徹底解説　応用数学

―ベクトル解析，複素解析，
フーリエ解析，ラプラス解析―

博士（理学）　桑野 泰宏 著

コロナ社

ま　え　が　き

本書は，微分積分の入門講座を一通り終えた学生向けに書かれた微分積分の続論である。ベクトル解析，複素解析，フーリエ解析，ラプラス解析の四つの章からなり，多くの工学系の大学で「応用数学」などの講義名で教授される内容である。これら 4 章はたがいに関連しているが，どのような順番で学習してもよいように，また，一部の章だけ選択して学習してもよいように構成した。そのため，複数の章にわたって出てくる事項のいくつかは付録にまとめた。

1 章のベクトル解析は，電磁気学などのベクトル場の理論を記述するための数学として発達してきた。そこで 1 章では，グリーンの定理，ストークスの定理，ガウスの定理について，ベクトル解析の重要な応用例である電磁気学を例に取り入れて説明する。

2 章の主題は複素解析である。微分可能な複素関数を正則関数というが，正則関数には微分可能な実関数にはない性質，すなわち，何度でも微分可能であるという性質をもつ。さらに，正則関数の周回積分に関するコーシーの積分定理や留数定理について学び，その応用例として，実軸上の定積分の複素線積分を用いた計算技法についても学ぶ。

3 章ではフーリエ解析について学ぶ。周期関数を三角関数を用いて展開するフーリエ級数から説明し，複素フーリエ級数，フーリエ変換と説明を進める。この章の最後に，計算機を用いてフーリエ変換を求めるための計算法として実用上重要な，離散フーリエ変換と高速フーリエ変換についても取り上げた。

4 章で扱うのはラプラス解析である。ラプラス変換とその逆変換について説明し，関連してガンマ関数を導入する。さらに，ラプラス変換の常微分方程式や偏微分方程式への応用について説明した。

本書では，定理などの証明は厳密さと丁寧さを心掛けた。ただし，本書の程度を考えて，その旨を明記したうえで証明の一部または全部を省略した箇所がある。数学を修得するにはただ本を読むだけではなく，ペンを手にとって問題を解くことが必要不可欠である。本書では，例題などの問題に丁寧な解答例を付けたので，読者自ら手を動かして，途中の式変形や論理を追いかけてほしい。

本文中の一部のグラフ・図の作図には，Wolfram Mathematica®10.3 を用いた。また，本文中の一部の数値計算には，Microsoft® Excel® 2013 を用いた。

大学の同僚の川野誠氏，高英聖氏には，原稿を読んでいただいて貴重なご意見をいただいた。コロナ社の方々には，本書の執筆をすすめていただき，編集作業を通じて多大なるご協力をいただいた。これらの方々に心から感謝いたします。

2016 年 7 月

桑野泰宏

本書の使い方

- 以下の項目をひとまとめにして，各章の中で通し番号を付している。
  - **定理・命題・補題・系**とは，定義などから論理的に証明された事柄をいう。これらの中で非常に重要なものを定理，重要なものを命題，命題などを証明するのに必要な補助命題を補題，命題などから容易に導かれるものを系としたが，その区別は厳密なものではない。
  - **法則**とは，実験事実より導き出された物理法則である。数学の定理などのように証明はできない。1 章においては，**法則**と**命題**などをひとまとめにして通し番号を付している。
- 以下の各項目と図，および重要な式には，それぞれ各章の中で通し番号を付してある。
  - **定義**とは，言葉の意味や用法について定めたものである。
  - **注意**とは，定義や定理・命題などに関する注意である。
  - **例**とは，定義や定理・命題などの理解を助けるための実例である。
  - **例題**では，基本的な問題の解き方を丁寧に説明した。
  - **練習**は，(一部の例外を除き) 例題の類題である。
- 各章の章末には，まとめの問題を**章末問題**として配置した。
- 本書では，証明の終わりに □，解答例の終わりに◆を付した。
- 重要な用語は太字にし，巻末の索引で引用するとともに，一部の用語には英訳を付した。探したい項目や式を見つけるには，それぞれの通し番号を参考にするとともに，目次や索引を活用してほしい。

