はしがき

システム論の基礎は何であるかについて，多くの議論があると考えられる．システム論自体，一般システム理論から各専門分野のシステム論までいろいろあるから，共通する基礎を考えてゆくと数学になってしまうであろう．しかし，そこまでいかず共通する基礎として考えられるのは線形システム論であろう．この理論は，線形システムの構造の解析と望ましい特性をもつシステム設計に有効であることが知られている．この理論は，これまで主に制御理論を中心とした研究者によって開発されてきたため，"現代制御論"と制御の分野で呼ばれ，制御系解析と設計だけに有効な手法とみなされがちであった．この理論は近年その有効性が認識され始め，回路解析等に応用されるばかりでなく，工学以外に経済，社会など多くの分野で使用されだした．

本書は，そのためシステムの基礎理論である線形システム理論の基本的事柄からその応用までを述べることを目的とし，学部高学年の電気系の学生を対象としたものであり，他の工学，経済，社会系の学生，研究者の線形システム論の入門書となるものをも意図した．そのため，通常の線形システム論の本に比べ定理，証明の続くことはできるだけさけ，例を数多く入れた．また，本書の読者としてはラプラス変換は知っていることを前提とした．

本書は第1章から順々に読んでゆくと理解しやすいように書いてあるが，制御系設計だけに興味のある方は，「正準形」，「非干渉制御」等の部分を飛ばして読まれると良いであろう．

この本は第1章，第2章2·1までと第6章を佐野が執筆し，残りと演習問題を古田が執筆した．佐野の海外出張と本の印刷がぶつかったため，古田が一存で決めたところが数多くある．もしこの本で具合の悪いところがあるなら，これはすべて古田の独断で決めたところと考えられるので，お詫び申上げる次第

である．

終りに，本書を執筆することをお勧めいただき，かついろいろはげまして下さった東京工業大学岸源也先生にお礼申し上げます．またこの機会に第1の著者が研究指導を受けた故伊澤計介先生並びに第2の著者の御指導を下さっている慶応大学の堀井武夫先生に感謝申し上げます．

この本を作るに当たり，原稿の清書をしていただいた風巻恵美嬢，演習問題の解答のチェックと校正をしていただいた奥谷徹郎君並びに校正をお手伝いいただいた野村俊夫，小宮克美，小南秀隆の諸君とコロナ社中俣寛氏，山口陽氏に感謝する次第です．

1978 年 6 月

著　　者

第3刷にあたり，これまでにミスプリントその他いろいろお教えいただいた金沢大学松村文夫先生，大阪府立大学柴田浩先生，熊本大学川路茂保先生に心から感謝申し上げます．

1981年 8 月

著　　者

目　　次

1　動的線形システムの表現

2　システムの構造

3 正準形と実現問題

4 状態フィードバックと非干渉制御

5 最適制御と観測器

6 カルマンフィルタと統計的取扱い

1

動的線形システムの表現

1.1 システム表現

1.1.1 入出力関係

線形システムの入出力関係を表現する方法に，荷重関数（インパルス応答），伝達関数，周波数応答関数などがある．これらの表現は多入力多出力の線形システムの場合へ拡張できる．図 1.1 に示すような，m 個の入力 $u_1, u_2, \cdots, u_m$ と p 個の出力 $y_1, y_2, \cdots, y_p$ をもつ線形システムを考える．ベクトル表示を用い，入力を $\boldsymbol{u}=(u_1, \cdots, u_m)^{\mathrm{T}}$，出力を $\boldsymbol{y}=(y_1, \cdots, y_p)^{\mathrm{T}}$ と表すことにする．Tはベクトルの転置を表す．$\boldsymbol{u}, \boldsymbol{y}$ は時間関数であるが，特に，時間区間 $[t_0, t_1]$ の間の関数を，たとえば $\boldsymbol{u}_{[t_0, t_1]}$ のように表すことにすれば，非定常の線形システムの入出力関係は，

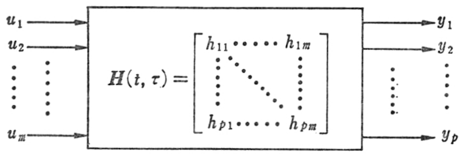

図 1.1　荷重関数行列

$$\boldsymbol{y}(t) \triangleq \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{u}_{(-\infty,\infty)}) = \int_{-\infty}^{\infty} \boldsymbol{H}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.1}$$

のように記述される．$\boldsymbol{H}(t,\tau)$ は荷重関数行列（weighting function）といい，この (i, j) 要素 $h_{ij}(t,\tau)$ は j 番目の入力 $u_j(t)$ から i 番目の出力 $y_i(t)$ の間の荷重関数である．時刻 ξ に入力したインパルス $u_j(t)=\delta(t-\xi)$ に対して

