

## は し が き

---

機械、構造物の強度設計はコンピュータの発達と共に高精度化し、今後ますますその傾向が進むものと考えられる。弾性体の力学はこのための基礎であると共に基礎工学における主要な一分野である。弾性学を機械工学科の必修科目として伝説的な以前から講義されて来た東北大学工学部内力及び弾性学講座の先任の三教授、砂谷、樋口、玉手の三先生に改めて敬服する次第である。

本書は、著者二人の東北大学工学部及び工学研究科における講義の経験に基づいて執筆したもので、学部レベル(一部大学院レベル)の教科書を目標としている。これまで多くの弾性学の教科書が出版されたが、演習問題を重視したものは意外に少ない。弾性学のような数理的学問は多くの問題を自ら解くという勉強方法によって初めて実力を身に付けることができると考え、章ごとに幾つかの例題を配置すると共に演習問題を豊富に取り入れた。これは本書の特色であり、大学院入試の自習書としても有用である。なお同じコロナ社から出版されている恩師玉手先生の著書“弾性体の変形”の基礎演習編とみることもできる。また二次元問題の章では破壊力学との関連で転位やき裂に関する説明を入れた。

ここに、永年にわたり御懇切な御指導を賜った恩師東北大学名誉教授(現在八戸高専校長)玉手統先生に衷心から感謝の意を表する。又、本書の執筆をお勧めいただいた東京大学教授岡村弘之博士に深甚なる謝意を表する。

本書の執筆中著者の一人関根助教授がたまたま同じ工学部内の基礎工学教室に転出することになった。このこともあり、特に演習問題については後任の林一夫助教授を煩わした。坂真澄助手及び研究室の諸君の協力も大きい。又、原稿の浄書には庄子孝夫技官の助力を得た。これら協力を受けた諸君に感謝の意を表する。更に本書の出版に当たって種々の御高配を賜ったコロナ社の各位に

厚く御礼申し上げます。

昭和 58 年 3 月

著者を代表して

阿 部 博 之

# 目 次

---

## 1 変形とひずみ

---

1.1 変 位	1
1.2 ひずみと回転	2
1.3 主軸・主ひずみ	6
1.4 ひずみ不変量	8
1.5 適合方程式	10
演習問題	11

## 2 応 力

---

2.1 表面力と体積力	14
2.2 垂直応力とせん断応力	15
2.3 主軸・主応力	18
2.4 応力不変量	20
2.5 八面体応力と偏差応力	20
2.6 Mohr の応力円	23
2.7 平衡方程式	25
演習問題	27

## 3 ひずみエネルギー

---

3.1 ひずみエネルギー密度関数	31
------------------	----

3.2	Clapeyron の定理	35
3.3	最小ポテンシャルエネルギーの定理	38
3.4	Betti-Rayleigh の相反定理	42
	演習問題	44

## 4 構成方程式

4.1	広義の Hooke の法則	45
4.2	直交異方性体	46
4.3	等方弾性体	48
	演習問題	54

## 5 弾性理論の基礎式

5.1	均質等方弾性体の基礎方程式	56
5.2	Navier の方程式	57
5.3	Beltrami-Michell の適合方程式	58
5.4	直交曲線座標による基礎式	61
5.5	重ね合せの原理	64
	演習問題	65

## 6 弾性棒のねじり及び曲げ

6.1	棒のねじり	67
6.2	棒の曲げ	85
6.2.1	純曲げ	85
6.2.2	先端荷重による曲げ	88
	演習問題	101



## 二 次 元 問 題

---

7.1 平面ひずみと平面応力	103
7.2 二次元問題の基礎式	107
7.3 複素応力関数	108
7.4 集中力と転位	117
7.4.1 集中力	117
7.4.2 刃状転位	119
7.5 円孔を有する無限板	121
7.6 直線き裂	124
7.7 偏平介在物	128
7.8 接触問題	134
7.9 $J$ 積分	138
演習問題	139

演習問題解答

参 考 文 献

索 引

# I

## 変形とひずみ

物体を連続体として取り扱う。物体の変形を変形前後の物体の各点の位置の変化としてとらえ変形の幾何学的側面について述べる。

### 1.1 変 位

物体に外力が作用すると物体は変形する。このとき 図 1.1 に示されるように変形前の物体の占める領域  $R$  内の任意の 1 点  $P$  は変形により変形後の物体の占める領域  $R'$  内の 1 点  $P'$  に移る。直角座標  $(x_i)$  を用いて点  $P$  の座標を  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $P'$  の座標を  $(y_1, y_2, y_3)$  とすれば点  $P'$  の位置は次式によって表される。

