システム制御工学シリーズ　**21**

システム制御のための最適化理論

工学博士　延山　英沢
博士(工学)　瀬部　昇　共著

コロナ社

刊行のことば

わが国において，制御工学が学問として形を現してから，50年近くが経過した。その間，産業界でその有用性が証明されるとともに，学界においてはつねに新たな理論の開発がなされてきた。その意味で，すでに成熟期に入っているとともに，まだ発展期でもある。

これまで，制御工学は，すべての製造業において，製品の精度の改善や高性能化，製造プロセスにおける生産性の向上などのために大きな貢献をしてきた。また，航空機，自動車，列車，船舶などの高速化と安全性の向上および省エネルギーのためにも不可欠であった。最近は，高層ビルや巨大橋梁（きょうりょう）の建設にも大きな役割を果たしている。将来は，地球温暖化の防止や有害物質の排出規制などの環境問題の解決にも，制御工学はなくてはならないものになるであろう。今後，制御工学は工学のより多くの分野に，いっそう浸透していくと予想される。

このような時代背景から，制御工学はその専門の技術者だけでなく，専門を問わず多くの技術者が習得すべき学問・技術へと広がりつつある。制御工学，特にその中心をなすシステム制御理論は難解であるという声をよく耳にするが，制御工学が広まるためには，非専門のひとにとっても理解しやすく書かれた教科書が必要である。この考えに基づき企画されたのが，本「システム制御工学シリーズ」である。

本シリーズは，レベル0(第1巻)，レベル1(第2〜7巻)，レベル2(第8巻以降)の三つのレベルで構成されている。読者対象としては，大学の場合，レベル0は1，2年生程度，レベル1は2，3年生程度，レベル2は制御工学を専門の一つとする学科では3年生から大学院生，制御工学を主要な専門としない学科では4年生から大学院生を想定している。レベル0は，特別な予備知識なしに，制御工学とはなにかが理解できることを意図している。レベル1は，少

し数学的予備知識を必要とし，システム制御理論の基礎の習熟を意図している。レベル2は少し高度な制御理論や各種の制御対象に応じた制御法を述べるもので，専門書的色彩も含んでいるが，平易な説明に努めている。

1990年代におけるコンピュータ環境の大きな変化，すなわちハードウェアの高速化とソフトウェアの使いやすさは，制御工学の世界にも大きな影響を与えた。だれもが容易に高度な理論を実際に用いることができるようになった。そして，数学の解析的な側面が強かったシステム制御理論が，最近は数値計算を強く意識するようになり，性格を変えつつある。本シリーズは，そのような傾向も反映するように，現在，第一線で活躍されており，今後も発展が期待される方々に執筆を依頼した。その方々の新しい感性で書かれた教科書が制御工学へのニーズに応え，制御工学のよりいっそうの社会的貢献に寄与できれば，幸いである。

1998年12月

編集委員長　池田雅夫

□□□□□□□□□　ま　え　が　き　□□□□□□□□□

本書は，システム制御を学ぶ人のための最適化理論の入門書である。最適化はシステム制御の研究における根幹をなしており，システム制御を学ぶ者にとって最適化の基礎を学ぶことは必要不可欠といえる。特に，システム制御における最適化では，1980 年代後半に線形行列不等式（linear matrix inequality; LMI）が登場したことと，その最適化問題を数値的に解くソフトウェアであるソルバーが普及したことは，大きな出来事であった。それ以来，システム制御の研究は，制御系設計問題を最適化問題に帰着させてソルバーで数値的に解く方法が主流になっており，最適化問題に帰着させるための数学的技法も数多く提案されている。その意味で，そのような数学的技法を習得することは重要であるが，問題の本質に迫るためには，表面的に技法を駆使してソルバーを適用するのではなく，ソルバーを使う前に，問題をさまざまな角度から眺めて理論的に考察する必要がある。そのためには，最適化の基礎理論を身につけておくことが不可欠であり，本書はそのような観点で，最適化の基礎理論から，システム制御の最適化に関連した最近の話題までを，公式集的な技法の羅列ではなく，本質的な意味も含めて理解できるように解説することを目的として書いたものである。

本書は，対象として学部高学年から大学院の学生を想定した入門書である。ただし，システム制御の研究者にも役立つ本となることも意識して執筆した。本書の 1〜3 章では，最適性条件，凸関数，線形計画法など，初めて最適化理論を学ぶ学生のために，最適化の基礎理論を解説している。その中で，ラグランジュ双対，準凸関数，線形計画法の双対定理や感度分析など，システム制御の研究に重要な部分をていねいに記述した。そして，本書の 4 章以降では，システム制御の研究に直接的に関係する，線形行列不等式，平方和最適化，確率的手法などについて記述している。このような内容を確率的手法までを含めてま

とめたものは，ほかには見当たらない。このことから，本書がシステム制御を学ぶ学生だけでなく研究者にも興味の持てる内容になったとすれば，うれしい限りである。

本書の執筆は，1 章，2 章，5 章と付録の一部を延山が担当し，3 章，4 章，6 章と付録のほとんどを瀬部が担当した。最後に，本書の執筆を勧めていただいた編集委員の皆様，校正を手伝っていただいた研究室の学生諸君，そして何年にもわたって遅筆の筆者らを叱咤し，最後まで励ましていただいたコロナ社に，心より感謝いたします。

