3}{140}\varphi_M^{-4} + \frac{1}{180}\varphi_M^{-5} \right) \frac{d\delta_M(x)}{dx} = \frac{2\mathcal{D}_{AB}(c_{A0} - c_{A,\infty})}{\delta_M(x)} \quad (7.12-58)$$

上式を積分し、(7.12-54)～(7.12-56)式における展開と同様な手続きを行うと次式を得る。

$$(\varphi_M \geq 1) \quad \frac{37}{315} \text{Sc}^{-1} = \left(\frac{3}{10}\varphi_M^2 - \frac{3}{10}\varphi_M + \frac{2}{15} - \frac{3}{140}\varphi_M^{-2} + \frac{1}{180}\varphi_M^{-3} \right) \quad (7.12-59)$$

図 7.12-6 に(7.12-56)式と上式の計算結果を実線で示す。(7.12-56)式と上式の計算結果は、次式で近似できる。

$$\varphi_M = \text{Sc}^{-1/3} \quad (7.12-60)$$

(7.12-60)式の計算結果を同図に破線で示す。図から、 $\text{Sc} < 1$ のときには $\varphi_M < 1$ 、 $\text{Sc} \leq 1$ のときには $\varphi_M \leq 1$ であることがわかる。すなわち、(1) の場合と同様な結果になる。最終的に濃度分布は以下のように表される。

$$(0 \leq y < \delta_M) \quad \frac{c_{A0} - c_A}{c_{A0} - c_{A,\infty}} = 2 \left(\frac{y}{\varphi_M \delta} \right) - 2 \left(\frac{y}{\varphi_M \delta} \right)^3 + \left(\frac{y}{\varphi_M \delta} \right)^4 \quad (7.12-61)$$

また、管壁の x の位置におけるモル流束 $N_{A,w}^*(x)$ は、

$$N_{A,w}^*(x) = -\mathcal{D}_{AB} \left. \frac{\partial c_A}{\partial y} \right|_{y=0} = (c_{A0} - c_{A,\infty}) \frac{2\mathcal{D}_{AB}}{\varphi_M \delta} \quad (7.12-62)$$

で与えられる。平板上の任意の x の位置における局所物質移動係数 $k_A(x)$ は、次式で定義される。

$$-N_{A,w}^*(x) = k_A(x) (c_{A,\infty} - c_{A0}) \quad (7.12-63)$$

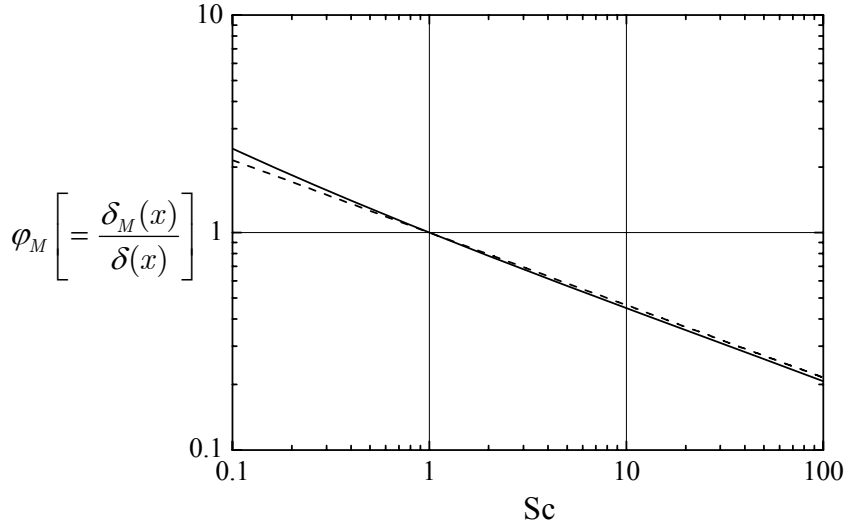


図 7.12-6 $\varphi_M [= \delta_M(x)/\delta(x)]$ とシュミット数 Sc の関係

上式と(7.12-62)式より、局所物質移動係数は次式で与えられる。

$$k_A(x) = \frac{2\mathcal{D}_{AB}}{\varphi_M \delta} \quad (7.12-64)$$

上式に、(7.12-49)および(7.12-60)式を代入すれば、

$$\text{Sh}_x \left[= \frac{h(x) \cdot x}{k} \right] = \sqrt{\frac{37}{315}} \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} = 0.343 \text{Sc}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \quad (7.12-65)$$

$$\text{Re}_x = \frac{\rho x v_{x,\infty}}{\mu} \quad (7.12-66)$$

になることがわかる。また、 φ_M に関して陽に記述することができない(7.12-56)式や(7.12-59)式を用いた場合でも、

$$\text{Sh}_x = f(\text{Re}_x, \text{Sc}) \quad (7.12-67)$$

と表現できることがわかるであろう。(7.12-62)、(7.12-49)および(7.12-60)式を用いると、 $0 \sim l$ までの区間の平均のモル流束は、

$$\begin{aligned} \frac{1}{l} \int_0^l N_{A,y}^* \Big|_{y=0} dx &= \frac{1}{l} \int_0^l \left(-\mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} \right) dx = \frac{(c_{A0} - c_{A,\infty})}{l} \int_0^l \frac{2\mathcal{D}_{AB}}{\varphi_M \delta} dx \\ &= \sqrt{\frac{37}{315}} \frac{(c_{A0} - c_{A,\infty}) \mathcal{D}_{AB} \text{Sc}^{1/3}}{l} \left(\frac{\rho v_{x,\infty}}{\mu} \right)^{1/2} \int_0^l \frac{1}{\sqrt{x}} dx \\ &= 2 \sqrt{\frac{37}{315}} \left(\frac{\rho v_{x,\infty} l}{\mu} \right)^{1/2} \frac{\mathcal{D}_{AB} \text{Sc}^{1/3}}{l} (c_{A0} - c_{A,\infty}) \end{aligned} \quad (7.12-68)$$

平均の物質移動係数 \bar{k}_A は次式で定義される。

$$-\frac{1}{l} \int_0^l N_{A,y}^* \Big|_{y=0} dx = \bar{k}_A (c_{A,\infty} - c_{A0}) \quad (7.12-69)$$

したがって、平均の物質移動係数 \bar{k}_A は、次式で与えられる。

$$\text{Sh} = 2 \sqrt{\frac{37}{315}} \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3} = 0.685 \text{Re}^{1/2} \text{Sc}^{1/3} \quad (7.12-70)$$

(7.12-65)式と(7.12-70)式は、(7.12-26)式と(7.12-30)式と同様な結果となることがわかる。

(3) 熱伝達問題の同様な取り扱い

同様に、3.4節で説明した平板に沿う流れの境界層における伝熱問題を考える。図 7.12-7 に示すように、一様流速 $v_{x,\infty}$ 、一様温度 T_∞ の流体が、一様温度 T_0 の壁面に沿って流れるとする。また、流体の密度 ρ 、熱容量 c_p は一定とする。境界層近似により、エネルギーの保存式は以下のように表される (7.3 節参照)。

$$\rho c_p \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2 \quad (7.12-71)$$

上式中の右辺の最後の項は散逸に関する項であるが、粘性による発熱はないものとして無視する。境界条件は以下のように設定する。

$$T|_{x=0} = T_\infty \quad (7.12-72)$$

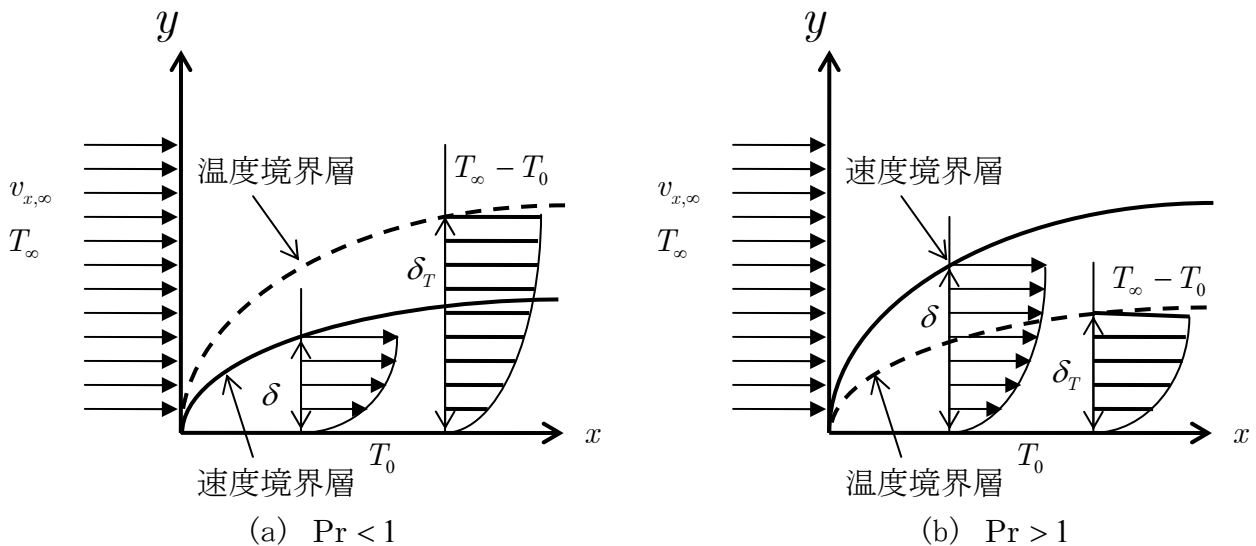


図 7.12-7 平板に沿う流れの速度境界層と温度境界層

$$T|_{y=\infty} = T_\infty \quad (7.12-73)$$

$$T|_{y=0} = T_0 \quad (7.12-74)$$

(7.12-6)~(7.12-8)式を用いて、(7.12-71)式を書き直すと、

$$\frac{d^2 T}{d\eta^2} + \frac{\text{Pr}}{2} f \frac{dT}{d\eta} = 0 \quad (7.12-75)$$

$$\text{Pr} = \frac{\rho c_p \nu}{k} = \frac{\nu}{\alpha} \quad (7.12-76)$$

となる。境界条件は、以下ようになる。

$$T|_{\eta=\infty} = T_\infty \quad (7.12-77)$$

$$T|_{\eta=0} = T_0 \quad (7.12-78)$$

ただし、(7.12-75)~(7.12-78)式は、(7.12-9)~(7.12-12)式と全く同じ形式であることがわかる。したがって、(1) や (2) の結果を共通に用いることができる。物質移動において用いた変数と熱伝達に用いられる変数の間には次の対応 ($\text{Sh} \rightarrow \text{Nu}$ 、 $\text{Sh}_x \rightarrow \text{Nu}_x$ 、 $\text{Sc} \rightarrow \text{Pr}$ 、 $\delta_M \rightarrow \delta_T$ 、