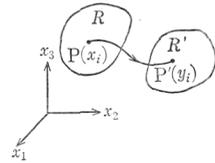


図 1.1 変 形

$$y_i = y_i(x_1, x_2, x_3) \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.1)$$

式 (1.1) において物体内の任意の 2 点間の距離が全く変わらない場合を剛体移動 (rigid body motion) という。一方、変形前後で物体内の 2 点間の距離が変化した場合は物体が変形したと呼ばれる。

物体内の点の変形前後の位置の変化を変位 (displacement) という。従って点  $P, P'$  の座標によって変位成分  $u_i$  は次式で与えられる。

$$u_i = y_i - x_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (1.2)$$

【例題 1.1】 式 (1.1) の簡単な例として線形変換を挙げることができる。

$$y_i = a_{ij}x_j + b_i \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.3)$$

ここに,  $a_{ij}, b_i$  は定数である。

[注] 式 (1.3) において, 指標の反復はその指標のとり範囲についての和を表すものとして記号  $\Sigma$  を省略している。例えば  $i = 1$  の場合は  $y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + b_1$ 。以後, ラテン文字の指標のとり範囲は 1, 2, 3 とし, 指標のとり範囲の表示を省略する。

変形が式 (1.3) で表されると変形前平面であったものは変形後も平面を保つことが示される。

変形前の物体内の平面の方程式は次式で与えられる。

$$\alpha_i x_i = \beta \quad (1.4)$$

ここに,  $\alpha_i, \beta$  は定数である。式 (1.3) から  $x_i$  は  $y_i$  によって次の形に表すことができる。

$$x_i = C_{ij}y_j + D_i \quad (1.5)$$

ただし,  $C_{ij}, D_i$  は定数である。式 (1.5) を式 (1.4) に代入すれば

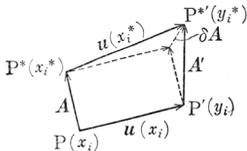
$$\gamma_i y_i = \delta \quad (1.6)$$

ここに,  $\gamma_j = \alpha_i C_{ij}, \delta = \beta - \alpha_i D_i$ 。式 (1.6) は平面の方程式であり, 従って変形前平面であったものは変形後も平面となる。

## 1.2 ひずみと回転

式 (1.1) で表される変形によって点  $P(x_i)$  は変形後  $P'(y_i)$  に移ったとする。  $P(x_i)$  の近傍に点  $P^*(x_i^*)$  をとり,  $PP^*$  を結ぶ微小ベクトルを  $A$  とす

る。式 (1.1) の変形により点  $P^*(x_i^*)$  の移動後の位置を  $P^*(y_i^*)$  とすれば変形前後の微小ベクトル  $A$  の変化  $\delta A$  は (図 1.2)



$$\delta A = A' - A \quad (1.7)$$

$$= u(x_i^*) - u(x_i) \quad (1.8)$$

図 1.2 変形前後の微小ベクトル  $A$  の変化

ベクトル成分で書けば

$$\delta A_i = u_i(x_k + A_k) - u_i(x_k) \quad (1.9)$$

$\mathbf{A}$  が微小ベクトルであるから式 (1.9) は近似的に次のように書くことができる。

$$\begin{aligned} \delta A_i &\doteq u_i(x_k) + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} A_j - u_i(x_k) \\ &= u_{i,j} A_j \end{aligned} \quad (1.10)$$

【注】 式 (1.10) において、コンマ付下指標は偏微分を表す。

式 (1.10) の変位勾配  $u_{i,j}$  は対称性を有する部分  $e_{ij}$  と反対称性を有する部分  $\omega_{ij}$  に分解することができる。

$$u_{i,j} = e_{ij} + \omega_{ij} \quad (1.11)$$

ここに、

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) = e_{ji}, \quad \omega_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} - u_{j,i}) = -\omega_{ji} \quad (1.12)$$