出力は $y_i(t)=h_{ij}(t,\xi)$ となるので，インパルス応答関数ともいう．$\boldsymbol{H}(t,\tau)$ は t と τ の関数である．

定常な線形システムは，入力関数を時間方向に平行移動させたとき，出力もまた元の出力波形を同じく平行移動したものになるという性質から，荷重関数 $\boldsymbol{H}(t,\tau)$ は $t-\tau$ だけの関数となる．したがって，定常線形システムでは，入出力関係は

$$\boldsymbol{y}(t)\triangleq\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{u}_{(-\infty,\infty)})=\int_{-\infty}^{\infty}\boldsymbol{H}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.2}$$

のように表される．

式 (1.1)，(1.2) のように，時刻 t における出力 $\boldsymbol{y}(t)$ が時刻 t 以前の入力 $\{\boldsymbol{u}(\tau),\tau\leq t\}$ に依存するとき，一般に**動的システム** (dynamical system) という．

また，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ が時刻 t よりも未来の入力 $\{\boldsymbol{u}(\tau),\tau>t\}$ によって決まるようなシステムを物理的には実現可能ではないという．このように，時刻 t における出力 $\boldsymbol{y}(t)$ が，時刻 t までの入力にのみ関係し，t よりも将来の入力に関係しない性質を因果律 (causality) という．因果律は物理的実現可能なシステムがもっている本質的な性質なのである．式 (1.1) が因果律を満足するためには，

$$\boldsymbol{H}(t,\tau)=\boldsymbol{O},\qquad t<\tau \tag{1.3}$$

あるいは，

$$\boldsymbol{y}(t)\triangleq\boldsymbol{y}(t,\boldsymbol{u}_{(-\infty,t]})=\int_{-\infty}^{t}\boldsymbol{H}(t,\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.4}$$

でなければならない．

1.1.2　状態変数による表現

ある有限区間の入力関数 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ に対するシステムの出力 $\boldsymbol{y}(t)$ について考えてみよう．

一般に，時刻 $t>t_0$ における出力 $\boldsymbol{y}(t)$ は，入力 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ だけでは一意的に定まらない．この点をすでに説明した式 (1.1) のシステムについて調べてみよう．式 (1.1) を変形すると，

$$y(t)=\int_{-\infty}^{t_0} H(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t} H(t,\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1.5)$$

となり，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ は入力 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ だけでなく，t_0 以前の入力の影響をも受けていることがわかる．式 (*1.5*) の右辺第1項は時刻 t_0 における初期条件に相当するものと考えられるが，この初期条件を定める n 個のパラメータ $\boldsymbol{x}=(x_1, \cdots, x_n)^{\mathrm{T}}$ が与えられ，入力 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ が知れるならば，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ は一意的に定めることができる．すなわち，$\boldsymbol{x}$ は t_0 の関数であり，結局，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ は

$$\boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{y}(t,\ \boldsymbol{x}(t_0),\ \boldsymbol{u}_{[t_0,t]}),\ \ t\geq t_0 \qquad (1.6)$$

のように表される．$\boldsymbol{x}(t_0)$ を時刻 t_0 における状態 (state) という．状態はそれ以後の入力が与えられたとき，出力を一意的に定めるのに必要にして最小限の情報を表している．このことから状態を次のように定義できる．

〘定義 *1.1*〙(状態)：時刻 t_0 以後の入力 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ が与えられたとき，出力 $\boldsymbol{y}(t),\ t\geq t_0$ を一意的に定めるのに必要な最小個数 n 個の変数を状態変数といい，n 個の状態変数が状態を与える．n を状態の次数という．

【例 *1.1*】 図 *1.2* の *RLC* 直列回路を考えてみよう．この回路の入力電圧 $u(t)$ からキャパシタ電圧 $y(t)$ までの伝達関数は，

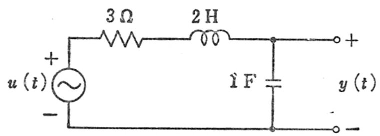

図 *1.2* *RLC* 直列回路

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)}=\frac{1/s}{(3+2s+1/s)}=\frac{1}{(2s+1)(s+1)}=\frac{1}{s+0.5}-\frac{1}{s+1}$$

となり，荷重関数はラプラス逆変換†から

$$h(t)=\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}=\mathrm{e}^{-0.5t}-\mathrm{e}^{-t}$$

である．したがって，入力 $u_{[t_0,t]}$ に対する出力応答 $y(t)$ は，式 (*1.5*) から，

$$\begin{aligned} y(t)&=\int_{-\infty}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \\ &=\int_{-\infty}^{t_0} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau+\int_{t_0}^{t} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau \qquad (1.7)\end{aligned}$$