目　　　次

1. ベクトル解析

2. 複　素　解　析

3.　フーリエ解析

4.　ラプラス解析

本書で用いる記号

本書では以下の記号を用いる。

(1) $A := B$ または $B =: A$ で，B により A を定義すると読む。

(2) 自然数全体の集合を $\mathbb{N}$，整数全体の集合を $\mathbb{Z}$，有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$，実数全体の集合を $\mathbb{R}$，複素数全体の集合を $\mathbb{C}$ で表す。なお，本書では自然数を正の整数の意味で用いる。

(3) a が集合 A の元であるとき，$a \in A$ または $A \ni a$ と記す。a が集合 A の元ではないとき，$a \notin A$ または $A \not\ni a$ と記す。

(4) A, B を集合とするとき，$A \cup B$ は A と B の和集合（合併），$A \cap B$ は A と B の積集合（共通部分），$A \backslash B$ は A と B の差集合（集合 A から集合 B の元を取り去って得られる集合）を表す。

　例えば，$A := \{2, 4, 6\}$, $B := \{2, 3, 5\}$ のとき，$A \cup B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$, $A \cap B = \{2\}$, $A \backslash B = \{4, 6\}$, $B \backslash A = \{3, 5\}$ である。

　平面上または 3 次元空間内の領域を点の集合と見なすことにより，複数の領域の合併，共通部分，差をそれぞれ $\cup, \cap, \backslash$ を用いて表すことがある。

(5) $x = a$ の近傍で，$|f(x)| < M|g(x)|$ をみたす正数 M が存在するとき，関数 $f(x)$ は $x \to a$ のとき関数 $g(x)$ で押さえられるといい，$f(x) = O(g(x))$ $(x \to a)$ と記す。

　また，$\displaystyle\lim_{x \to a} |f(x)/g(x)| = 0$ が成り立つとき，関数 $f(x)$ は $x \to a$ のとき関数 $g(x)$ に比べて無視できるといい，$f(x) = o(g(x))$ $(x \to a)$ と記す。

　例えば，e^x の $x = 0$ のまわりのテイラー展開は $e^x = 1 + x + x^2/2 + \cdots$ であるが，これを

$$e^x = 1 + x + O(x^2)\ (x \to 0), \quad e^x = 1 + x + o(x)\ (x \to 0)$$

などと記す。$O(g(x))$ や $o(g(x))$ を**ランダウの記号**という。

1　ベクトル解析

本章ではベクトル解析について学ぶ。その考察対象は，平面上または 3 次元空間におけるスカラー場とベクトル場である。場とは位置により変化する量であり，そのうち実数値関数となるものがスカラー場であり，ベクトル値関数となるものがベクトル場である。

ベクトル解析において重要なことは，まずスカラー場の勾配，ベクトル場の回転や発散などの微分演算に習熟することである。さらに，ベクトル場の線積分や面積分などの定義を踏まえて，グリーンの定理，ストークスの定理，ガウスの定理の意味について理解することである。

本書では，ベクトル解析の重要な応用例である電磁気学について取り上げた。高等学校から学んできた微分積分学がニュートン力学とともに発展してきたように，ベクトル解析が電磁場などのベクトル場を記述するための数学として発展してきたからである。

本章にはほかの章と違って，いくつかの**法則**が登場する。数学の定理（命題・補題・系を含む）は定義やほかの定理などから論理的に証明できるものである。一方，物理法則は実験事実を一般化したものであり，数学の定理のように証明はできないことに注意しなければならない。数学の定理と物理法則の区別は数学としても物理としてもきわめて重要である。

なお，法則の一部が「証明」されているが，これは，それまでに述べられた定義やほかの法則から式変形などにより示すことができる場合に，定理などの $\boxed{\text{証明}}$ のマークを流用したものである。ほかの法則が根拠となっている以上，最終的には実験によってその成否が確かめられるものであることはいうまでもない。