$\varphi_M \rightarrow \varphi_T$) がある。これより、温度分布は次式で与えられる。

$$\frac{T - T_\infty}{T_0 - T_\infty} = 1 - \frac{\int_0^\eta (d^2 f / d\eta^2)^{\text{Pr}} d\eta}{\int_0^\infty (d^2 f / d\eta^2)^{\text{Pr}} d\eta} \quad (7.12-79)$$

また、任意の x の位置における、壁面での熱流束 $q_y|_{y=0}$ は局所熱伝達係数 $h(x)$ を用いて次のように表される。

$$-q_y|_{y=0} = k \frac{\partial T}{\partial y} = h(x)(T_\infty - T_0) \quad (7.12-80)$$

$$\frac{\text{Nu}_x}{\sqrt{\text{Re}_x}} = \frac{(d^2 f / d\eta^2)^{\text{Pr}}|_{\eta=0}}{\int_0^\infty (d^2 f / d\eta^2)^{\text{Pr}} d\eta} \quad (7.12-81)$$

$$\text{Nu}_x = xh(x) / k \quad (7.12-82)$$

$$\text{Re}_x = xv_{x,\infty} / \nu \quad (7.12-83)$$

Nu_x は局所ヌセルト数である。(7.12-81)式は、近似的に以下のように表される。

$$(\text{Pr} \rightarrow 0) \quad \text{Nu}_x = 0.564 \text{Pr}^{1/2} \text{Re}_x^{1/2} \quad (7.12-84)$$

$$(0.6 < \text{Pr} < 15) \quad \text{Nu}_x = 0.332 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \quad (7.12-85)$$

$$(\text{Pr} \rightarrow \infty) \quad \text{Nu}_x = 0.339 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}_x^{1/2} \quad (7.12-86)$$

また、 $x = 0 \sim l$ の区間の平均の熱流束は、平均の熱伝達係数 \bar{h} を用いて次式で表す。

$$\frac{1}{l} \int_0^l q_y|_{y=0} dx = \bar{h}(T_\infty - T_0) \quad (7.12-87)$$

上式中の平均の熱伝達係数は、以下のように近似できる。

$$(\text{Pr} \rightarrow 0) \quad \text{Nu} = 1.13 \text{Pr}^{1/2} \text{Re}^{1/2} \quad (7.12-88)$$

$$(0.6 < \text{Pr} < 15) \quad \text{Nu} = 0.664 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}^{1/2} \quad (7.12-89)$$

$$(\text{Pr} \rightarrow \infty) \quad \text{Nu} = 0.678 \text{Pr}^{1/3} \text{Re}^{1/2} \quad (7.12-90)$$

$$\text{Nu} = \bar{h}x / k \quad (7.12-91)$$

$$\text{Re} = v_{x,\infty} l / \nu \quad (7.12-92)$$

7.13 境界層方程式の積分形

境界層方程式は、

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0 \quad (7.13-1)$$

$$\rho \left(v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} - v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} \right) = \mu \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} \quad (7.13-2)$$

上式を y について $0 \sim \infty$ で積分すると、

$$\rho \int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \rho \int_0^\infty v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dy - \rho \int_0^\infty v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} dy = \mu \int_0^\infty \frac{\partial^2 v_x}{\partial x^2} dy \quad (7.13-3)$$

(7.13-1)式より

$$v_y = - \int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \quad (7.13-4)$$

であるので、(7.13-3)式の左辺 2 項目の積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} dx &= - \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = - \left[v_x \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \\ &= -v_{x,\infty} \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\infty v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (7.13-5)$$

上式を(7.13-3)式に代入すると、(7.13-3)式の左辺は以下のようになる。

$$\begin{aligned} &\rho \int_0^\infty 2v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_{x,\infty} \frac{\partial v_x}{\partial x} - v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} dy \\ &= \rho \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} \left[v_x (v_x - v_{x,\infty}) \right] + v_x \frac{\partial v_{x,\infty}}{\partial x} - v_{x,\infty} \frac{dv_{x,\infty}}{dx} dy \\ &= \rho \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (v_x - v_{x,\infty}) dy + \rho \frac{dv_{x,\infty}}{dx} \int_0^\infty v_x - v_{x,\infty} dy \end{aligned} \quad (7.13-6)$$

一方、(7.13-3)式の右辺は、

$$\mu \int_0^\infty \frac{\partial^2 v_x}{\partial y^2} dy = \mu \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} \right]_0^\infty = -\mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (7.13-7)$$

したがって、次式を得る。

$$\rho \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (v_\infty - v_x) dy + \rho \frac{dv_\infty}{dx} \int_0^\infty (v_\infty - v_x) dy = \mu \frac{\partial v_x}{\partial y} \Big|_{y=0} \quad (7.13-8)$$

エネルギーの保存式を境界層近似したものは、

$$\rho c_P \left(v_x \frac{\partial T}{\partial x} + v_y \frac{\partial T}{\partial y} \right) = k \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \quad (7.13-9)$$

上式を y について $0 \sim \infty$ で積分すると、

$$\rho c_P \int_0^\infty v_x \frac{\partial T}{\partial x} dy + \rho c_P \int_0^\infty v_y \frac{\partial T}{\partial y} dy = k \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy \quad (7.13-10)$$

(7.13-4)式より、(7.13-10)式の左辺 2 項目の積分は、

$$\begin{aligned} \int_0^\infty v_y \frac{\partial T}{\partial y} dx &= - \int_0^\infty \frac{\partial T}{\partial y} \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) dy = - \left[T \left(\int_0^y \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \right]_0^\infty + \int_0^\infty T \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \\ &= -T_\infty \int_0^\infty \frac{\partial v_x}{\partial x} dy + \int_0^\infty T \frac{\partial v_x}{\partial x} dy = -T_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x dy + \int_0^\infty T \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \end{aligned} \quad (7.13-11)$$

上式を(7.13-10)式に代入すると、(7.13-10)式の左辺は以下のようになる。

$$\begin{aligned}
 & \rho c_p \left(-T_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x dy + \int_0^\infty v_x \frac{\partial T}{\partial x} + T \frac{\partial v_x}{\partial x} dy \right) \\
 &= \rho c_p \left(-T_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x dy + \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial x} (v_x T) dy \right) = \rho c_p \left(-T_\infty \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x dy + \frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x T dy \right) \\
 &= \frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho c_p v_x (T - T_\infty) dy
 \end{aligned} \tag{7.13-12}$$

一方、(7.13-10)式の右辺は、

$$k \int_0^\infty \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} dy = k \left[\frac{\partial T}{\partial y} \right]_0^\infty = -k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \tag{7.13-13}$$

結果的に、次式を得る。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty \rho c_p v_x (T_\infty - T) dy = k \frac{\partial T}{\partial y} \Big|_{y=0} \tag{7.13-14}$$

AとBの2成分から成り立つ系での層流境界層におけるAの保存式は以下のようになる。

$$v_x \frac{\partial c_A}{\partial x} + v_y \frac{\partial c_A}{\partial y} = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial^2 c_A}{\partial y^2} \tag{7.13-15}$$

ただし、上式ではx方向の拡散項は、対流項に比べ小さいとして無視している。上式は、(7.13-9)式と同じ形式であるから、同様な手続きで積分形を得ることができ、以下のようになる。

$$\frac{d}{dx} \int_0^\infty v_x (c_{A,\infty} - c_A) dy = \mathcal{D}_{AB} \frac{\partial c_A}{\partial y} \Big|_{y=0} \tag{7.13-16}$$

7.14 平面に対する粒子の入射

半径 λ の下半球上にあり、速度 $u (= |\mathbf{u}|)$ を持つ粒子が面積 S の平面に θ の角度から Δt 時間当たりに流れ込む個数を考える (図 7.14-1)。ここで、粒子の個数密度を n とする。平面 S に立体角 $d\Omega$ から入射する粒子の個数 dn は、マックスウェルの分布関数 (u の関数として表現したもの) を用いると、

$$dn = nf(u)du \left(\frac{d\Omega}{4\pi} \right) Su\Delta t \cos\theta \quad (7.14-1)$$

$$f(u) = 4\pi \left(\frac{m}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} u^2 \exp\left(-\frac{mu^2}{2k_B T}\right) \quad (7.14-2)$$

$$d\Omega = \sin\theta d\theta d\phi \quad (7.14-3)$$

全方向から侵入する粒子の数は、(7.14-1)式を積分すれば求まるので、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} nf(u)Su\Delta t \cos\theta \sin\theta d\theta d\phi du \\ &= \frac{1}{4\pi} nS\Delta t \int_0^\infty uf(u)du \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi/2} \cos\theta \sin\theta d\theta \\ &= \frac{1}{2} nS\Delta t \int_0^\infty uf(u)du \left[\frac{\sin^2\theta}{2} \right]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{1}{4} n\bar{u}S\Delta t \end{aligned} \quad (7.14-4)$$

したがって、単位時間、単位面積当たりに流入する粒子数は、

$$\frac{1}{4} n\bar{u} \quad (7.14-5)$$

になる。

同じような考え方で、平均自由行程 λ だけ進んで S に衝突する粒子が y 方向に進む平均の距離の平均値を求める。速度 \bar{u} を持つ粒子が平面 S に θ の角度から単位時間当たりに流れ込む個数を考える。ここで、粒子の個数密度を n とする。上に示したように、立体角 $d\Omega$ から、平面 S の単位面積、単位時間当たりに侵入する粒子の個数は

$$\int_0^\infty n \frac{d\Omega}{4\pi} f(u)u \cos\theta du = n \frac{d\Omega}{4\pi} \bar{u} \cos\theta \quad (7.14-6)$$