上式で定義された  $e_{ij}$  をひずみ (strain) 成分、また  $\omega_{ij}$  を回転 (rotation) 成分という。ひずみ成分のうち独立な成分は 6 個であり、回転成分のそれは 3 個である。ひずみ成分  $e_{11}, e_{22}, e_{33}$  はそれぞれ  $x_1, x_2, x_3$  軸に平行な方向のベクトルの長さの変化の割合を意味し、縦ひずみ (longitudinal strain) 成分と、また  $e_{12}, e_{23}, e_{13}$  は変形前後における角度の変化を表し、せん断ひずみ (shear strain) 成分と呼ばれる。

【注】 座標系  $(x, y, z)$  に関して式 (1.12) は次のように書かれる。

$$\left. \begin{aligned} e_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ e_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad e_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad e_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \omega_{xx} &= 0, \quad \omega_{yy} = 0, \quad \omega_{zz} = 0 \\ \omega_{xy} &= \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \omega_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right), \quad \omega_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\}$$

【例題 1.2】 変形による点  $P(x_i)$  における微小ベクトル  $\mathbf{A}$  の長さ  $A (= \sqrt{A_i A_i})$  の変化の割合は次式で表される。

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{e_{ij}A_iA_j}{A^2} \quad (1.13)$$

微小ベクトル  $\mathbf{A}$  の変形後の長さ  $A' (= |\mathbf{A}'| = \sqrt{A'_iA'_i})$  は変化量  $\delta A$  が  $A$  に比べて十分小さいことを考慮すれば式 (1.7) から

$$A' = \sqrt{A^2 + 2A_i\delta A_i} \quad (1.14)$$

更に、式 (1.10), (1.11) を用い  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  の性質を利用すれば次式を得る。

$$\frac{A'}{A} = \sqrt{1 + \frac{2e_{ij}A_iA_j}{A^2}}$$

従って

$$\frac{\Delta A}{A} = \frac{A' - A}{A} = \sqrt{1 + \frac{2e_{ij}A_iA_j}{A^2}} - 1 \doteq \frac{e_{ij}A_iA_j}{A^2}$$

特に、ベクトル  $\mathbf{A}$  が  $A_1 = A, A_2 = A_3 = 0$  の場合には

$$\frac{\Delta A}{A} = e_{11} \quad (1.15)$$

即ちひずみ成分  $e_{11}$  は変形前に  $x_1$  軸に平行な方向のベクトルの長さの変化の割合を示している。同様に  $e_{22}, e_{33}$  は変形前にそれぞれ  $x_2, x_3$  軸に平行な方向のベクトルの長さの変化の割合を示す。

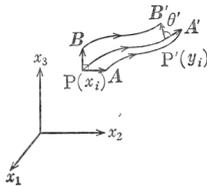


図 1.3 直交微小ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の変形後の夾角

**【例題 1.3】** 点  $P(x_i)$  における  $x_2, x_3$  軸に平行な方向の微小ベクトルをそれぞれ  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  とする (図 1.3)。ベクトル  $\mathbf{A}, \mathbf{B}$  の変形後の夾角を  $\theta'$  とすれば次式が成立する。

$$\cos \theta' = 2e_{23} \quad (1.16)$$

直交する二つのベクトル  $\mathbf{A}$  ( $A_1 = 0, A_2 = A, A_3 = 0$ ),  $\mathbf{B}$  ( $B_1 = B_2 = 0, B_3 = B$ ) の変形後のベクトル  $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$  は式 (1.7) から求められる。  $\delta A_i, \delta B_i$

がそれぞれ  $A, B$  に比べて十分小さいことを考慮すればベクトル  $\mathbf{A}', \mathbf{B}'$  の内積から

$$A'B' \cos \theta' = A' \cdot B' = A\delta B_2 + B\delta A_3 \quad (1.17)$$

式 (1.14) から  $A', B'$  はそれぞれ近似的に

$$A' = A + \delta A_2, \quad B' = B + \delta B_3 \quad (1.18)$$

与えられ、これを式 (1.17) に代入し  $\delta A_i, \delta B_i$  の高次の項を省略して次式を得る。

$$\cos \theta' = \frac{\delta A_3}{A} + \frac{\delta B_2}{B} \quad (1.19)$$

式 (1.10), (1.11) を用いると  $\delta A_3, \delta B_2$  は

$$\delta A_3 = (e_{32} + \omega_{32})A, \quad \delta B_2 = (e_{23} + \omega_{23})B \quad (1.20)$$

式 (1.20) を式 (1.19) に代入し、 $e_{ij}$  の対称性及び  $\omega_{ij}$  の反対称性の性質を利用すれば式 (1.16) の結果が得られる。