1.1　ベクトルの基本事項

本章でベクトル解析を学ぶにあたり，**ベクトル**（vector）の基本的なことについて簡単に復習しておこう†。

平面のベクトルまたは 2 成分ベクトルとは $\mathbb{R}^2$ の元のことであり，二つの実数の組からなる。平面ベクトルの演算は以下で定義される。

定義 1.1 （平面ベクトルの演算）$\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}$ に対し，その和，差およびスカラー倍は，つぎのように定義される。

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \end{bmatrix}, \quad c\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \end{bmatrix} \tag{1.1}$$

また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**内積**（scalar product）は，つぎのように定義される。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 \tag{1.2}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ は，つぎのように定義される。

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \tag{1.3}$$

さらに，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の**外積**（vector product）はつぎのように定義される。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = a_1 b_2 - a_2 b_1 \tag{1.4}$$

注意 1.1　通常，平面ベクトルに対しては外積を定義しないが，本書では後の都合上定義しておいた。定義 1.4 を参照のこと。

空間のベクトルまたは 3 成分ベクトルとは $\mathbb{R}^3$ の元のことであり，三つの実数の組からなる。空間のベクトルの演算は以下で定義される。

† 1.1 節に登場する命題の証明はすべて省略する。参考文献1) ほか，線形代数の教科書を参照せよ。

定義 1.2　（空間のベクトルの演算）　$\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$, $\boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ に対し，その和，差およびスカラー倍は，つぎのように定義される。

$$\boldsymbol{a} \pm \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_1 \pm b_1 \\ a_2 \pm b_2 \\ a_3 \pm b_3 \end{bmatrix}, \quad c\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} ca_1 \\ ca_2 \\ ca_3 \end{bmatrix} \tag{1.5}$$

また，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の内積は，つぎのように定義される。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \tag{1.6}$$

ベクトル $\boldsymbol{a}$ の大きさ $|\boldsymbol{a}|$ は，つぎのように定義される。

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a}} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{1.7}$$

さらに，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ の外積は，つぎのように定義される。

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \begin{bmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{bmatrix} \tag{1.8}$$

ベクトルの内積と外積について，つぎの一連の命題が成り立つことがわかる。

命題 1.1　平面上または 3 次元空間における二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ の内積と外積について，つぎが成り立つ。

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}, \quad \boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = -\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{a} \tag{1.9}$$

命題 1.2　平面上または 3 次元空間における二つのベクトル $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ に対して

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = |\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}| \cos\theta \tag{1.10}$$

が成り立つ。ここで，θ は $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角とする。

注意 1.2　$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{0}$ または $\boldsymbol{b}=\boldsymbol{0}$ のとき，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ のなす角 θ は定義できないが，式 (1.10) の左辺は定義式 (1.2)，定義式 (1.6) より 0 に等しく，式 (1.10) の右辺も $|\boldsymbol{a}|=0$ または $|\boldsymbol{b}|=0$ より 0 に等しい。すなわち，$0=0$ の意味で式 (1.10) が成り立つ。

命題 1.3　二つの空間ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ の外積 $\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ にともに垂直で，その大きさは $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積に等しい。

注意 1.3　$\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ にともに垂直で，その大きさが $\boldsymbol{a}$ と $\boldsymbol{b}$ を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の面積に等しいベクトルは 2 本ある。もし右手系の座標系，すなわち，$+x$ 軸から $+y$ 軸へと右ねじを回したときにねじが進む向きを $+z$ 軸としたとき，$\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ は，$\boldsymbol{a}$ から $\boldsymbol{b}$ へと右ねじを回したときにねじが進む向きである（**図 1.1**）。

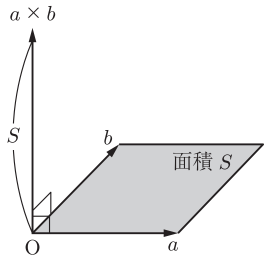

図 1.1　ベクトルの外積

命題 1.4　ベクトル $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の体積 V は，$|(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}|$ に等しい。

注意 1.4　$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}$ は，$\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ を隣り合う 3 辺とする平行六面体の符号付きの体積と考えられる。$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}>0$ となるのは，外積 $(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})$ と $\boldsymbol{c}$ のなす角 θ が鋭角のときであり，$(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b})\cdot\boldsymbol{c}<0$ となるのは，θ が鈍角のときである。