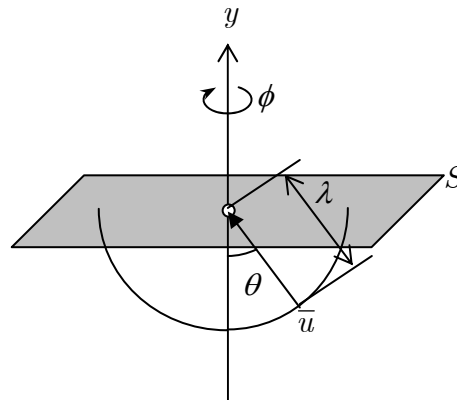


図 7.14-1 y 軸に垂直な面に下側から入射する粒子

である。ところで、最後の衝突の後に粒子が λ だけ移動して平面 S に入射するとすると、粒子が進む y 方向の平均の距離は、

$$\begin{aligned} \delta &= \frac{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} (\lambda \cos \theta) n \frac{1}{4\pi} \bar{u} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi}{\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} n \frac{1}{4\pi} \bar{u} \cos \theta \sin \theta d\theta d\phi} = \frac{\int_0^{\pi/2} (\lambda \cos \theta) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\int_0^{\pi/2} \sin \theta \cos \theta d\theta} \\ &= \frac{-\lambda \left[\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^{\pi/2}}{\left[\frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^{\pi/2}} = \frac{\lambda(1/3)}{1/2} = \frac{2}{3} \lambda \end{aligned} \quad (7.14-7)$$

になる。

7.15 気体分子の平均自由行程

気体分子は毎秒数 100 m 程度の速さで運動しているが、分子は大きさをもっているので、**図 7.15-1** に示すように、絶えず衝突をくり返している。分子は 1 つの衝突から次の衝突までの間はまっすぐに飛び、衝突によってその方向および速度を変えるが、1 つの衝突から次の衝突までの間に運動する距離を自由行程 (free path) という。自由行程は、衝突のたびに変化し一定でないが、その平均値は分子の大きさや分子密度で定まる。1 個の分子に着目してその動きを観察すれば、ある点から出発した分子 (速さが u_1) は、ある時間 t_1 後に、他の分子と衝突し、前とは別の方向に速さ u_2 で運動し、再び t_2 時間後に次の衝突を行なう。こうして、 $j-1$ 番目の衝突と j 番目の衝突の間に、速さ u_j で t_j 時間運動するものとし、 t 時間の間に n 回衝突をすれば、その間に分子が運動した距離の総和は、

$$L = \sum_{j=1}^n u_j t_j = \sum_{j=1}^n l_j = n\lambda \quad (7.15-1)$$

である。ここで、 l_j は $j-1$ 番目の衝突と j 番目の衝突の間に飛んだ距離、すなわち自由行程であり、 λ はその平均値である。 n/t は単位時間当りの平均の衝突頻度 N になる。上式の両辺を t で割れば、

$$\frac{L}{t} [= \bar{u}] = \frac{n\lambda}{t} = N\lambda \quad (7.15-2)$$

となる。したがって、平均衝突頻度 N を求めれば、平均自由行程 λ を知ることができる。簡単のため分子はすべて同じ直径 d の球からなり、しかも空間に静止しているものとする。このような空間に、同じ種類の分子が平均速度 \bar{u} で飛び込んで来た場合の衝突回数を考える。**図 7.15-1** に示すように、衝突によるジグザグな分子の軌跡をまっすぐに引き延ばしたとする。2 つの分子が衝突するためには、互いの分子の中心間の距離が d まで接近しなければならない。したがって、分子の直径 d の 2 倍の直径を持つ円筒中に中心がある分子の数を与えられれば、衝突頻度が求まる。すなわち、分子が t 秒間に運動する距離は $\bar{u}t$ であるので、運動する間に分子が覆う総体積 $\pi d^2 \bar{u}t$ 、の円筒内にある分子とはすべて衝突を行なう。空間に止まっている分子の個数密度を n とすれば、単位時間当りの平均衝突回数 N は、

$$N = \frac{n(\pi d^2 \bar{u}t)}{t} = \pi d^2 \bar{u}n \quad (7.15-3)$$

したがって、(7.15-2)式より、 λ は、

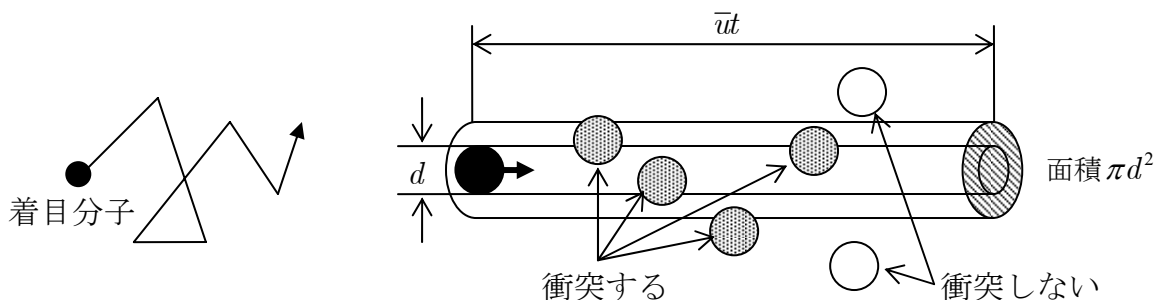


図 7.15-1 分子の衝突と自由行程

$$\lambda = \frac{\bar{u}}{N} = \frac{\bar{u}}{\pi d^2 \bar{u} n} = \frac{1}{\pi d^2 n} \quad (7.15-4)$$

となる。

ここまでは、着目している分子以外は静止しているとしたが、実際には他の分子も動いている。その場合の衝突頻度は、分子同士の相対速度を用いて表現する必要がある。ここで、分子1と分子2の混合気体があるときに、それらの分子が衝突する頻度を考える。分子1の速度が、 $\mathbf{u}_1 = \mathbf{i}_x u_{1x} + \mathbf{i}_y u_{1y} + \mathbf{i}_z u_{1z}$ で与えられるとすると、速度が $u_{1x} + du_{1x}$ 、 $u_{1y} + du_{1y}$ 、 $u_{1z} + du_{1z}$ の間の値をもつ単位体積当たりの分子数 dn_1 はマックスウェル分布より、

$$dn_1 = n_1 \left(\frac{m_1}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_1}{2k_B T} u_1^2 \right] du_{1x} du_{1y} du_{1z} \quad (7.15-5)$$

$$u_1^2 = |\mathbf{u}_1|^2 = u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2 \quad (7.15-6)$$

同様に、分子2の速度が、 $\mathbf{u}_2 = \mathbf{i}_x u_{2x} + \mathbf{i}_y u_{2y} + \mathbf{i}_z u_{2z}$ で与えられるとすると、速度が $u_{2x} + du_{2x}$ 、 $u_{2y} + du_{2y}$ 、 $u_{2z} + du_{2z}$ の間の値をもつ単位体積当たりの2の分子数 dn_2 は、

$$dn_2 = n_2 \left(\frac{m_2}{2\pi k_B T} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{m_2}{2k_B T} u_2^2 \right] du_{2x} du_{2y} du_{2z} \quad (7.15-7)$$

$$u_2^2 = |\mathbf{u}_2|^2 = u_{2x}^2 + u_{2y}^2 + u_{2z}^2 \quad (7.15-8)$$

ここで、1分子と2分子の相対速度 \mathbf{u}_R を次式で定義する。

$$\mathbf{u}_R [= \mathbf{i}_x u_{Rx} + \mathbf{i}_y u_{Ry} + \mathbf{i}_z u_{Rz}] = \mathbf{u}_2 - \mathbf{u}_1 \quad (7.15-9)$$

相対速度を用いると、速度が $u_{1x} + du_{1x}$ 、 $u_{1y} + du_{1y}$ 、 $u_{1z} + du_{1z}$ である分子1と、速度が $u_{2x} + du_{2x}$ 、 $u_{2y} + du_{2y}$ 、 $u_{2z} + du_{2z}$ である分子2が、単位時間、単位体積当たりに衝突する回数 dN_{12} は、

$$dN_{12} = dn_1 dn_2 \pi d_{12}^2 |\mathbf{u}_R| = dn_1 dn_2 \pi d_{12}^2 \sqrt{(u_{2x} - u_{1x})^2 + (u_{2y} - u_{1y})^2 + (u_{2z} - u_{1z})^2} \quad (7.15-10)$$

$$d_{12} = (d_1 + d_2) / 2 \quad (7.15-11)$$

ここで、 d_1 、 d_2 は分子1と2の直径である。単位時間の全衝突数 N_{12} は、(7.15-10)式を速度空間で積分すればよいので、

$$N_{12} = \pi d_{12}^2 n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{(u_{2x} - u_{1x})^2 + (u_{2y} - u_{1y})^2 + (u_{2z} - u_{1z})^2} \exp \left[-\frac{m_1}{2k_B T} (u_{1x}^2 + u_{1y}^2 + u_{1z}^2) - \frac{m_2}{2k_B T} (u_{2x}^2 + u_{2y}^2 + u_{2z}^2) \right] du_{1x} du_{1y} du_{1z} du_{2x} du_{2y} du_{2z} \quad (7.15-12)$$

ここで、1と2の重心の速度 \mathbf{u}_G を導入すると、

$$\mathbf{u}_G [= \mathbf{i}_x u_{Gx} + \mathbf{i}_y u_{Gy} + \mathbf{i}_z u_{Gz}] = \frac{m_1 \mathbf{u}_1 + m_2 \mathbf{u}_2}{m_1 + m_2} \quad (7.15-13)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= \mathbf{u}_G - \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{u}_R \\ &= \mathbf{i}_x \left(u_{Gx} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_{Rx} \right) + \mathbf{i}_y \left(u_{Gy} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_{Ry} \right) + \mathbf{i}_z \left(u_{Gz} - \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_{Rz} \right) \end{aligned} \quad (7.15-14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_2 &= \mathbf{u}_G + \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{u}_R \\ &= \mathbf{i}_x \left(u_{Gx} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_{Rx} \right) + \mathbf{i}_y \left(u_{Gy} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_{Ry} \right) + \mathbf{i}_z \left(u_{Gz} + \frac{m_1}{m_1 + m_2} u_{Rz} \right) \end{aligned} \quad (7.15-15)$$