2015 年 4 月

延山英沢
瀬部　昇

本書で用いる記号

j	虚数単位を表すことがある
$\mathrm{Re}(z)$	複素数 z の実部
$\mathbf{R}$	実数全体の集合
$\mathbf{R}^{m\times n}$	$m\times n$ の実数行列の集合
$\mathbf{C}$	複素数全体の集合
$\mathbf{C}^{m\times n}$	$m\times n$ の複素行列の集合
$\mathbf{R}[x]$	x の実係数多項式の集合
$\mathbf{R}[x]^{m\times n}$	x の実係数多項式を要素とする $m\times n$ の行列
$\mathbf{R}_+[x]$	x の非負多項式の集合（**定義 5.1**）
$\Sigma[x]$	x の平方和多項式の集合（**定義 5.1**）
$\Sigma_N[x]$	x の N 次以下の平方和多項式の集合（**定義 5.1**）
$\Sigma_N[x]^{r\times r}$	x の $r\times r$ の平方和多項式行列の集合（**定義 5.2**）
$\deg\bigl(f(x)\bigr)$	多項式，または多項式行列 $f(x)$ の次数
$\emptyset$	空集合
$\max S$	集合 S の最大値（式 (1.3) のように関数 $f(x)$ の最大化の意味でも使う）
0	スカラーの零，あるいは零ベクトル
O	零行列（特に $m\times n$ の零行列は $O_{m\times n}$ と表す）
I	単位行列（特に $n\times n$ の単位行列は I_n と表す）
M^{T}	行列 M の転置行列
M^*	行列 M の共役転置行列
M^{-1}	行列 M の逆行列
$M^{-\mathrm{T}}$	行列 M の転置行列 M^{T} の逆行列 $\bigl(M^{\mathrm{T}}\bigr)^{-1}$
M^+	行列 M の擬似逆行列（**定義 A.2**）
$M^\perp$	行列 M に対して $M^*M^\perp = O$ を満たす行列（厳密な定義は**定義 A.3** を参照のこと）
$\mathrm{diag}\{D_1,\cdots,D_n\}$	行列 $D_1,\cdots,D_n$ をブロック対角に並べた行列

$\det M$	正方行列 M の行列式
$\mathrm{rank}\ M$	行列 M のランク
$\mathrm{tr}(M)$	行列 M のトレース
$\mathrm{He}(M)$	$\mathrm{He}(M)=M+M^*$（$M\in\mathbf{R}^{n\times n}$ なら $\mathrm{He}(M)=M+M^{\mathrm{T}}$）
$A\otimes B$	行列 A, B のクロネッカー積（**定義 A.6**）
$A\bullet B$	$A\bullet B=\mathrm{tr}(A^{\mathrm{T}}B)$（**定義 A.7**）
$M\succ O$	行列 M が正定値行列であることを示す（**定義 A.4**）
$M\succeq O$	行列 M が半正定値行列であることを示す（**定義 A.4**）
$A\succ B$	行列 $A-B$ が正定値行列であることを示す
$A\succeq B$	行列 $A-B$ が半正定値行列であることを示す
$\blacklozenge$	対称行列の対称部分を省略して表記する 例：$\begin{bmatrix} M_{11} & M_{21}^{\mathrm{T}} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \blacklozenge \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix}$
$x\leqq y$	ベクトル x と y の要素ごとの大小関係を表す不等式 （$x<y$, $x\geqq y$, $x>y$ も同様に用いる）
$\Vert x\Vert$	ベクトル x のユークリッドノルム（$=\sqrt{x^{\mathrm{T}}x}$）
$\Vert G(s)\Vert_2$	伝達関数行列の H_2 ノルム
$\Vert G(s)\Vert_\infty$	伝達関数行列の H_∞ ノルム
$a:=b$	a を b と定義する
s.t.$\sim$	“subject to $\sim$”（$\sim$の条件のもとで）を表す

□□□□□□□□□ 目　　　次 □□□□□□□□□

1.　最適化の基礎

1.1　最適化問題と最適性条件 ………… *1*
　1.1.1　最適化問題 ………… *1*
　1.1.2　大域的最小解と局所的最小解 ………… *4*
1.2　最 適 性 条 件 ………… *5*
　1.2.1　勾配，ヘッセ行列の定義 ………… *6*
　1.2.2　制約なし最適化問題の最適性条件 ………… *7*
　1.2.3　等式制約付き最適化問題の最適性条件 ………… *12*
　1.2.4　不等式制約付き最小化問題 ………… *17*
1.3　ラグランジュ双対 ………… *25*
　1.3.1　弱双対定理とラグランジュ緩和 ………… *25*
　1.3.2　双 対 定 理 ………… *28*
1.4　最適制御への応用例 ………… *33*
演　習　問　題 ………… *36*

2.　凸関数と凸計画問題

2.1　凸関数と準凸関数の定義と性質 ………… *38*
　2.1.1　定義と基本的な性質 ………… *38*
　2.1.2　凸関数の勾配と劣勾配 ………… *44*
　2.1.3　性質 (a)〜(o) の証明 ………… *50*
2.2　凸 計 画 問 題 ………… *55*
2.3　楕 円 体 法 ………… *59*
　2.3.1　制約なし凸計画問題に対する楕円体法 ………… *59*