夾角  $\theta'$  の余角を  $\alpha_{23}$  とする。  $\alpha_{23}$  の値は小さいから

$$\alpha_{23} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{23}\right) = \cos \theta' = 2e_{23} \quad (1.21)$$

即ちひずみ成分  $e_{23}$  は変形前に  $x_2, x_3$  軸に平行な方向の二つのベクトルの夾角の減少量の半分に等しい。  $e_{12}, e_{13}$  も同等の意味を有する。

**【例題 1.4】** ひずみ成分  $e_{ij}$  がすべて零であり、回転成分  $\omega_{ij}$  だけが存在する場合には次のことがいえる。(a) 変形によって微小ベクトル  $A$  の長さは変化しない。(b) ベクトル  $A$  の変化  $\delta A$  はもとのベクトル  $A$  と直交する。

(a)  $e_{ij} = 0$  であるから、式 (1.13) から

$$\Delta A = 0 \quad (1.22)$$

(b) 式 (1.10), (1.11) から  $\delta A_i$  は

$$\delta A_i = \omega_{ij} A_j \quad (1.23)$$

$\delta A$  と  $A$  の内積を作り  $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$  を考慮すれば

$$A_i \delta A_i = \omega_{ij} A_i A_j = 0 \quad (1.24)$$

よって、 $\delta A$  と  $A$  は直交する。

以上から  $\omega_{ij}$  は点  $P(x_i)$  における微小ベクトルの回転にのみ寄与する量であることが理解できる。とくに  $\omega_{12} = -\omega_{21}$  だけが零でない場合には、式 (1.

23) から

$$\delta A_1 = \omega_{12} A_2, \quad \delta A_2 = -\omega_{12} A_1, \quad \delta A_3 = 0 \quad (1.25)$$

即ち  $\omega_{12}$  はベクトル  $\mathbf{A}$  の  $x_3$  軸に平行な軸の回りの回転を意味する。  $\omega_{13}, \omega_{23}$  も同様の意味を有することは容易にわかる。

### 1.3 主軸・主ひずみ

物体の占める領域  $R$  内の 1 点  $P(x_i)$  を原点とし、直角座標系  $(x_i)$  と座標

軸が平行な局所座標系  $(\xi_i)$  を導入する。点  $P(x_i)$  における微小ベクトル  $\mathbf{A}$  の成分を  $\xi_i$  で表示すれば、ベクトル  $\mathbf{A}$  の縦ひずみ  $e_A$  は式 (1.13) から

$$e_A A^2 = e_{ij} \xi_i \xi_j \quad (1.26)$$

いま次の二次曲面を考えよう。

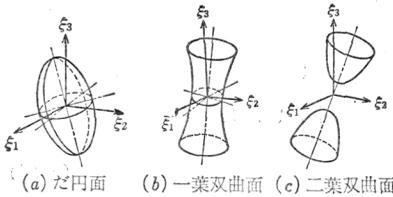


図 1.4 二次曲面

$$e_{ij} \xi_i \xi_j = k \quad (1.27)$$

ここに、 $k$  は定数であり、その符号は曲面が実になるようにとるものとする。図 1.4 で示されるようなだ円面や双曲面は式 (1.27) で与えられる二次曲面の例である。これらの二次曲面を Cauchy のひずみ二次曲面 (strain quadric) という。式 (1.26) と式 (1.27) を比較することによって任意の方向の微小ベクトル  $\mathbf{A}$  の縦ひずみは次式で得られる。

$$e_A = \frac{k}{A^2} \quad (1.28)$$

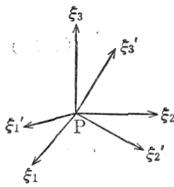


図 1.5 座標変換

**【例題 1.5】** 座標の変換によるひずみ成分の変換公式を導け。

点  $P$  を原点とする新しい直角座標系を  $(\xi'_i)$  とする (図 1.5)。新座標系の座標軸と旧座標系  $(\xi_j)$  の座標軸とのなす角の方向余弦を  $l_{ij}$  (表 1.1) とすれば、