Jacobi の行列式を用いると、

$$\begin{aligned}
 du_{1x} du_{1y} du_{1z} du_{2x} du_{2y} du_{2z} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial u_{1x}}{\partial u_{Gx}} & \frac{\partial u_{1x}}{\partial u_{Gy}} & \frac{\partial u_{1x}}{\partial u_{Gz}} & \frac{\partial u_{1x}}{\partial u_{Rx}} & \frac{\partial u_{1x}}{\partial u_{Ry}} & \frac{\partial u_{1x}}{\partial u_{Rz}} \\ \frac{\partial u_{1y}}{\partial u_{Gx}} & \frac{\partial u_{1y}}{\partial u_{Gy}} & \frac{\partial u_{1y}}{\partial u_{Gz}} & \frac{\partial u_{1y}}{\partial u_{Rx}} & \frac{\partial u_{1y}}{\partial u_{Ry}} & \frac{\partial u_{1y}}{\partial u_{Rz}} \\ \frac{\partial u_{1z}}{\partial u_{Gx}} & \frac{\partial u_{1z}}{\partial u_{Gy}} & \frac{\partial u_{1z}}{\partial u_{Gz}} & \frac{\partial u_{1z}}{\partial u_{Rx}} & \frac{\partial u_{1z}}{\partial u_{Ry}} & \frac{\partial u_{1z}}{\partial u_{Rz}} \\ \frac{\partial u_{2x}}{\partial u_{Gx}} & \frac{\partial u_{2x}}{\partial u_{Gy}} & \frac{\partial u_{2x}}{\partial u_{Gz}} & \frac{\partial u_{2x}}{\partial u_{Rx}} & \frac{\partial u_{2x}}{\partial u_{Ry}} & \frac{\partial u_{2x}}{\partial u_{Rz}} \\ \frac{\partial u_{2y}}{\partial u_{Gx}} & \frac{\partial u_{2y}}{\partial u_{Gy}} & \frac{\partial u_{2y}}{\partial u_{Gz}} & \frac{\partial u_{2y}}{\partial u_{Rx}} & \frac{\partial u_{2y}}{\partial u_{Ry}} & \frac{\partial u_{2y}}{\partial u_{Rz}} \\ \frac{\partial u_{2z}}{\partial u_{Gx}} & \frac{\partial u_{2z}}{\partial u_{Gy}} & \frac{\partial u_{2z}}{\partial u_{Gz}} & \frac{\partial u_{2z}}{\partial u_{Rx}} & \frac{\partial u_{2z}}{\partial u_{Ry}} & \frac{\partial u_{2z}}{\partial u_{Rz}} \end{vmatrix} du_{Gx} du_{Gy} du_{Gz} du_{Rx} du_{Ry} du_{Rz} \\
 &= 1 \times du_{Gx} du_{Gy} du_{Gz} du_{Rx} du_{Ry} du_{Rz} \tag{7.15-16}
 \end{aligned}$$

であるから、(7.15-14)～(7.15-16)式を(7.15-12)式に代入すると、

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= \pi d_{12}^2 n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u_R \exp \left[-\frac{m_1 + m_2}{2k_B T} u_G^2 - \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2k_B T} u_R^2 \right] \\
 &\quad \times du_{Gx} du_{Gy} du_{Gz} du_{Rx} du_{Ry} du_{Rz} \tag{7.15-17}
 \end{aligned}$$

$$u_G^2 = |\mathbf{u}_G|^2 = u_{Gx}^2 + u_{Gy}^2 + u_{Gz}^2 \tag{7.15-18}$$

$$u_R^2 = |\mathbf{u}_R|^2 = u_{Rx}^2 + u_{Ry}^2 + u_{Rz}^2 \tag{7.15-19}$$

(7.15-17)式を極座標変換する。重心の極座標速度空間での角度を θ_G 、 ϕ_G 、相対的な速度における極座標速度空間での角度を θ_R 、 ϕ_R とすると、

$$\begin{aligned}
 N_{12} &= \pi d_{12}^2 n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} u_R \exp \left[-\frac{m_1 + m_2}{2k_B T} u_G^2 \right] \exp \left[-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2k_B T} u_R^2 \right] u_G^2 u_R^2 du_G du_R \\
 &\quad \times \int_0^{2\pi} d\phi_G \int_0^{\pi} \sin \theta_G d\theta_G \int_0^{2\pi} d\phi_R \int_0^{\pi} \sin \theta_R d\theta_R \\
 &= \pi d_{12}^2 n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} (4\pi)^2 \int_0^{\infty} u_G^2 \exp \left[-\frac{m_1 + m_2}{2k_B T} u_G^2 \right] du_G \int_0^{\infty} u_R^3 \exp \left[-\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2k_B T} u_R^2 \right] du_R \\
 &= 16\pi^3 d_{12}^2 n_1 n_2 \frac{(m_1 m_2)^{3/2}}{(2\pi k_B T)^3} \frac{\sqrt{\pi}}{4} \left(\frac{m_1 + m_2}{2k_B T} \right)^{-3/2} \frac{1}{2} \left(\frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \frac{1}{2k_B T} \right)^{-2} \\
 &= d_{12}^2 n_1 n_2 \sqrt{\frac{8\pi k_B T}{m_1 m_2 / (m_1 + m_2)}} \tag{7.15-20}
 \end{aligned}$$

ここで、1 と 2 が同じ分子である場合、 $m_1 = m_2 = m$ 、 $n_1 = n_2 = n$ 、 $d_{12} = d$ である。また、同じ衝突を重複して数えないように、2 で割る必要があるため、 N_{11} は以下のようになる。

$$N_{11} = \frac{d^2 n^2}{2} \sqrt{\frac{8\pi k_B T}{m/2}} = \frac{\sqrt{2}\pi d^2 n^2}{2} \sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \pi d^2 n^2 \bar{u} \tag{7.15-21}$$

1 の分子のみから成る系で、特定の 1 の分子 1 個に衝突する頻度 N_1 では 2 で割る必要はなく、(7.15-20)式を、 $m_1 = m_2 = m$ 、 $n_1 = n_2 = n$ 、 $d_{12} = d$ とおいて n で割ればよいので、

$$N_1 = \frac{d^2 n^2}{n} \sqrt{\frac{8\pi k_B T}{m/2}} = \sqrt{2}\pi d^2 n \bar{u} \quad (7.15-22)$$

平均自由行程 λ は、衝突の間に進む距離であるので、

$$\lambda = \frac{\bar{u}}{N_1} = \frac{1}{\sqrt{2}\pi d^2 n} \quad (7.15-23)$$

になる。

7.16 定積分について

$\exp(-ax^2)$ と x^m の積の $0 \sim \infty$ の範囲での積分は以下のように与えられる。ただし、 $a > 0$ であり、 n は整数 ($n \geq 0$) である。

$$\int_0^{\infty} x^{2n} \exp(-ax^2) dx = \frac{(2n-1)!!}{2^{n+1}} \sqrt{\frac{\pi}{a^{2n+1}}} \quad (7.16-1)$$

$$(2n-1)!! = (2n-1)(2n-3) \cdots 3 \cdot 1 \quad (7.16-2)$$

ただし、 $n = 0$ のとき、 $(2n-1)!! = 1$ とする。また、

$$\int_0^{\infty} x^{2n+1} \exp(-ax^2) dx = \frac{n!}{2a^{n+1}} \quad (7.16-3)$$

7.17 ベクトルとテンソル

デカルト座標系でのベクトル \mathbf{v} は、基底ベクトル \mathbf{i}_x 、 \mathbf{i}_y 、 \mathbf{i}_z と x 、 y 、 z 方向のそれぞれの成分 v_x 、 v_y 、 v_z を用いて、以下のように表される。

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_x v_x + \mathbf{i}_y v_y + \mathbf{i}_z v_z \quad (7.17-1)$$

ここで、添字について以下の書き換えをおこなう。

$$x \rightarrow 1 \quad y \rightarrow 2 \quad z \rightarrow 3$$

これにより、上式は以下のように書き換えられる。

$$\mathbf{v} = \mathbf{i}_1 v_1 + \mathbf{i}_2 v_2 + \mathbf{i}_3 v_3 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i v_i \quad (7.17-2)$$

ベクトルの大きさは、以下のように定義される。

$$|\mathbf{v}| = v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2} = \sqrt{\sum_{i=1}^3 v_i^2} \quad (7.17-3)$$

これからの説明では、クロネッカーのデルタ δ_{ij} や置換記号 (permutation symbol) である ε_{ijk} を用いた方が便利であるので、ここで定義しておく。

$$i = j \text{ のとき} \quad \delta_{ij} = +1 \quad (7.17-4)$$

$$i \neq j \text{ のとき} \quad \delta_{ij} = 0 \quad (7.17-5)$$

$$ijk = 123, 231, 312 \text{ のとき} \quad \varepsilon_{ijk} = +1 \quad (7.17-6)$$

$$ijk = 321, 132, 213 \text{ のとき} \quad \varepsilon_{ijk} = -1 \quad (7.17-7)$$

$$\text{上記の 2 例以外の場合} \quad \varepsilon_{ijk} = 0 \quad (7.17-8)$$

ここで、もう一つのベクトルを

$$\mathbf{w} = \mathbf{i}_1 w_1 + \mathbf{i}_2 w_2 + \mathbf{i}_3 w_3 = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i w_i \quad (7.17-9)$$

で定義する。ここで、ベクトルの内積は以下のように定義される。

$$\begin{aligned} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}) &= \left(\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i v_i \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j w_j \right] \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j) v_i w_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} v_i w_j \\ &= \sum_{i=1}^3 v_i w_i = v_1 w_1 + v_2 w_2 + v_3 w_3 \end{aligned} \quad (7.17-10)$$

$(\mathbf{v} \cdot \mathbf{w})$ の () は、上記の演算の結果が方向性のないスカラー量であることを示す。これから、ベクトルやテンソルの演算が出てくるが、その演算によって、生成される量がスカラーかベクトルか 2 階のテンソルかによって、その演算を囲むかっこを以下のように使い分ける。

- スカラーが生成される場合 → ()
- ベクトルが生成される場合 → []
- 2 階のテンソルが生成される場合 → { }

また、演算を表す記号として、single dot (\cdot)、double dot ($:$)、cross (\times) を用いる。これについては後述する。上に示すように、内積の場合には、演算の記号として、single dot (\cdot) を使い、演算結果がスカラーであるので、演算の全体を () で囲んでいる。この標記を用いると、ベクトルの外積は、以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
[\mathbf{v} \times \mathbf{w}] &= \left[\left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j v_j \right] \times \left[\sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k w_k \right] \right] = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k] v_j w_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{i}_i v_j w_k \\
&= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1(v_2 w_3 - v_3 w_2) + \mathbf{i}_2(v_3 w_1 - v_1 w_3) + \mathbf{i}_3(v_1 w_2 - v_2 w_1)
\end{aligned} \tag{7.17-11}$$