で与えられる．右辺第1項は，t_0 以前の入力が t_0 以後の出力におよぼす影響

を表しており，この項は，

$$\int_{-\infty}^{t_0} h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau = \mathrm{e}^{-0.5t}\int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{e}^{0.5\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau - \mathrm{e}^{-t}\int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{e}^{\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau$$
$$= \mathrm{e}^{-0.5t}x_1 - \mathrm{e}^{-t}x_2 \qquad (1.8)$$

ただし，$x_1 \triangleq \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{e}^{0.5\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau$，$x_2 \triangleq \int_{-\infty}^{t_0} \mathrm{e}^{\tau}u(\tau)\mathrm{d}\tau$

と書ける．ここで，x_1, x_2 は t には無関係であり，x_1, x_2 を知れば $t \geq t_0$ 以後の出力 $y(t)$ は一意的に決定できる．このことから，パラメータ x_1, x_2 は t_0 における状態変数と考えることができる．

† $\mathcal{L}$ はラプラス変換を，$\mathcal{L}^{-1}$ はラプラス逆変換を表す．

さらに，式 (1.7)，(1.8) から，

$$y(t_0) = \mathrm{e}^{-0.5t_0}x_1 - \mathrm{e}^{-t_0}x_2 \qquad (1.9)$$

を得る．一方，式 (1.7) を t で微分すると，

$$\dot{y}(t) = -0.5\,\mathrm{e}^{-0.5t}x_1 + \mathrm{e}^{-t}x_2 + h(0)u(t) + \int_{t_0}^{t} \frac{\partial}{\partial t}h(t-\tau)u(\tau)\mathrm{d}\tau$$

となり，$h(0)=0$ より，$t=t_0$ において，

$$\dot{y}(t_0) = -0.5\,\mathrm{e}^{-0.5t_0}x_1 + \mathrm{e}^{-t_0}x_2 \qquad (1.10)$$

を得る．式 (1.9)，(1.10) から，

$$x_1 = 2\mathrm{e}^{0.5t_0}(y(t_0) + \dot{y}(t_0))$$
$$x_2 = \mathrm{e}^{t_0}(y(t_0) + 2\dot{y}(t_0))$$

となるので，結局，$y(t_0)$, $\dot{y}(t_0)$ も状態変数と考えることができる．$y(t)$, $\dot{y}(t)$ はキャパシタ電荷および電流に対応した物理量である．さらに，後節で説明するように，キャパシタ電圧およびインダクタ電流を状態変数に選ぶこともでき，この選び方により，一般の RLC 回路網の状態方程式を標準的な方法で導くことが可能となる．

式 (1.6) で，$t_0 = t$ とおくと，

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{y}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}_{[t,t]})$$
$$\triangleq \boldsymbol{g}(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t)) \qquad (1.11)$$

となり，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ は時刻 t の状態 $\boldsymbol{x}(t)$ と入力 $\boldsymbol{u}(t)$ によって決まることがわかる．$\boldsymbol{g}(\cdot)$ を**出力関数** (output function) という．

一方，式 (1.6)，(1.11) から，$\boldsymbol{x}(t)$ は $\boldsymbol{x}(t_0)$ と $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ の関数であり，

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{\phi}(t;\ \boldsymbol{x}_0,\ t_0,\ \boldsymbol{u}_{[t_0,t]}),\quad \boldsymbol{x}_0=\boldsymbol{x}(t_0) \tag{1.12}$$

のように表される．すなわち，t_0 における初期状態 $\boldsymbol{x}_0$ から，それ以後の入力 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ の影響によって状態 $\boldsymbol{x}(t)$ へ推移したことを表しているので，関数 $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ を**状態遷移関数** (state transition function) という．

以上のように，状態変数を導入することにより，動的システムを状態遷移関数 (1.12) と出力関数 (1.11) の二つの関数によって記述できることが明らかとなった．図で表すと図 1.3 のようになる．

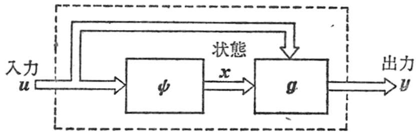

図 1.3 動的システム

特に，状態遷移関数 $\boldsymbol{\phi}(\cdot)$ が微分方程式

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t),\quad \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{1.13}$$

の解によって一意的に与えられる場合，式 (1.13) をシステムの**状態方程式** (state equation) という．状態方程式 (1.13) と出力方程式 (1.11) を合わせて，システム方程式と呼ぶことにし，この動的システムを，**DS** と略記する．

$$\textbf{DS}:\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t),\ \boldsymbol{x}(t_0)=\boldsymbol{x}_0 & (1.14\,a)\\ \boldsymbol{y}(t)=\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}(t),\ \boldsymbol{u}(t),\ t) & (1.14\,b)\end{cases}$$