2.3.2　制約付き凸計画問題に対する楕円体法 ⋯⋯ 62
2.4　切 除 平 面 法 ⋯⋯ 65
演 習 問 題 ⋯⋯ 68

3.　線形計画問題と 2 次計画問題

3.1　線 形 計 画 問 題 ⋯⋯ 69
3.1.1　線形計画問題とは ⋯⋯ 69
3.1.2　標準形と双対問題 ⋯⋯ 71
3.1.3　弱双対定理と双対定理 ⋯⋯ 74
3.1.4　相補性条件 ⋯⋯ 78
3.1.5　潜在価格と感度分析 ⋯⋯ 79
3.2　2 次 計 画 問 題 ⋯⋯ 81
3.2.1　2 次計画問題とは ⋯⋯ 81
3.2.2　弱双対定理と双対定理 ⋯⋯ 84
3.2.3　2 次計画問題の最適性条件 ⋯⋯ 84
3.2.4　制約なし 2 次計画問題 ⋯⋯ 87
3.3　モデル予測制御 ⋯⋯ 87
演 習 問 題 ⋯⋯ 90

4.　半正定値計画問題と線形行列不等式

4.1　半正定値計画問題 ⋯⋯ 91
4.2　線形行列不等式 ⋯⋯ 96
4.3　制御性能解析と行列不等式 ⋯⋯ 99
4.3.1　極の存在領域 ⋯⋯ 99
4.3.2　H_2 ノ ル ム ⋯⋯ 104
4.3.3　H_∞ ノルム ⋯⋯ 112
4.3.4　双対システムと制御性能解析 ⋯⋯ 120
4.3.5　数値計算上の注意 ⋯⋯ 121

4.4　制御系設計と線形行列不等式 ······ 123
4.4.1　設計問題の定式化 ······ 124
4.4.2　変数消去法 ······ 127
4.4.3　変数変換法 ······ 132
4.4.4　数値計算上の注意 ······ 136
4.5　双線形行列不等式とその近似解法 ······ 136
4.5.1　座標降下法 ······ 137
4.5.2　ディスクリプタシステムと逐次 LMI 化法 ······ 138
4.5.3　逐次 LMI 化法による性能改善 ······ 141
4.6　制御系設計の例 ······ 144
演　習　問　題 ······ 149

5.　平方和最適化

5.1　平方和多項式と平方和行列 ······ 151
5.1.1　平方和多項式とは ······ 151
5.1.2　平方和多項式性の半正定値計画問題への変換 ······ 158
5.1.3　平方和行列 ······ 162
5.1.4　決定変数を含む場合 ······ 164
5.2　多項式計画問題に対する SOS 緩和と SDP 緩和 ······ 166
5.2.1　制約なし多項式計画問題に対する SOS 緩和と SDP 緩和 ······ 166
5.2.2　制約あり多項式計画問題に対する SOS 緩和と SDP 緩和 ······ 170
5.2.3　一般化ラグランジュ関数を用いた緩和 ······ 174
5.3　平方和最適化 ······ 176
5.3.1　平方和最適化問題とは ······ 176
5.3.2　平方和可解問題 ······ 178
5.3.3　平方和最適化問題 ······ 181
5.3.4　平方和行列最適化問題 ······ 184
5.3.5　制御問題への適用例 ······ 187
演　習　問　題 ······ 191

6. 確率的手法を用いた最適化

6.1 モンテカルロ法 ………… 192
6.2 パーティクルフィルタ ………… 195
6.2.1 問 題 設 定 ………… 195
6.2.2 カルマンフィルタ ………… 196
6.2.3 パーティクルフィルタ ………… 198
6.3 制御系設計のための確率的手法 ………… 203
6.3.1 ロバスト性能検証問題 ………… 204
6.3.2 ロバスト性能解析問題 ………… 206
6.3.3 ロバスト性能設計問題 ………… 207
6.3.4 凸性による効率化 ………… 210
6.4 制御系設計の例 ………… 213
演 習 問 題 ………… 214

付　　録 ………… 215

A.1 行 列 の 基 礎 ………… 215
A.1.1 特異値分解，擬似逆行列，直交補空間の基底からなる行列 ………… 215
A.1.2 行列の正定値性 ………… 217
A.1.3 行列方程式 ………… 225
A.1.4 行列のトレースに関する性質 ………… 227
A.2 ファルカスの補題 ………… 229
A.3 ディスクリプタシステムとその制御性能解析 ………… 231
A.3.1 ディスクリプタシステム ………… 231
A.3.2 ディスクリプタシステムの制御性能解析 ………… 232

引用・参考文献 ………… 234

演習問題の解答 ………… 239

索　　引 ………… 258

1 最適化の基礎

本章では，最適化の基礎として，種々の定義を行った後，最適点が満たすべき条件である最適性条件について説明する。さらに，最適化においてさまざまな場面で重要な役割を果たすラグランジュ双対について説明する。最後に，制御への応用として，最適制御問題に対する最適ゲインを最適性条件の観点から導出できることを示す。

1.1 最適化問題と最適性条件

1.1.1 最 適 化 問 題

最適化問題（optimization problem）とは，与えられた制約のもとで，目的関数と呼ばれる関数を最小（あるいは最大）にする変数の値を求める問題である。このような問題は，**数理計画問題**（mathematical programming problem）とも呼ばれる。

ここで，関数 $f(x)$

$$f:\ \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \quad (x \in \mathbf{R}^n) \tag{1.1}$$