2階のテンソルは、以下の定義に従う。すなわち、方向を二つ持つ物理量である。例えば、表面応力はテンソルの一つであるが、デカルト座標系では、以下のように表される。

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{i}_x \mathbf{i}_x \tau_{xx} + \mathbf{i}_x \mathbf{i}_y \tau_{xy} + \mathbf{i}_x \mathbf{i}_z \tau_{xz} + \mathbf{i}_y \mathbf{i}_x \tau_{yx} + \mathbf{i}_y \mathbf{i}_y \tau_{yy} + \mathbf{i}_y \mathbf{i}_z \tau_{yz} + \mathbf{i}_z \mathbf{i}_x \tau_{zx} + \mathbf{i}_z \mathbf{i}_y \tau_{zy} + \mathbf{i}_z \mathbf{i}_z \tau_{zz} \tag{7.17-12}$$

上式で、 $\mathbf{i}_x \mathbf{i}_y$ のような表現があるが、これは基底ベクトルの外積や内積を表しているのではなく、2つの基底ベクトルの成分を持つという意味で、基底ベクトルが2つ並んでいるものととらえてよい。これらの基底ベクトルの組み合わせ（ 3×3 ）は、unit dyad と呼ばれる（図 7.17-1）。また、上式の τ_{xy} で表される量は、それぞれの dyad の成分である。ベクトルは、3つの基底ベクトルに対して、それぞれ成分を持つ物理量であるが、2階のテンソルは、3つの基底ベクトルの2つの組み合わせに、それぞれ成分がある物理量である。テンソルは、2階のみではなく、3階、4階といくらでも多くの階数を持つものができるが、本書で必要になるのは2階のテンソルのみであるので、これ以上の説明は省略する。表面応力もテンソル量であるが、そのうちの1つの成分 τ_{xy} のうち、添字の x は応力の働く面に垂直なベクトルの方向であり、 y はその応力の働く方

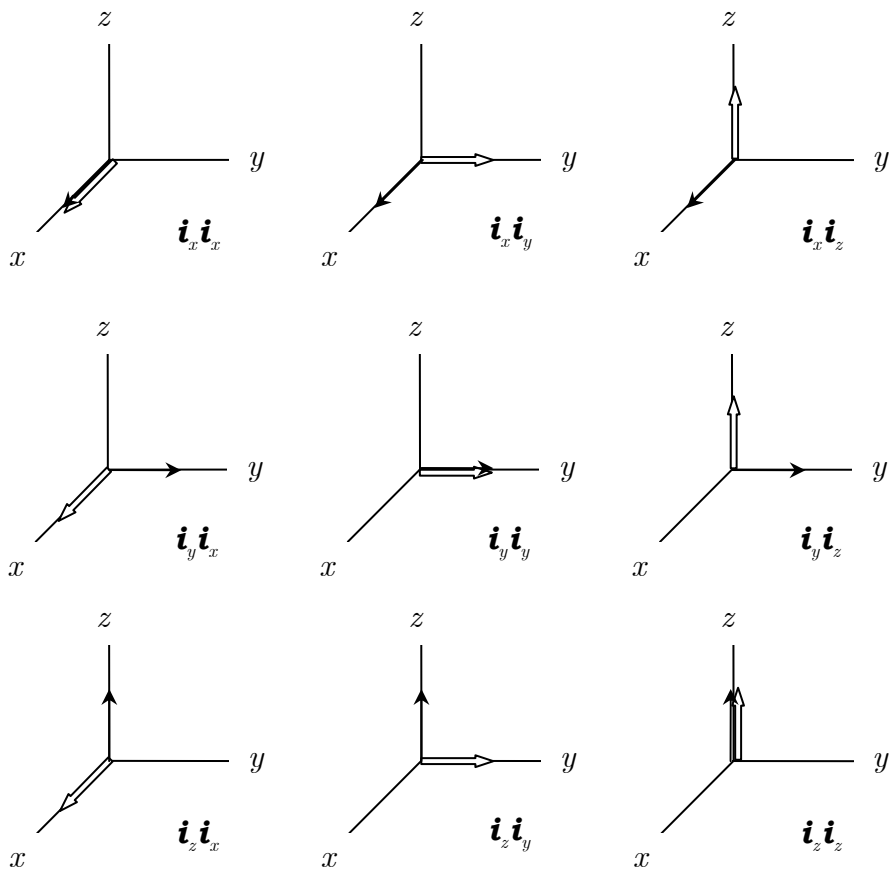


図 7.17-1 デカルト座標系における unit dyad

向であった。したがって、 $\mathbf{i}_x \mathbf{i}_y$ の \mathbf{i}_x は応力の働く面に垂直な基底ベクトル、 \mathbf{i}_y はその応力が働く方向の単位ベクトルに対応する。ここで、前と同じように、添字について以下の書き換えをおこなう。

$$x \rightarrow 1 \quad y \rightarrow 2 \quad z \rightarrow 3$$

そうすると、(7.17-12)式は、以下のように書き換えられる。

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_1 \tau_{11} + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_2 \tau_{12} + \mathbf{i}_1 \mathbf{i}_3 \tau_{13} + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_1 \tau_{21} + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_2 \tau_{22} + \mathbf{i}_2 \mathbf{i}_3 \tau_{23} + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_1 \tau_{31} + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_2 \tau_{32} + \mathbf{i}_3 \mathbf{i}_3 \tau_{33} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tau_{ij} \end{aligned} \quad (7.17-13)$$

ここで、上記の unit dyad に関して以下の演算を定義する。

$$(\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j : \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l) = (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_l) = \delta_{jk} \delta_{il} \quad (7.17-14)$$

$$[\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k] = \mathbf{i}_i (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) = \mathbf{i}_i \delta_{jk} \quad (7.17-15)$$

$$[\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k] = (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j) \mathbf{i}_k = \delta_{ij} \mathbf{i}_k \quad (7.17-16)$$

$$\{\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l\} = \mathbf{i}_i (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_l = \delta_{jk} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_l \quad (7.17-17)$$

$$\{\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k\} = \mathbf{i}_i [\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k] = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \mathbf{i}_l \mathbf{i}_i \quad (7.17-18)$$

$$\{\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k\} = [\mathbf{i}_i \times \mathbf{i}_j] \mathbf{i}_k = \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{i}_l \mathbf{i}_k \quad (7.17-19)$$

これらを用いると、以下に示すベクトルやテンソルの演算が定義できる。

(1) ベクトルとベクトルのテンソル積 (dyadic product)

2つのベクトル量 \mathbf{v} 、 \mathbf{w} からテンソルを生成する演算は、以下で定義される。

$$\mathbf{vw} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j v_i w_j \quad (7.17-20)$$

(2) テンソルとテンソルのスカラー積

2つのテンソル量 $\boldsymbol{\tau}$ 、 $\boldsymbol{\sigma}$ を以下のように定義する。

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tau_{ij} \quad (7.17-21)$$

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \sigma_{ij} \quad (7.17-22)$$

ここで、テンソルとテンソルからスカラーを生成する演算は次のように定義される。

$$\begin{aligned} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\sigma}) &= \left(\left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tau_{ij} \right\} : \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl} \right\} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j : \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l) \tau_{ij} \sigma_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k)(\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_l) \tau_{ij} \sigma_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \delta_{il} \delta_{jk} \tau_{ij} \sigma_{kl} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{ji} \end{aligned} \quad (7.17-23)$$

(3) テンソルとテンソルのテンソル積

2つのテンソルからテンソルを生成する演算は以下のように定義される。

$$\{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma}\} = \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tau_{ij} \right\} \cdot \left\{ \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l \sigma_{kl} \right\} \right\} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \{\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k \mathbf{i}_l\} \tau_{ij} \sigma_{kl}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{i}_i (\mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k) \mathbf{i}_l \tau_{ij} \sigma_{kl} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \delta_{jk} \mathbf{i}_i \tau_{ij} \sigma_{kl} \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_l \left(\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \sigma_{jl} \right)
\end{aligned} \tag{7.17-24}$$

(4) テンソルとベクトルのベクトル積

テンソルとベクトルからベクトルを生成する演算は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
[\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{v}] &= \left[\left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tau_{ij} \right\} \cdot \left[\sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k v_k \right] \right] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \cdot \mathbf{i}_k] \tau_{ij} v_k \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_i \delta_{jk} \tau_{ij} v_k = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \left(\sum_{j=1}^3 \tau_{ij} v_j \right)
\end{aligned} \tag{7.17-25}$$

(5) テンソルとベクトルのテンソル積

テンソルとベクトルからテンソルを生成する演算は以下のように定義される。

$$\begin{aligned}
\{\boldsymbol{\tau} \times \boldsymbol{v}\} &= \left\{ \left\{ \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \tau_{ij} \right\} \times \left[\sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k v_k \right] \right\} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k] \tau_{ij} v_k \\
&= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \varepsilon_{jkl} \mathbf{i}_i \mathbf{i}_l \tau_{ij} v_k = \sum_{i=1}^3 \sum_{l=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_l \left(\sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{jkl} \tau_{ij} v_k \right)
\end{aligned} \tag{7.17-26}$$

7.18 ナブラ演算子による演算

デカルト座標系では、ナブラ演算子は以下のように表される。

$$\nabla = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.18-1)$$

添字などについて以下の書き換えをおこなう。

$$x \rightarrow 1 \quad (x \rightarrow x_1) \quad y \rightarrow 2 \quad (y \rightarrow x_2) \quad z \rightarrow 3 \quad (z \rightarrow x_3)$$

そうすると、(7.18-1)式は、以下のように書き換えられる。

$$\nabla = \mathbf{i}_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (7.18-2)$$

これを、用いて次の演算が定義される。

(1) スカラー量 (方向性のない物理量) s の勾配 (ベクトルを生成)

$$\nabla s = \mathbf{i}_1 \frac{\partial s}{\partial x_1} + \mathbf{i}_2 \frac{\partial s}{\partial x_2} + \mathbf{i}_3 \frac{\partial s}{\partial x_3} = \sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial s}{\partial x_i} \quad (7.18-3)$$

(2) ベクトル量 \mathbf{v} の発散 (スカラーを生成)

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \left(\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j v_j \right] \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 (\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j) \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} v_j = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad (7.18-4)$$

(3) ベクトル量 \mathbf{v} の回転 (ベクトルを生成)

$$\begin{aligned} [\nabla \times \mathbf{v}] &= \left[\left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \times \left[\sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k v_k \right] \right] = \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\mathbf{i}_j \times \mathbf{i}_k] \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \varepsilon_{ijk} \mathbf{i}_i \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \mathbf{i}_1 \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) + \mathbf{i}_2 \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) + \mathbf{i}_3 \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \end{aligned} \quad (7.18-5)$$