システム DS において，初期条件 $\boldsymbol{x}_0$ と任意の入力 $\boldsymbol{u}$ によって $\boldsymbol{x}(t)$ と $\boldsymbol{y}(t)$ が一意に定まることを保証するために，$\boldsymbol{f}(\cdot)$ は $\boldsymbol{x}$ に関してリプシッツ条件を満足し，$\boldsymbol{u}$ と t に関して連続な関数であるとする．さらに $\boldsymbol{g}(\cdot)$ も $\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},t$ に関して連続であるという仮定をしておこう．$\boldsymbol{x},\boldsymbol{u},\boldsymbol{y}$ はそれぞれ，n,m,p 次元のベクトルであり，状態 $\boldsymbol{x}$ の張るベクトル空間を**状態空間**という．

式 (1.14) において，$\boldsymbol{f}(\cdot)$ と $\boldsymbol{g}(\cdot)$ が t を陽に含まない場合，システム DS は**時不変** (time invariant) または定常であるという．

さらに，$f(\cdot)$ と $g(\cdot)$ が，$\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{u}$ に関して線形である場合を，**線形動的システム** (linear dynamical system) といい，時変系の場合には ($\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$, $\boldsymbol{D}(t)$)，時不変系あるいは定係数系の場合には，($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$, $\boldsymbol{D}$) と略記する．それぞれのシステム方程式は，

$(\boldsymbol{A}(t), \boldsymbol{B}(t), \boldsymbol{C}(t), \boldsymbol{D}(t))$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}(t)\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.15 a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}(t)\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}(t)\boldsymbol{u}(t) \tag{1.15 b}$$

$(\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D})$:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{u}(t), \quad \boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0 \tag{1.16 a}$$

$$\boldsymbol{y}(t) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{x}(t) + \boldsymbol{D}\,\boldsymbol{u}(t) \tag{1.16 b}$$

のように記述される．ここで，$\boldsymbol{A}(t)$, $\boldsymbol{B}(t)$, $\boldsymbol{C}(t)$, $\boldsymbol{D}(t)$ はそれぞれ，$n \times n$, $n \times m$, $p \times n$, $p \times m$ の行列で，各要素が t に関して連続であれば，式(1.15 a)の状態方程式は唯一解をもつ．

1.1.3 伝達関数行列

定係数線形システムの荷重関数行列 $\boldsymbol{H}(t)$ をラプラス変換したものを伝達関数行列 (transfer-function matrix) という．

式 (1.5) の t_0 以前の入力に依存する第1項が零であれば，出力 $\boldsymbol{y}(t)$ は入力 $\boldsymbol{u}_{[t_0,t]}$ によって一意に決まる．定常システムであるから，初期時刻を $t_0=0$ としても一般性を失わない．さらに，式 (1.3) の因果律を満たしていなければならない．すると，定係数線形システムの入出力関係は，これらの条件のもとで，

$$\boldsymbol{y}(t) = \int_0^\infty \boldsymbol{H}(t-\tau)\boldsymbol{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \tag{1.17}$$

で表される．

式(1.17) をラプラス変換してみよう．ベクトルおよび行列のラプラス変換は各要素ごとに行えばよい．そこで，

$$\boldsymbol{H}(s) \triangleq \mathcal{L}\{\boldsymbol{H}(t)\} = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-st}\boldsymbol{H}(t)\mathrm{d}t \tag{1.18}$$

索　　引

――著者略歴――

ふるた かつひさ
古 田 勝 久

1967 年 東京工業大学大学院博士課程修了
工学博士
1970 年 東京工業大学助教授
1982 年 東京工業大学教授（工学部制御工学科）
2000 年 東京工業大学名誉教授
2000 年 東京電機大学教授
現在に至る
著 書 「線形システム制御理論」（昭晃堂），
「線形システムの観測と同定」（コロナ社）

さ の あきら
佐 野 昭

1971 年 東京大学大学院博士課程修了
工学博士
1976 年 慶応義塾大学助教授
1985 年 慶応義塾大学教授（理工学部電気工学科）
現在に至る

基礎システム理論

Introduction to Linear System Theory

1978 年 7 月 25 日 初版第1刷発行
2005 年 11 月 20 日 初版第15刷発行

検印省略

著 者 古 田 勝 久
東京都練馬区南大泉町 4-44-15
佐 野 昭
神奈川県川崎市中原区井田 1329
発 行 者 株式会社 コ ロ ナ 社
代 表 者 牛 来 辰 巳

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10
発行所 株式会社 コ ロ ナ 社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140-8-14844・電話（03）3941-3131（代）
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 4-339-00113-9 （清文社，愛千製本所）
Printed in Japan