を**目的関数**（objective function）とする。このとき，その変数 x を**決定変数**（decision variable）と呼ぶ。決定変数 x に制約がない場合，つまり x の範囲が全空間 $x \in \mathbf{R}^n$ の場合の最適化問題を制約なし最適化問題と呼び，ある集合 $\mathcal{F} \subset \mathbf{R}^n$ により x の範囲が $x \in \mathcal{F}$ と制約されている場合の最適化問題を制約

付き最適化問題と呼ぶ。ここで，制約条件を満たす x の集合 $\mathcal{F}$ を**実行可能領域**（あるいは**実行可能集合**，**可能領域**，**許容領域**）（feasible region）と呼び，実行可能領域に含まれる点 x を**実行可能解**（feasible solution）と呼ぶ。それに対し，制約条件を満たさない x を**実行不能解**（あるいは**実行不可能解**）（infeasible solution）と呼ぶ。制約なし最適化問題の場合は全空間 $\mathbf{R}^n$ が実行可能領域であり，任意の点 $x \in \mathbf{R}^n$ が実行可能解となる。これらの定義より，最適化問題とは，実行可能解のうちで目的関数を最小あるいは最大にするものを求める問題であるといえる。しかし，制約付き最適化問題は必ずしも実行可能解が存在するとは限らない。そのように実行可能領域が空集合である場合，最適化問題は**実行不能**（あるいは**実行不可能**）（infeasible）であるという。それに対し，実行可能解が存在する場合，最適化問題は**実行可能**（feasible）であるという。

つぎに，記法について説明する。制約なし**最小化問題**は

$$\operatorname*{minimize}_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \quad \text{あるいは簡略化して} \quad \min_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \tag{1.2}$$

と表し，制約なし**最大化問題**は

$$\operatorname*{maximize}_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \quad \text{あるいは簡略化して} \quad \max_{x \in \mathbf{R}^n} f(x) \tag{1.3}$$

と表す。ただし，この最大化問題は，目的関数の符号を反転した最小化問題

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} -f(x) \tag{1.4}$$

と等しくなるので，一般に最適化問題を考える場合は，最小化問題と最大化問題のどちらかを考えれば十分である。以下では，最小化問題だけを考えることとし，簡略化した min を用いて表すこととする。

制約付き最小化問題は

$$\min_{x \in \mathcal{F}} f(x) \text{ あるいは} \quad \min f(x) \;\; \text{s.t. } x \in \mathcal{F} \tag{1.5}$$

と表す。この "s.t." は "subject to" の省略形である。特に，$\mathcal{F} = \mathbf{R}^n$ の場合は，制約なし最小化問題 (1.2) となる。

制約付き最適化問題において，実行可能領域 $\mathcal{F}$ を表す条件は数式で表すことが難しい場合も多いが，等式や不等式を用いて表すのが一般的である。具体的には，関数 $h_i(x)$ $(i=1,\cdots,r)$ と $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ を用いて

$$\textbf{等式制約：}\quad h_1(x)=0, h_2(x)=0,\ \cdots, h_r(x)=0 \tag{1.6}$$

$$\textbf{不等式制約：}\, g_1(x)\leqq 0,\ g_2(x)\leqq 0,\ \cdots,\ g_m(x)\leqq 0 \tag{1.7}$$

を考えると，実行可能領域は

$$\begin{aligned}\mathcal{F}=\{x\in\mathbf{R}^n \mid\ & h_1(x)=0, h_2(x)=0,\ \cdots, h_r(x)=0,\\ & g_1(x)\leqq 0,\ g_2(x)\leqq 0,\ \cdots,\ g_m(x)\leqq 0\}\end{aligned} \tag{1.8}$$

と表せる。また，実行可能領域が式 (1.8) で与えられる制約付き最小化問題 (1.5) は，等式制約と不等式制約を直接用いて

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n}\quad f(x) \tag{1.9a}$$

$$\text{s.t.}\ \ h_1(x)=0, h_2(x)=0,\ \cdots, h_r(x)=0 \tag{1.9b}$$

$$g_1(x)\leqq 0,\ g_2(x)\leqq 0,\ \cdots,\ g_m(x)\leqq 0 \tag{1.9c}$$

と表すことが多い。明らかな場合は，$x\in\mathbf{R}^n$ を省略することもある。ここで，記法を簡略化するために，ベクトル値関数

$$h:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^r,\quad g:\ \mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m \tag{1.10}$$

を次式で定義する。

$$h(x):=\begin{bmatrix} h_1(x)\\ \vdots\\ h_r(x)\end{bmatrix},\quad g(x):=\begin{bmatrix} g_1(x)\\ \vdots\\ g_m(x)\end{bmatrix} \tag{1.11}$$

この定義を用いて，制約付き最小化問題 (1.9) を

$$\min_{x\in\mathbf{R}^n}\ f(x)\quad \text{s.t.}\ h(x)=0,\ g(x)\leqq 0 \tag{1.12}$$