ベクトル $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ を巡回的（サイクリック）に入れ替えても平行六面体の符号付きの体積が変わらないことから，つぎが命題 1.4 の系として成り立つ。

系 1.5　$\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}\in\mathbb{R}^3$ に対して，つぎの関係式が成り立つ。

$$(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) \cdot \boldsymbol{a} = (\boldsymbol{c} \times \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} \tag{1.11}$$

注意 1.5　行列とベクトルの積を考えるときには，ベクトルを縦ベクトルと考えるほうが都合がよい†。しかし行列とベクトルの積を考えないですむ場合には，縦ベクトルでも横ベクトルでも話は変わらない。そこで本章では，スペースを省略するため，ベクトルを $\mathbb{R}^2 \ni \boldsymbol{a} = (a_1, a_2)$, $\mathbb{R}^3 \ni \boldsymbol{a} = (a_1, a_2, a_3)$ のように横ベクトルの形で書くことにする。

1.2　平面上のスカラー場とベクトル場

本節と次節では，平面座標 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ を変数とする関数を考えよう。関数の種類はスカラー値関数 $f(\boldsymbol{r})$ とベクトル値関数 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$ である。

定義 1.3（**スカラー場とベクトル場 I**）　平面座標を変数とするスカラー値関数のことを**スカラー場**（scalar field），ベクトル値関数のことを**ベクトル場**（vector field）という。より正確には，2 次元平面 $\mathbb{R}^2$ の部分集合 P 上の実数値関数 $f : P \longrightarrow \mathbb{R}$ をスカラー場といい，P から $\mathbb{R}^2$ へのベクトル値関数 $\boldsymbol{A} : P \longrightarrow \mathbb{R}^2$ をベクトル場という。

例 1.1　$\mathbb{R}^2$ 上の点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ の原点からの距離 $f(\boldsymbol{r}) = |\boldsymbol{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$ はスカラー場である。

例 1.2　**図 1.2** は，点 $\boldsymbol{r} = (x, y)$ での値が，$\boldsymbol{A}_1(\boldsymbol{r}) = (x, y)$，$\boldsymbol{A}_2(\boldsymbol{r}) = (-y, x)$ となるベクトル場の様子を表したものである。

---

† 実際，3.6 節と 3.7 節で行列とベクトルの積を考えるときは，ベクトルを縦ベクトルと見なす。また，3.7 節では行列やベクトルの成分を複素数に拡張して用いる。

索　　　　　引

【ち】

【て】

【と】

【な】

【ね】

【は】

【ひ】

【ふ】

【へ】

【ほ】

【ま】

【む】

【め】

【も】

【ゆ】

【ら】

【り】

【る】

【れ】

【ろ】

【英数字】

著者略歴

1988 年　東京大学理学部物理学科卒業
1993 年　東京大学大学院理学系研究科博士課程修了（物理学専攻）
　　　　博士（理学）
1993 年　京都大学数理解析研究所研修員（日本学術振興会特別研究員）
～98 年
1994 年　メルボルン大学数学科 Research Fellow (Level A)
～95 年
1998 年　鈴鹿医療科学大学講師
2005 年　鈴鹿医療科学大学助教授
2006 年　鈴鹿医療科学大学教授
　　　　現在に至る

徹底解説 応用数学
—ベクトル解析，複素解析，フーリエ解析，ラプラス解析—
Thorough Description on Applied Mathematics—Vector Analysis, Complex Analysis, Fourier Analysis and Laplace Analysis—

2016 年 9 月 5 日　初版第 1 刷発行　★

検印省略

著　者　桑野泰宏（くわの やすひろ）
発 行 者　株式会社　コロナ社
　　　　代 表 者　牛来真也
印 刷 所　三美印刷株式会社

112–0011　東京都文京区千石 4–46–10
発行所　株式会社　コロナ社
CORONA PUBLISHING CO., LTD.
Tokyo Japan
振替 00140–8–14844・電話(03)3941–3131(代)
ホームページ http://www.coronasha.co.jp

ISBN 978–4–339–06111–6　（新井）　（製本：愛千製本所）
Printed in Japan