(4) ベクトル量 \mathbf{v} の勾配 (テンソルを生成)

$$\nabla \mathbf{v} = \left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j v_j \right] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_i \mathbf{i}_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \quad (7.18-6)$$

(5) テンソル量 $\boldsymbol{\tau}$ の発散 (ベクトルを生成)

$$\begin{aligned} [\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] &= \left[\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \cdot \left\{ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \tau_{jk} \right\} \right] = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k] \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} \\ &= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ij} \mathbf{i}_k \frac{\partial \tau_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \tau_{ik}}{\partial x_i} \right) \end{aligned} \quad (7.18-7)$$

(6) スカラー量 (方向性のない物理量) s のラプラシアン (スカラーを生成)

$$(\nabla \cdot \nabla s) = \left(\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \cdot \left[\sum_{j=1}^3 \mathbf{i}_j \frac{\partial s}{\partial x_j} \right] \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial s}{\partial x_j} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 s}{\partial x_i^2} \quad (7.18-8)$$

(7) ベクトル量 \mathbf{v} のラプラシアン (ベクトルを生成)

$$[\nabla \cdot \nabla \mathbf{v}] = \left(\left[\sum_{i=1}^3 \mathbf{i}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right] \cdot \left\{ \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k \frac{\partial v_k}{\partial x_j} \right\} \right) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 [\mathbf{i}_i \cdot \mathbf{i}_j \mathbf{i}_k] \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

$$= \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \delta_{ij} \mathbf{i}_k \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial v_k}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^3 \mathbf{i}_k \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 v_k}{\partial x_i^2} \right) \quad (7.18-9)$$

7.19 座標変換

円柱座標系では、

$$x = r \cos \theta \quad (7.19-1)$$

$$y = r \sin \theta \quad (7.19-2)$$

$$z = z \quad (7.19-3)$$

逆に、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \quad (7.19-4)$$

$$\theta = \arctan(y/x) \quad (7.19-5)$$

$$z = z \quad (7.19-6)$$

である。微分の chain rule を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 0 \times \frac{\partial}{\partial z} = \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (7.19-7)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + 0 \times \frac{\partial}{\partial z} = \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \quad (7.19-8)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial z} \frac{\partial}{\partial z} = 0 \times \frac{\partial}{\partial r} + 0 \times \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial z} \quad (7.19-9)$$

円柱座標系のそれぞれの基底ベクトルとデカルト座標系の基底ベクトルの間には、以下の関係がある。

$$\mathbf{i}_r = (\cos \theta) \mathbf{i}_x + (\sin \theta) \mathbf{i}_y + (0) \mathbf{i}_z = (\cos \theta) \mathbf{i}_x + (\sin \theta) \mathbf{i}_y \quad (7.19-10)$$

$$\mathbf{i}_\theta = (-\sin \theta) \mathbf{i}_x + (\cos \theta) \mathbf{i}_y + (0) \mathbf{i}_z = (-\sin \theta) \mathbf{i}_x + (\cos \theta) \mathbf{i}_y \quad (7.19-11)$$

$$\mathbf{i}_z = (0) \mathbf{i}_x + (0) \mathbf{i}_y + (1) \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z \quad (7.19-12)$$

$$\mathbf{i}_x = \cos \theta \mathbf{i}_r + (-\sin \theta) \mathbf{i}_\theta + (0) \mathbf{i}_z = (\cos \theta) \mathbf{i}_r - (\sin \theta) \mathbf{i}_\theta \quad (7.19-13)$$

$$\mathbf{i}_y = (\sin \theta) \mathbf{i}_r + (\cos \theta) \mathbf{i}_\theta + (0) \mathbf{i}_z = (\sin \theta) \mathbf{i}_r + (\cos \theta) \mathbf{i}_\theta \quad (7.19-14)$$

$$\mathbf{i}_z = (0) \mathbf{i}_r + (0) \mathbf{i}_\theta + (1) \mathbf{i}_z = \mathbf{i}_z \quad (7.19-15)$$

直交性より、各基底ベクトル間には、以下の関係がある。

$$(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r) = (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta) = (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z) = 1 \quad (7.19-16)$$

$$(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\theta) = (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_z) = (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_z) = 0 \quad (7.19-17)$$

デカルト座標系は、その基底ベクトル $\mathbf{i}_x, \mathbf{i}_y, \mathbf{i}_z$ が、どこの場所でも不変である都合のよい座標系である。したがって、基底ベクトルに微分演算子が施されても変化することはない。すなわち、

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_x = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_y = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{i}_y = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_y = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i}_z = \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{i}_z = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z = 0 \quad (7.19-18)$$

である。しかしながら、円柱座標系や球座標系では、場所によってその方向が異なる基底ベクトルがある。また、円柱座標系の基底ベクトルに微分演算子を施すと、ゼロにはならず違うベクトルに変わる場合がある。例えば、(7.19-11)式で示される θ 方向の基底ベクトルに、 $\partial/\partial\theta$ を施すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta &= \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta) \mathbf{i}_x + \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) \mathbf{i}_y \\ &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta) + (-\sin \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) + (\cos \theta) \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_y \end{aligned} \quad (7.19-19)$$

ここで、 \mathbf{i}_x と \mathbf{i}_y は場所によって不変であるから、

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_x = 0 \quad (7.19-20)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_y = 0 \quad (7.19-21)$$

である。よって、

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial \theta} (-\sin \theta) + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial \theta} (\cos \theta) = (-\cos \theta) \mathbf{i}_x + (-\sin \theta) \mathbf{i}_y = -\mathbf{i}_r \quad (7.19-22)$$

となることがわかる。このような、検討を行うと、以下の関係が導出される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_z = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_z = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_r = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_\theta = \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z = 0 \quad (7.19-23)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_\theta \quad (7.19-24)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta = -\mathbf{i}_r \quad (7.19-25)$$

また、ナブラ演算子は、デカルト座標系では、(7.18-1)式で与えられるが、(7.19-7)～(7.19-9)式と(7.19-13)～(7.19-15)式の関係を用いると、

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= (\mathbf{i}_r \cos \theta - \mathbf{i}_\theta \sin \theta) \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + (\mathbf{i}_r \sin \theta + \mathbf{i}_\theta \cos \theta) \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}_r \left(\cos^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin^2 \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos \theta \sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &\quad + \mathbf{i}_\theta \left(-\sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \sin \theta \cos \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\sin^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\cos^2 \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \quad (7.19-26)$$

このようにして得られた、円柱座標系のナブラ演算子と速度ベクトルの内積を計算してみる。

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \left[\left[\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z \right] \right]$$

が内積である。これを、各項に分解すると、

$$\begin{aligned} (\nabla \cdot \mathbf{v}) &= \left(\mathbf{i}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_r v_r) \right) + \left(\mathbf{i}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \right) + \left(\mathbf{i}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_z v_z) \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_r v_r) \right) + \left(\mathbf{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \right) + \left(\mathbf{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_z v_z) \right) \\ &\quad + \left(\mathbf{i}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_r v_r) \right) + \left(\mathbf{i}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \right) + \left(\mathbf{i}_z \cdot \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_z v_z) \right) \end{aligned} \quad (7.19-27)$$

例えば、上式の第1項目は、

$$\left(\mathbf{i}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_r v_r) \right) = \left(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \left(\mathbf{i}_r \cdot v_r \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r \right) = (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r) \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{0}) v_r = \frac{\partial v_r}{\partial r} \quad (7.19-28)$$

のように計算できる。これを、それぞれの項について行くと、

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r) \frac{\partial v_r}{\partial r} + (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\theta) \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_z) \frac{\partial v_z}{\partial r}$$

$$\begin{aligned}
& + (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_r) \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta) \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta) \frac{v_r}{r} - (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_r) \frac{v_\theta}{r} + (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_z) \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} \\
& + (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_r) \frac{\partial v_r}{\partial z} + (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_\theta) \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + (\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{i}_z) \frac{\partial v_z}{\partial z}
\end{aligned} \tag{7.19-29}$$

である。それぞれの基底ベクトルは直交しているので、

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_r}{r} + \frac{\partial v_z}{\partial z} \tag{7.19-30}$$

となる。

球座標系では、

$$x = r \sin \theta \cos \phi \tag{7.19-31}$$

$$y = r \sin \theta \sin \phi \tag{7.19-32}$$

$$z = r \cos \theta \tag{7.19-33}$$

逆に、

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{7.19-34}$$

$$\theta = \arctan(\sqrt{x^2 + y^2} / z) \tag{7.19-35}$$

$$\phi = \arctan(y / x) \tag{7.19-36}$$

である。微分の chain rule を用いると、

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial r}{\partial x} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial \phi} = (\sin \theta \cos \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{7.19-37}$$

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial r}{\partial y} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial \phi} = (\sin \theta \sin \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{7.19-38}$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial r}{\partial z} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial \theta}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{\partial}{\partial \phi} = (\cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + (0) \frac{\partial}{\partial \phi} \tag{7.19-39}$$

円柱座標系のそれぞれの基底ベクトルとデカルト座標系の基底ベクトルの間には、以下の関係がある。

$$\mathbf{i}_r = (\sin \theta \cos \phi) \mathbf{i}_x + (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{i}_y + (\cos \theta) \mathbf{i}_z \tag{7.19-40}$$

$$\mathbf{i}_\theta = (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i}_x + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{i}_y + (-\sin \theta) \mathbf{i}_z \tag{7.19-41}$$

$$\mathbf{i}_\phi = (-\sin \phi) \mathbf{i}_x + (\cos \phi) \mathbf{i}_y + (0) \mathbf{i}_z \tag{7.19-42}$$

$$\mathbf{i}_x = (\sin \theta \cos \phi) \mathbf{i}_r + (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i}_\theta + (-\sin \phi) \mathbf{i}_\phi \tag{7.19-43}$$

$$\mathbf{i}_y = (\sin \theta \sin \phi) \mathbf{i}_r + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{i}_\theta + (\cos \phi) \mathbf{i}_\phi \tag{7.19-44}$$

$$\mathbf{i}_z = (\cos \theta) \mathbf{i}_r + (-\sin \theta) \mathbf{i}_\theta + (0) \mathbf{i}_\phi \tag{7.19-45}$$