と表すことにする。ただし，不等号はベクトルの要素ごとの不等号とする。

1.1.2 大域的最小解と局所的最小解

最小化問題 (1.5) に対して求めたいものは，制約条件を満たす $x \in \mathcal{F}$ の中で目的関数を最小にするもの，すなわち

$$f(x^\star) \leqq f(x) \quad (\forall x \in \mathcal{F}) \tag{1.13}$$

を満たす $x^\star \in \mathbf{R}^n$ である。この $x^\star$ を問題 (1.5) に対する**大域的最小解**（あるいは**大域的最小点**）（global minimum solution; global minimizer; global minimum point）と呼び，その点での値 $f(x^\star)$ を**大域的最小値**（global minimum; global minimum value）と呼ぶ。特に，$x^\star$ 以外で等式が成立しない場合，すなわち

$$f(x^\star) < f(x) \quad (\forall x \in \mathcal{F},\ x \neq x^\star) \tag{1.14}$$

のとき，$x^\star$ を**狭義の大域的最小解**（strong（または strict）global minimum solution）などと呼ぶ。

しかし，大域的最小解を求めることは難しいことが多く，局所的に最小となる実行可能解，すなわち，ある $\varepsilon > 0$ に対する $x^\star$ の近傍 $B(x^\star, \varepsilon)$ に対して

$$f(x^\star) \leqq f(x) \quad (\forall x \in \mathcal{F} \cap B(x^\star, \varepsilon)) \tag{1.15}$$

を満たす $x^\star \in \mathbf{R}^n$ を求めるところまでで満足しなければならないことが多い。ただし，$B(x, \varepsilon) := \{x \mid x \in \mathbf{R}^n,\ \|x - x^\star\| < \varepsilon\}$ である。式 (1.15) を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在するとき，$x^\star$ を問題 (1.5) に対する**局所的最小解**（あるいは**局所的最小点**）（local minimum solution; local minimizer; local minimum point）と呼び，その点での値 $f(x^\star)$ を**局所的最小値**（local minimum; local minimum value）と呼ぶ。特に，$x^\star$ 以外で等式が成立しない場合，すなわち

$$f(x^\star) < f(x) \quad (\forall x \in \mathcal{F} \cap B(x, \varepsilon),\ x \neq x^\star) \tag{1.16}$$

のとき，$x^\star$ を**狭義の局所的最小解**（strong（または strict）local minimum solution）などと呼ぶ。

変数がスカラー（$x \in \mathbf{R}$）で $f(x)$ が微分可能な場合，**図 1.1** (a) のように，制約なし最小化問題では，すべての局所的最小解 $x^\star$ は

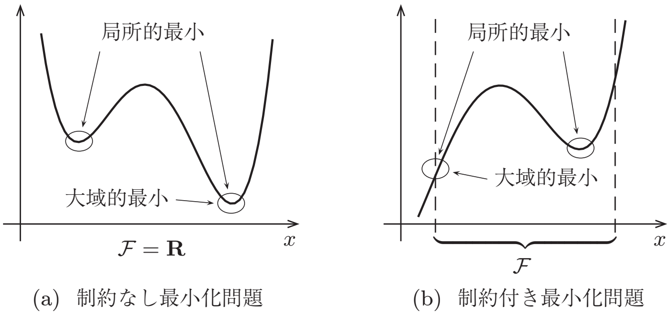

図 1.1　大域的最小と局所的最小

$$\frac{df(x^\star)}{dx} = 0 \tag{1.17}$$

を満たし，これらの局所的最小解のうちで最小のものが大域的最小解となることは明らかである。これに対し，**図 1.1** (b) のように，制約付き最小化問題では，局所的最小解が実行可能領域 $\mathcal{F}$ の境界上にある場合は，必ずしも式 (1.17) を満たさないことに注意が必要である。

なお，本書では，関数に微分を用いる場合，その関数は適当な階数で微分可能であるとする。

1.2　最 適 性 条 件

最適性条件とは，局所的最小解が満たす必要条件や十分条件のことをいう。特に，変数がスカラー（$x \in \mathbf{R}$）の場合の制約なし最小化問題では，$x = x^\star$ が局所的最小解であるための必要条件は式 (1.17) を満たすことであり，式 (1.17) かつ

$$\frac{d^2 f(x^\star)}{dx^2} > 0 \tag{1.18}$$

を満たすことが十分条件であることが知られている。条件 (1.18) は，$f(x)$ のグラフが $x = x^\star$ において（狭義に）凸†となっていることを表す条件である。

† 凸の定義は 2.1.1 項で行う。

では，変数が多次元（$x \in \mathbf{R}^n$）になった場合や，制約付き最適化問題の場合，これらの最適性条件はどのように表されるであろうか。本節では，これについて説明する。

1.2.1　勾配，ヘッセ行列の定義

最適性条件を記述する前に，ここでいくつかの定義を行う。まず，n 次の変数 $x \in \mathbf{R}^n$ を

$$x := \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{1.19}$$

とし，関数 $f(x)$ を各変数で偏微分したものを $\nabla_x f(x)$ と表す。すなわち

$$\nabla_x f(x) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} \tag{1.20}$$

であり，$\nabla_x f(x)$ を $f(x)$ の点 x における**勾配**（gradient）あるいは**勾配ベクトル**（gradient vector）と呼ぶ。勾配が零となる点，すなわち

$$\nabla_x f(x) = 0 \tag{1.21}$$

を満たす点を，$f(x)$ の**停留点**（stationary point）あるいは**臨界点**（critical point）と呼ぶ。さらに，$f(x)$ を x で 2 回偏微分したものを $\nabla_x^2 f(x)$ と表す。すなわち

$$\nabla_x^2 f(x) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n \partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f(x)}{\partial x_n^2} \end{bmatrix} \tag{1.22}$$