# 索 引

## 【 A 】

Airy の応力関数 108

## 【 B 】

Beltrami-Michell の適合方程式 59

Bernoulli-Euler の式 96

Betti-Rayleigh の相反定理

43

Burgers ベクトル 119

## 【 C 】

Castigliano の定理 44

Cauchy の公式 17

Clapeyron の定理 35

## 【 D 】

弾性偏平介在物 128

弾性解の一意性 37

弾性定数 45

断面一次モーメント 87

断面二次モーメント 87

断面積乗モーメント 87

断面の主軸 89

Duhamel-Neumann の法則

54

## 【 E 】

円孔 121

円弧切欠き 77

## 【 G 】

剛体移動 1

Goursat の表示 110

Green-Gauss の定理 33

## 【 H 】

半逆法 68

発散 58

八面体せん断応力 22

八面体垂直応力 21

刃状転位 119

平均応力 22

平衡方程式 26

平面ひずみ 103

平面応力 19, 105

広義の—— 107

平面上の Green-Gauss の定理

73

変位 1

——境界値問題 37

偏差応力 22

Hilbert 問題 135

ひずみ 3

——の主軸 7

——不変量 9

——二次曲面 6

ひずみエネルギー 31

——密度関数 33

補足エネルギー 101

——密度関数 156

不均質 45

複合角柱 79

複素ねじり関数 84

複素たわみ関数 100

表面力 14

## 【 J 】

J 積分 138

## 【 K 】

重ね合せの原理 64

仮想変位 38

仮想補足仕事の原理 44

仮想仕事 38

——の原理 39

回転 3

角柱 98

荷重の面 95

均質 45

Kirchhoff の定理 38

広義の Hooke の法則 46

Kolosoff-Muskhelishvili

の表示 110

混合境界値問題 37

構成法則 45

構成方程式 45

許容変位 38

## 【 L 】

Lagrange の乗数法 147

Lamé の定数 50

ラブラシアン 58

## 【 M 】

曲げの面 95

丸棒 96

Mohr のひずみ円 25

Mohr の応力円 24

【N】

Navier の方程式 58  
 ねじり剛性 74  
 ねじり関数 72  
 ねじれ角 72  
 ねじり応力関数 69

【O】

応力 15  
 —の主面 19  
 —の主軸 19  
 —ベクトル 15  
 —不変量 20  
 —拡大係数 128  
 —境界値問題 37  
 —二次曲面 18  
 —集中係数 123

【P】

ポアソン比 51  
 ポテンシャルエネルギー 40

【R】

らせん転位 142

【S】

Saint Venant の問題 67  
 最小ポテンシャルエネルギーの定理 41  
 せん断弾性係数 52  
 せん断ひずみ 3  
 せん断角 52  
 せん断応力 16  
 —線 75  
 せん断中心 94  
 正三角形断面棒 78  
 線膨張係数 53  
 線形弾性理論 64  
 静水圧 52  
 接触問題 134  
 垂直応力 16  
 主応力 19  
 主ひずみ 7  
 集中力 117

【T】

体積弾性係数 53  
 体積ひずみ 9  
 体積力 14  
 単軸引張り 51  
 単純せん断 52  
 縦ひずみ 3  
 縦弾性係数 51  
 縦せん断 141  
 たわみ関数 91  
 適合方程式 10  
 等方体 48  
 長円形断面棒 76  
 直交異方性体 47  
 直交曲線座標 61  
 直線き裂 124  
 調和関数 60  
 中立面 95

【Z】

純曲げ 85  
 重調和関数 60

—著者略歴—

阿部博之

1959年 東北大学工学部機械工学科卒業  
1967年 工学博士(東北大学)  
1968年 東北大学助教授  
1977年 東北大学教授  
1996年 東北大学総長  
2002年 東北大学名誉教授

関根英樹

1965年 東北大学工学部機械工学科卒業  
1977年 工学博士(東北大学)  
1980年 東北大学助教授  
1987年 東北大学教授  
現在に至る

弾性学

Theory of Elasticity

© Hiroyuki Abe, Hideki Sekine 1983

1983年5月10日 初版第1刷発行  
2005年12月20日 初版第9刷発行

著者承認  
検印省略

著者 阿部博之

仙台市太白区八木山南 1-5-6

関根英樹

仙台市青葉区五橋 2-7-9-904

発行者 牛来辰巳

発行所 株式会社 コロナ社

112-0011 東京都文京区千石 4-46-10

電話 (03) 3941-3131 (代) 振替 00140-8-14844

ホームページ <http://www.coronasha.co.jp>

ISBN 4-339-04037-1

(清文社, 愛千製本所)

Printed in Japan

無断複写・転載を禁ずる

落丁・乱丁本はお取替いたします