直交性より、各基底ベクトル間には、以下の関係がある。

$$(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r) = (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta) = (\mathbf{i}_\phi \cdot \mathbf{i}_\phi) = 1 \tag{7.19-46}$$

$$(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\theta) = (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\phi) = (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\phi) = 0 \tag{7.19-47}$$

円柱座標系のときと同様に、球座標系の基底ベクトルに微分演算子を施すと、ゼロにはならず違うベクトルに変わる場合がある。例えば、(7.19-11)式で示される ϕ 方向の基底ベクトルに、 $\partial / \partial \phi$ を施すと以下のようなになる。

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi &= \frac{\partial}{\partial \phi} ((-\sin \phi) \mathbf{i}_x + (\cos \phi) \mathbf{i}_y) \\
&= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial \phi} (-\sin \phi) + (-\sin \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_x + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi) + (\cos \phi) \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_y
\end{aligned} \tag{7.19-48}$$

ここで、 \mathbf{i}_x と \mathbf{i}_y は場所によって不変であるから、

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_x = 0 \quad (7.19-49)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_y = 0 \quad (7.19-50)$$

である。よって、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial \phi} (-\sin \phi) + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial \phi} (\cos \phi) = \mathbf{i}_x (-\cos \phi) + \mathbf{i}_y (-\sin \phi) \\ &= [(\sin \theta \cos \phi) \mathbf{i}_r + (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i}_\theta + (-\sin \phi) \mathbf{i}_\phi] (-\cos \phi) \\ &\quad + [(\sin \theta \sin \phi) \mathbf{i}_r + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{i}_\theta + (\cos \phi) \mathbf{i}_\phi] (-\sin \phi) \\ &= -(\sin \theta) \mathbf{i}_r - (\cos \theta) \mathbf{i}_\theta \end{aligned} \quad (7.19-51)$$

となるのがわかる。このような検討を行うと、以下の関係が導出される。

$$\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_\theta = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_\phi = \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\phi = 0 \quad (7.19-52)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_\theta \quad (7.19-53)$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta = -\mathbf{i}_r \quad (7.19-54)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_r = \mathbf{i}_\phi \sin \theta \quad (7.19-55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_\theta = \mathbf{i}_\phi \cos \theta \quad (7.19-56)$$

$$\frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{i}_\phi = -\mathbf{i}_r \sin \theta - \mathbf{i}_\theta \cos \theta \quad (7.19-57)$$

ナブラ演算子は、デカルト座標系では、(7.18-1)式で与えられるが、(7.19-37)～(7.19-39)式と(7.19-43)～(7.19-45)式の間係を用いると、

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i}_x \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{i}_y \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \\ &= [(\sin \theta \cos \phi) \mathbf{i}_r + (\cos \theta \cos \phi) \mathbf{i}_\theta - (\sin \phi) \mathbf{i}_\phi] \\ &\quad \times \left[(\sin \theta \cos \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta \cos \phi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(-\frac{\sin \phi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &\quad + [(\sin \theta \sin \phi) \mathbf{i}_r + (\cos \theta \sin \phi) \mathbf{i}_\theta + (\cos \phi) \mathbf{i}_\phi] \\ &\quad \times \left[(\sin \theta \sin \phi) \frac{\partial}{\partial r} + \left(\frac{\cos \theta \sin \phi}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} + \left(\frac{\cos \phi}{r \sin \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \\ &\quad + [(\cos \theta) \mathbf{i}_r + (-\sin \theta) \mathbf{i}_\theta] \left[(\cos \theta) \frac{\partial}{\partial r} + \left(-\frac{\sin \theta}{r} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \right] \\ &= \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \end{aligned} \quad (7.19-58)$$

このようにして得られた、球座標系のナブラ演算子と速度ベクトルの内積を計算してみる。

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \left(\left[\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \cdot \left[\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_\phi v_\phi \right] \right) \quad (7.19-59)$$

が内積である。これを、各項に分解すると、

$$\begin{aligned}
(\nabla \cdot \mathbf{v}) &= \left(\mathbf{i}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_r v_r) \right) + \left(\mathbf{i}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \right) + \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{i}_\phi v_\phi) \right) \\
&+ \left(\mathbf{i}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_r v_r) \right) + \left(\mathbf{i}_r \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \right) + \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_\phi v_\phi) \right) \\
&+ \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{i}_r v_r) \right) + \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \right) + \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{i}_\phi v_\phi) \right) \quad (7.19-60)
\end{aligned}$$

例えば、上式の第7項目は、

$$\begin{aligned}
\left(\mathbf{i}_\phi \cdot \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\mathbf{i}_r v_r) \right) &= \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \mathbf{i}_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_r}{\partial \phi} \right) + \left(\mathbf{i}_\phi \cdot v_r \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \mathbf{i}_r}{\partial \phi} \right) \\
&= \left(\mathbf{i}_\phi \cdot \mathbf{i}_\phi \right) v_r \frac{\sin \theta}{r \sin \theta} = \frac{v_r}{r} \quad (7.19-61)
\end{aligned}$$

のように計算できる。上の計算では、 $(\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_\phi) = 0$ と(7.19-55)式を用いている。これを、それぞれの項について行くと、次式を得る。

$$(\nabla \cdot \mathbf{v}) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 v_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} \quad (7.19-62)$$

となる。

次に、テンソル量 $\boldsymbol{\tau}$ の発散 $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ (ベクトルを生成) を球座標系で計算する。簡単のために、 r 方向の成分を求めるとする。 $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ の r 方向の成分を $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_r$ で表すとする。 $[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]$ の演算は、

$$\begin{aligned}
[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}] &= \left[\left[\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right] \cdot \left\{ \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r \tau_{rr} + \mathbf{i}_r \mathbf{i}_\theta \tau_{r\theta} + \mathbf{i}_r \mathbf{i}_\phi \tau_{r\phi} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_r \tau_{\theta r} + \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_\theta \tau_{\theta\theta} + \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_\phi \tau_{\theta\phi} + \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_r \tau_{\phi r} + \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_\theta \tau_{\phi\theta} + \mathbf{i}_\phi \mathbf{i}_\phi \tau_{\phi\phi} \right\} \right] \quad (7.19-63)
\end{aligned}$$

上式をそれぞれの項に分解して計算していく。例えば、上式中 \cdot の左側の1項目と、 \cdot の右側の1項目の演算は、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r \tau_{rr} \right] &= \left[\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r \mathbf{i}_r \right] \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + \left[\mathbf{i}_r \cdot \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r \right) \mathbf{i}_r \right] \tau_{rr} + \left[\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r \left(\frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r \right) \right] \tau_{rr} \\
&= (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r) \mathbf{i}_r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} + (\mathbf{i}_r \cdot (0)) \mathbf{i}_r \tau_{rr} + (\mathbf{i}_r \cdot \mathbf{i}_r) (0) \tau_{rr} = \mathbf{i}_r \frac{\partial \tau_{rr}}{\partial r} \quad (7.19-64)
\end{aligned}$$

また、(7.19-63)式中の \cdot の左側の2項目と、 \cdot の右側の4項目の演算は、以下ようになる。

$$\begin{aligned}
\left[\mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \cdot \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_r \tau_{\theta r} \right] &= \left[\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_r \right] \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \left[\mathbf{i}_\theta \cdot \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \right) \mathbf{i}_r \right] \frac{\tau_{\theta r}}{r} + \left[\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_r \right) \right] \frac{\tau_{\theta r}}{r} \\
&= \left[\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_r \right] \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \left[\mathbf{i}_\theta \cdot (-\mathbf{i}_r) \mathbf{i}_r \right] \frac{\tau_{\theta r}}{r} + \left[\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta \mathbf{i}_\theta \right] \frac{\tau_{\theta r}}{r} \\
&= (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta) \mathbf{i}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} - (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_r) \mathbf{i}_r \frac{\tau_{\theta r}}{r} + (\mathbf{i}_\theta \cdot \mathbf{i}_\theta) \mathbf{i}_\theta \frac{\tau_{\theta r}}{r} \\
&= \mathbf{i}_r \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\theta \frac{\tau_{\theta r}}{r} \quad (7.19-65)
\end{aligned}$$

上式の2項目は、 θ 方向の成分であるため、 r 方向の成分からは除外される。このようにして、根気強く計算を続ければ、次式を得る。

$$[\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}]_r = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{\tau_{\phi r}}{r} \cos \theta + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \quad (7.19-66)$$

非圧縮性 (密度 ρ が一定) で、粘性係数 μ が一定であるニュートン流体の運動量保存式の円柱座標系への変換は比較的簡単であるので、実際に導出してみる。ベクトル表示された、上記流体

の運動量の保存式は、

$$\rho \frac{D\mathbf{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \right) \mathbf{v} = -\nabla P + \mu \nabla^2 \mathbf{v} + \rho \mathbf{g} \quad (7.19-67)$$

である。ここで、体積力の項は、円柱座標では以下のようになる。

$$\rho \mathbf{g} = \rho (\mathbf{i}_r g_r + \mathbf{i}_\theta g_\theta + \mathbf{i}_\phi g_\phi) \quad (7.19-68)$$

上式、(7.19-26)および(7.19-30)式を用いると、(7.19-67)式は、

$$\begin{aligned} & \rho \left(\frac{\partial}{\partial t} + v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z) \\ &= - \left(\mathbf{i}_r \frac{\partial P}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial P}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial P}{\partial z} \right) + \mu \nabla^2 (\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z) + \rho (\mathbf{i}_r g_r + \mathbf{i}_\theta g_\theta + \mathbf{i}_\phi g_\phi) \end{aligned} \quad (7.19-69)$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z) = \mathbf{i}_r \frac{\partial v_r}{\partial t} + \mathbf{i}_\theta \frac{\partial v_\theta}{\partial t} + \mathbf{i}_z \frac{\partial v_z}{\partial t} \quad (7.19-70)$$