であり，$\nabla_x^2 f(x)$ を $f(x)$ の点 x における**ヘッセ行列**（Hessian matrix）と呼ぶ。

また，式 (1.11) のベクトル値関数 $h(x)$ を x で偏微分したものを $J_h(x)$ と表す。すなわち

$$J_h(x) := \begin{bmatrix} \dfrac{\partial h_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial h_r(x)}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial h_r(x)}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \nabla_x h_1(x)^{\mathrm{T}} \\ \vdots \\ \nabla_x h_r(x)^{\mathrm{T}} \end{bmatrix} \tag{1.23}$$

であり，$J_h(x)$ を $h(x)$ の点 x における**ヤコビ行列**（Jacobian matrix）と呼ぶ。以下では，変数が明らかな場合，∇_x, ∇_x^2 などは単に ∇, ∇^2 などと表すことにする。

1.2.2 制約なし最適化問題の最適性条件

ここでは，制約なし最小化問題

$$\min_{x \in \mathbf{R}^n} \ f(x) \tag{1.24}$$

の最適性条件を考える。

【定理 1.1】 つぎの (i), (ii) が成立する。

(i) 点 $x^\star$ を制約なし最小化問題 (1.24) の局所的最小解とする。このとき

$$\nabla f(x^\star) = 0 \tag{1.25}$$

が成立する（**最適性の 1 次の必要条件**（first-order necessary condition for optimality））。また，$x^\star$ におけるヘッセ行列は半正定値行列となる。すなわち

$$t^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x^\star)\, t \geqq 0 \quad (\forall t \in \mathbf{R}^n) \tag{1.26}$$

が成立する（**最適性の 2 次の必要条件**（second-order necessary condition for optimality））。

(ii) 点 $x^\star$ が $f(x)$ の停留点（$\nabla f(x^\star)=0$）かつヘッセ行列が正定値行列であるとき，すなわち

$$t^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^\star)\,t>0 \quad (\forall t\in\mathbf{R}^n \text{かつ } t\neq 0) \tag{1.27}$$

が成立するとき（**最適性の 2 次の十分条件**（second-order sufficient condition for optimality）），点 $x^\star$ は制約なし問題に対する狭義の局所的最小点である。

証明　(i) 点 $x^\star$ を局所的最小解とし，$x^\star+\alpha t$ を考える。ただし，$t\in\mathbf{R}^n$ ($t\neq 0$) は任意のベクトルで，$\alpha\in\mathbf{R}$ ($\alpha>0$) である。このとき，$|\alpha|$ が十分小さければ，$x^\star$ が局所的最小解であることから

$$f(x^\star+\alpha t)-f(x^\star)\geqq 0 \tag{1.28}$$

が成立する。両辺を α で割り，$\alpha\to 0$ の極限をとると

$$0\leqq \lim_{\alpha\to 0}\frac{f(x^\star+\alpha t)-f(x^\star)}{\alpha}=\nabla f(x^\star)^{\mathrm{T}}t \tag{1.29}$$

が成立する。ただし，最後の等号には合成関数の微分の公式を用いた。この関係は $-t$ についても成立するので，$0\leqq\nabla f(x^\star)^{\mathrm{T}}(-t)$ となり，$\nabla f(x^\star)^{\mathrm{T}}t=0$ がいえる。さらに，n 個の独立な t を選ぶと，$\nabla f(x^\star)=0$ であることがいえる。

つぎに，点 $x^\star$ のまわりでテイラー展開すると

$$f(x^\star+\alpha t)-f(x^\star)=\alpha\nabla f(x^\star)^{\mathrm{T}}t+\frac{\alpha^2}{2}t^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^\star)\,t+o(\alpha^2) \tag{1.30}$$

となる†。点 $x^\star$ が局所的最小値であることと，$\nabla f(x^\star)=0$ が成立することより

$$0\leqq\frac{f(x^\star+\alpha t)-f(x^\star)}{\alpha^2}=\frac{1}{2}t^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^\star)\,t+\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2} \tag{1.31}$$

となる。よって，$\displaystyle\lim_{\alpha\to 0}\frac{o(\alpha^2)}{\alpha^2}=0$ より

$$0\leqq t^{\mathrm{T}}\nabla^2 f(x^\star)\,t \tag{1.32}$$

† $o(x):[0,\infty)\to\mathbf{R}$ は，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{o(x)}{x}=0$ を満たす関数。

である。これが任意の t に対して成立するので，$\nabla^2 f(x^\star)$ は半正定値行列である。

(ii) $\nabla^2 f(x^\star)$ は正定値行列であるので，任意の $t \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$t^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x^\star)\, t \geqq \sigma \|t\|^2 \tag{1.33}$$

が成立する。ただし $\sigma\ (>0)$ は $\nabla^2 f(x^\star)$ の最小固有値である。そして，$o(\cdot)$ の定義より，十分小さい $\varepsilon\ (>0)$ をとれば，$\|t\| \leqq \varepsilon$ を満たす任意の t に対して

$$\frac{\sigma}{2}\|t\|^2 + o(\|t\|^2) > 0 \quad (t \neq 0) \tag{1.34}$$

を満たすようにすることができる。この $\varepsilon > 0$ に対して，任意の $x \in B(x^\star, \varepsilon)$ を選び，$t = x - x^\star$ とする。このとき，$x = x^\star + t$ かつ $\|t\| \leqq \varepsilon$ であり，テイラー展開より

$$f(x) - f(x^\star) = \nabla f(x^\star)^{\mathrm{T}} t + \frac{1}{2} t^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x^\star)\, t + o(\|t\|^2) \tag{1.35}$$

を得る。よって，$\nabla f(x^\star) = 0$ であることを考慮し，式 (1.35) に式 (1.33) と式 (1.34) を適用すると

$$\begin{aligned} f(x) - f(x^\star) &= \frac{1}{2} t^{\mathrm{T}} \nabla^2 f(x^\star)\, t + o(\|t\|^2) \\ &\geqq \frac{\sigma}{2}\|t\|^2 + o(\|t\|^2) > 0 \quad (x \neq x^\star) \end{aligned} \tag{1.36}$$

を得る。これより $x^\star$ は狭義の局所的最小点であることがわかる。　△

例 1.1　（制約なし最小化問題の最適性条件の例 1）

スカラー変数（$x \in \mathbf{R}$）のつぎの目的関数を考える（**図 1.2**）。

$$f_1(x) = x,\ \ f_2(x) = x^2,\ \ f_3(x) = x^3,\ \ f_4(x) = x^4 \tag{1.37}$$

このとき，それぞれ

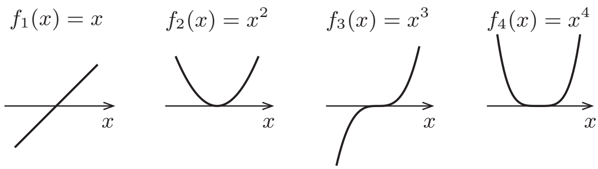

図 1.2　目的関数の例

$$\nabla f_1(x) = 1,\quad \nabla f_2(x) = 2x,\ \nabla f_3(x) = 3x^2,\ \nabla f_4(x) = 4x^3 \tag{1.38}$$

$$\nabla^2 f_1(x) = 0,\ \nabla^2 f_2(x) = 2,\ \nabla^2 f_3(x) = 6x,\ \nabla^2 f_4(x) = 12x^2 \tag{1.39}$$

である。$f_1(x)$ には最適性の 1 次の必要条件を満たす点は存在せず，$f_2(x)$, $f_3(x)$, $f_4(x)$ については，$x = 0$ が最適性の 1 次の必要条件を満たす点である。そして

$$\nabla^2 f_2(0) = 2,\ \nabla^2 f_3(0) = 0,\ \nabla^2 f_4(0) = 0 \tag{1.40}$$

であるので，点 $x = 0$ において，$f_2(x)$ は 2 次の十分条件を満たす。しかし，$f_3(x)$ と $f_4(x)$ は，点 $x = 0$ において 2 次の必要条件は満たすが，2 次の十分条件は満たさない。この簡単な $f_4(x)$ の例からわかるように，明らかに局所的最小点である点（いまの場合 $x = 0$）が，2 次の十分条件を満たさないような場合が存在する。

例 1.2　（制約なし最小化問題の最適性条件の例 2）

つぎの制約なし最小化問題を考える。

$$\min_{x \in \mathbf{R}^2}\ f(x) := x_1^2 + x_1^2 x_2 + 2x_2^2 \tag{1.41}$$

このとき，最適性の 1 次の必要条件とヘッセ行列はそれぞれ

$$\nabla f(x) = \begin{bmatrix} 2x_1 + 2x_1 x_2 \\ x_1^2 + 4x_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{1.42}$$

$$\nabla^2 f(x) = \begin{bmatrix} 2 + 2x_2 & 2x_1 \\ 2x_1 & 4 \end{bmatrix} \tag{1.43}$$

である。まず，停留点を求める。式 (1.42) の 1 行目の式より $x_1(1+x_2) = 0$ なので，$x_1 = 0$ または $x_2 = -1$ である。

索　　引

【あ行】

安　定　*96*
鞍　点　*28*
一般化ラグランジュ関数　*18, 174*
一般化ラグランジュ乗数　*18*
一般化ラグランジュ双対問題　*175*
エピグラフ　*43*

【か】

可観測性グラミアン　*108*
可制御性グラミアン　*106*
カップリング条件　*131*
可到達集合　*105*
可能領域　*2*
カルマンフィルタ　*196*
感度分析　*81*

【き】

擬似逆行列　*216*
擬凸関数　*45*
狭義の局所的最小解　*4*
狭義の準凸関数　*40*
狭義の相補性条件　*20*
狭義の大域的最小解　*4*
狭義の凸関数　*39*
強双対定理　*32*
強相補性条件　*20, 79*
極　*99*
　── の存在領域　*99, 233*
局所的最小解　*4*
局所的最小値　*4*
局所的最小点　*4*
許　容　*232*
許容領域　*2*

【く】

クロネッカー積　*227*

【け】

決定変数　*1*
厳密な準凸関数　*40*
厳密な凸関数　*39*

【こ】

合同変換　*132, 218*
勾　配　*6*
勾配ベクトル　*6*

【さ】

最小化問題　*2*
最大化問題　*2*
最大特異値　*112, 215*
最適化問題　*1*
最適制御問題　*34, 88*
最適性の 1 次の必要条件　*7, 13, 19, 24*
最適性の 2 次の十分条件　*8, 13, 20, 24*
最適性の 2 次の必要条件　*8, 13, 19, 24*
座標降下法　*137*