また、

$$\begin{aligned} & \left(v_r \frac{\partial}{\partial r} + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z) \\ &= v_r \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_r v_r) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_r v_r) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_r v_r) + v_r \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_\theta v_\theta) \\ & \quad + v_r \frac{\partial}{\partial r} (\mathbf{i}_z v_z) + v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\mathbf{i}_z v_z) + v_z \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{i}_z v_z) \\ &= \mathbf{i}_r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r v_r \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_r v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_r v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_r + \mathbf{i}_r v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + v_r v_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_r \\ & \quad + \mathbf{i}_\theta v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + v_r v_\theta \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_\theta + \mathbf{i}_\theta v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_\theta v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta + \mathbf{i}_\theta v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + v_\theta v_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_\theta \\ & \quad + \mathbf{i}_z v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + v_r v_z \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_\theta v_z \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_z + \mathbf{i}_z v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} + v_z v_z \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{i}_z \\ &= \mathbf{i}_r v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \mathbf{i}_r \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \mathbf{i}_\theta \frac{v_r v_\theta}{r} + \mathbf{i}_r v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} + \mathbf{i}_\theta v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} - \mathbf{i}_r \frac{v_\theta^2}{r} + \mathbf{i}_\theta v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \\ & \quad + \mathbf{i}_z v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \mathbf{i}_z \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \\ &= \mathbf{i}_r \left(v_r \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_r}{\partial z} - \frac{v_\theta^2}{r} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(v_r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_\theta}{\partial z} + \frac{v_r v_\theta}{r} \right) \\ & \quad + \mathbf{i}_z \left(v_r \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + v_z \frac{\partial v_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (7.19-71)$$

上式の導出では、(7.19-23)～(7.19-25)式を用いた。以下の導出でもこれらの式を用いる。さらに、

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= (\nabla \cdot \nabla) = \left(\left[\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \cdot \left[\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right] \right) \\ &= \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \left(\mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ & \quad + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ & \quad + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{i}_r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{i}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \left(\mathbf{i}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \end{aligned} \quad (7.19-72)$$

であるから、

$$\begin{aligned}
& \nabla^2 (\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z) \\
&= \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) (\mathbf{i}_r v_r + \mathbf{i}_\theta v_\theta + \mathbf{i}_z v_z) \\
&= \mathbf{i}_r \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_r + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_r \\
&\quad + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_\theta + \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{i}_\theta \\
&\quad + \mathbf{i}_z \left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) v_z \\
&= \mathbf{i}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_r}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_r}{\partial z^2} \right) + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \mathbf{i}_\theta \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_\theta}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial z^2} \right) - \mathbf{i}_r \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) \\
&\quad + \mathbf{i}_z \left(\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial v_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 v_z}{\partial z^2} \right) \tag{7.19-73}
\end{aligned}$$

上式、(7.19-70)および(7.19-71)式を(7.19-69)式に代入して、それぞれの基底ベクトル \mathbf{i}_r 、 \mathbf{i}_θ 、 \mathbf{i}_z ごとに、成分をまとめれば、円柱座標系での運動量の保存式が得られる。

7.20 ベッセル関数

以下の微分方程式をベッセルの微分方程式という。

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + x \frac{dy}{dx} + (x^2 - k^2)y = 0 \quad (7.20-1)$$

ただし、 k は $k \geq 0$ なる整数であるとする。上式の一般解は、以下のように表される。

$$y = C_1 J_k(x) + C_2 Y_k(x) \quad (7.20-2)$$

$J_k(x)$ は k 次の第1種ベッセル関数、 $Y_k(x)$ は k 次の第2種ベッセル関数とよばれ、次式で与えられる。

$$J_k(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(k+m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m} \quad (7.20-3)$$

$$Y_k(x) = \frac{J_k(x) \cos(k\pi) - J_{-k}(x)}{\sin(k\pi)} \quad (7.20-4)$$

また、 $\Gamma(\cdot)$ はガンマ関数であり、次式で与えられる。

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} \xi^{x-1} e^{-\xi} d\xi \quad (x > 0) \quad (7.20-5)$$

特に、 n が正の整数ならば、

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (7.20-6)$$

である。 k 次の第1種ベッセル関数、 k 次の第2種ベッセル関数の計算結果を図 7.20-1 に、ガンマ関数の計算結果を図 7.20-2 に示す。ベッセル関数には以下の性質がある。

$$J_0(0) = 1 \quad (7.20-7)$$

$$J_1(0) = 0 \quad (7.20-8)$$

$$Y_0(0) = -\infty \quad (7.20-9)$$

$$Y_1(0) = -\infty \quad (7.20-10)$$

$$\frac{d}{dx} J_0(x) = -J_1(x) \quad (7.20-11)$$

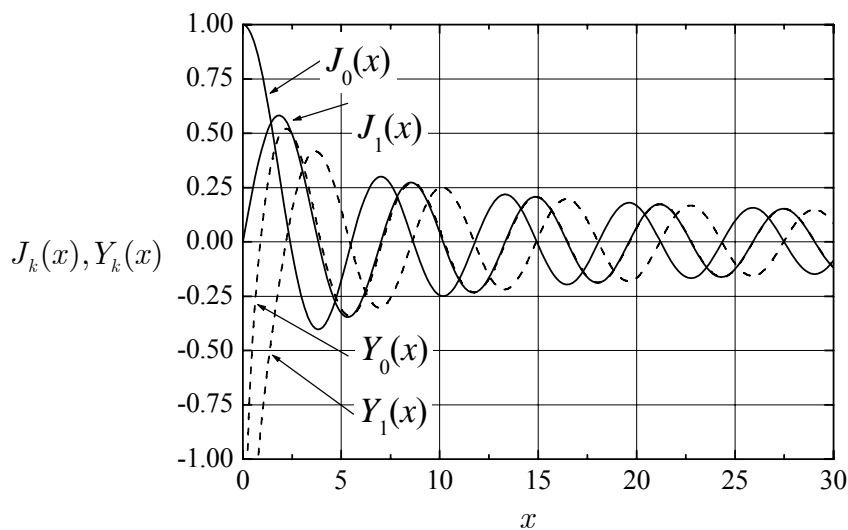


図 7.20-1 k 次のベッセル関数

$$\frac{d}{dx} Y_0(x) = -Y_1(x) \quad (7.20-12)$$

$$\int x J_0(x) dx = x J_1(x) \quad (7.20-13)$$

$$\int x Y_0(x) dx = x Y_1(x) \quad (7.20-14)$$

$$\int x J_0(x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (J_0(x)^2 + J_1(x)^2) \quad (7.20-15)$$

$$\int x Y_0(x)^2 dx = \frac{x^2}{2} (Y_0(x)^2 + Y_1(x)^2) \quad (7.20-16)$$

$$\int x J_0(x) Y_0(x) dx = \frac{x^2}{2} (J_0(x) Y_0(x) + J_1(x) Y_1(x)) \quad (7.20-17)$$

次式を満足する a の根は複素数ではなく、重根もないことが知られている。

$$J_0(a) = 0 \quad (7.20-18)$$

それらの根は以下のようなになる。

$$a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, \dots = 2.4048, 5.5201, 8.6537, 11.7015, 14.9309, 18.0711, \dots \quad (7.20-19)$$

上に示された根を用いると、ベッセル関数には以下の関係が成り立つ。

$$\int_0^1 \xi J_0(a_n \xi) J_0(a_m \xi) d\xi = 0 \quad (m \neq n) \quad (7.20-20)$$

$$\int_0^1 \xi [J_0(a_n \xi)]^2 d\xi = \frac{1}{2} [J_1(a_n)]^2 \quad (7.20-21)$$

$$\int_0^1 \xi J_0(a_m \xi) d\xi = \frac{1}{a_m} J_1(a_m) \quad (7.20-22)$$

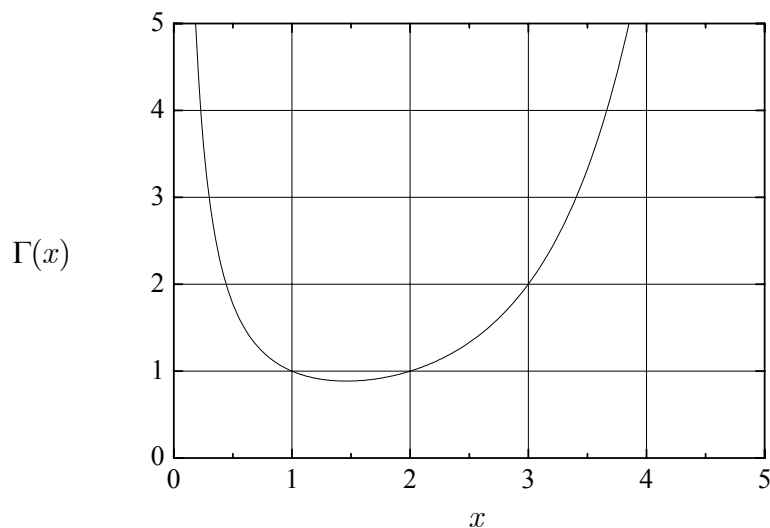


図 7.20-2 ガンマ関数

7.21 流線の式

図 7.21-1 (簡単のため2次元で考える) に示すように、ある瞬間に流れ場の中に一つの曲線を考え、その曲線上の各点で接線を引いたとする。その接線の方が、速度ベクトルの方向と一致するとき、この曲線を流線と呼ぶ。図からわかるように、接線ベクトルと速度ベクトルの方向が一致する必要があるので、流線では以下の式を満足する必要がある。

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} \quad (7.21-1)$$

上では2次元で考えたが、3次元のデカルト座標系では、流線の方程式は以下のようになる。

$$\frac{dx}{v_x} = \frac{dy}{v_y} = \frac{dz}{v_z} \quad (7.21-2)$$

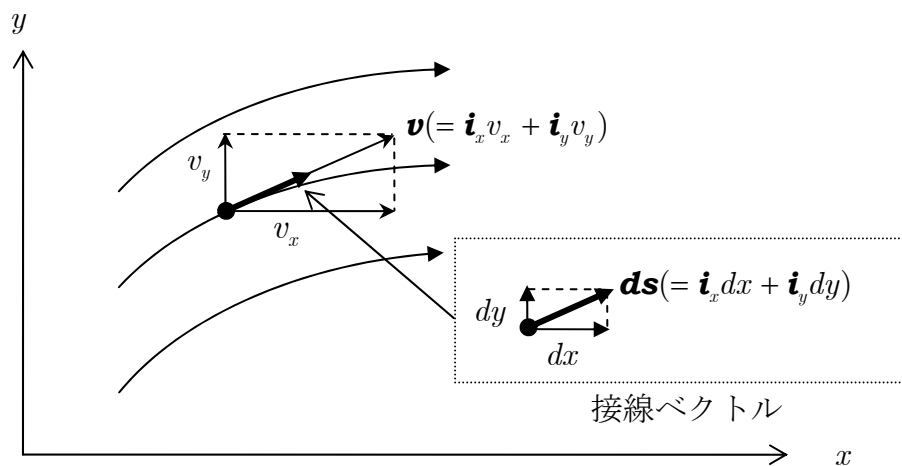


図 7.21-1 流線