【し】

自己双対　*90*
実行可能　*2*
実行可能解　*2*
実行可能集合　*2*
実行可能領域　*2*
実行不可能　*2*
実行不可能解　*2*
実行不能　*2*
実行不能解　*2*
弱双対定理　*25, 75, 84, 94*
シュールの補題　*220*
　──（半正定値版）　*219*
主問題　*25, 71, 81, 91*
準勾配　*48*
準凸関数　*40*
準凸計画問題　*55*
消去補題　*127, 223*
シルベスターの判別法　*221*

【す】

数理計画問題　*1*
スカラー化　*164*
スラック変数　*72*

【せ】

正定値　*217*
切除平面法　*65, 68, 211*
漸近安定　*96*
線形行列不等式　*96*
線形計画問題　*69*
潜在価格　*80*

【そ】

双線形行列不等式　*123*
双対ギャップ　*28*
双対システム　*120*
双対定理　*31, 76, 84, 94*
双対問題　*25, 72, 81, 92*
相補スラック条件　*79*
相補性条件　*20, 79, 95*

【た】

大域的最小解　*4*
大域的最小値　*4*
大域的最小点　*4*
大数の弱法則　*193*
楕円体法　*59, 61, 63, 211*
多項式計画問題　*166, 170, 176*
単項式　*151*
単項式ベクトル　*155*

【ち】

逐次 LMI 化法　*139*
中心極限定理　*194*

【つ】

強い準凸関数　*40*

【て】

ディスクリプタシステム　*138, 231*
停留点　*6*

【と】

等式制約　*3*
等式標準形　*71*
特異値　*215*
特異値分解　*134, 153, 215*
凸関数　*39*
凸計画問題　*55*
凸集合　*38*
凸 2 次計画問題　*81*

【な行】

内点実行可能解　*94, 169*
二者択一の定理　*230*

【は行】

パーティクルフィルタ　*198*
半正定値　*217*
半正定値計画問題　*91*
半負定値　*218*
非負多項式　*153*
ファルカスの補題　*229*
負定値　*218*
不等式制約　*3*
フロベニウスノルム　*228*
分離定理　*44*
平方和可解問題　*176*
平方和行列　*163*
平方和行列最適化問題　*185*
平方和最適化問題　*176*
平方和多項式　*153*
平方和多項式行列　*163*
ヘッセ行列　*7*
変数消去法　*127*
変数変換法　*132*

【も】

目的関数　*1*
モツキン多項式　*157*
モデル予測制御　*87*
モンテカルロ法　*192*

【や行】

ヤコビ行列　*7*
有効集合　*18*
有効制約　*18*

【ら行】

ラグランジュ関数　*12, 18, 23*
ラグランジュ緩和問題　*27*
ラグランジュ乗数　*12, 18*
ラグランジュ双対　*25, 109*
ラグランジュの双対問題　*25*
リアプノフ関数　*97*
リアプノフ行列　*97*
リアプノフ方程式　*106, 108, 226*
リッカチ方程式　*36*
臨界点　*6*
レギュラー　*231*
劣勾配　*47*
劣微分　*47*
レベル集合　*40*
ロバスト性能解析問題　*206*
ロバスト性能検証問題　*204*
ロバスト性能設計問題　*207*

【わ】

ワイエルストラスの標準形　*232*

【欧文】

H_2 ノルム　*108, 233*
H_∞ ノルム　*112, 233*
SOS 可解問題　*176, 178, 179*
SOS 緩和　*167, 171, 175*
SOS 緩和問題　*167, 171*
SOS 行列　*163*
SOS 行列最適化問題　*185*
SOS 最適化問題　*176, 181*
SOS 多項式　*153*
SDP 緩和　*169, 174*
SDP 緩和問題　*169, 174*
LMI 領域　*100*
L_2 ノルム　*116*
KKT 条件　*19, 25*
KKT 点　*19, 25*

【数字】

1 次独立制約想定　*12, 19, 23*
2 次計画問題　*81*
2 乗和可解問題　*176*
2 乗和最適化問題　*176*
2 乗和多項式　*153*

—— 著 者 略 歴 ——

延山　英沢（のぶやま　えいたく）

1983年　東京大学工学部計数工学科卒業
1985年　東京大学大学院工学系研究科修士課程修了（計数工学専攻）
1988年　東京大学大学院工学系研究科博士課程修了（計数工学専攻）工学博士
1988年　東京大学助手
1990年　東京大学講師
1991年　九州工業大学助教授
2001年　九州工業大学教授
現在に至る

瀬部　昇（せべ　のぼる）

1987年　東京大学工学部計数工学科卒業
1989年　東京大学大学院工学系研究科修士課程修了（計数工学専攻）
1989年　東京大学助手
1994年　博士（工学）（東京大学）
1995年　東京大学講師
1995年　九州工業大学助教授
2007年　九州工業大学准教授
2009年　九州工業大学教授
現在に至る

システム制御のための最適化理論
Optimization Theory for Systems and Control

2015 年 7 月16日　初版第 1 刷発行

検印省略

著　者	延　山　英　沢
	瀬　部　昇
発 行 者	株式会社　コ ロ ナ 社
	代 表 者　牛 来 真 也
印 刷 所	三 美 印 刷 株 式 会 社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　**コ　ロ　ナ　社**
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–03321–2　（柏原）　（製本：愛千製本所）G

Printed in Japan